Università di Tieste – Facoltà d'Ingegneria.
Laurea in ingegneria chimica, edile, dei materiali, meccanica e navale

Corso di Analisi Matematica II
Programma svolto alla data del giorno: 31 maggio 2002
Anno Accademico 2001/2002

Prof. Gino Tironi
Esercitazioni: dott. Franco Obersnel

N.B. (D) indica che del fatto si richiede la dimostrazione. (SD) indica che del fatto si chiede la conoscenza, senza dimostrazione.

SERIE.

Serie di numeri reali. Introduzione storica. Posizione del problema. Termini di una serie. Somme parziali o ridotte di una serie. Primi esempi. Serie resto. Condizione necessaria per la convergenza (Se una serie converge il termine generale a_n tende a 0 (D)). Carattere di una serie e di ogni suo resto (D). Aut-aut delle serie a termini positivi (D). *Tre esempi fondamentali.* La serie geometrica, la serie di Mengoli e sua convergenza (D), la serie armonica e sua divergenza (D). Serie somma di due serie e prodotto di una serie per una costante.

Serie a termini positivi. Criterio del confronto (di Gauss) (D). Criterio del rapporto (D'Alembert) e variante con il limite (D). Criterio della radice (Cauchy) e variante con il limite (D). Convergenza di integrali generalizzati e di serie. La serie armonica generalizzata. Convergenza e ordine d'infinitesimo del termine generale a_n (D). La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n}-\log(\frac{n+1}{n}))=\gamma$. ($\gamma = 0,577215664901532..$ costante di Eulero-Mascheroni).

Serie a termini misti. Convergenza assoluta di serie a termini misti. Teorema di Riemann-Dini sulla convergenza delle serie a termini misti (D). Serie a termini di segno alternato: Teorema di Leibniz (SD). La serie di Lebniz.

Successioni in $\mathbb{C}$. La convergenza di una successione in $\mathbb{C}$ equivale alla convergenza delle successioni delle parti reali e immaginarie. Intorni di $z_0 \in \mathbb{C}$. Serie a valori in $\mathbb{C}$. Una serie a valori in $\mathbb{C}$ assolutamente convergente è convergente (D). Serie geometrica di ragione $z \in \mathbb{C}$.

Successioni e serie di funzioni. Successioni di funzioni $f_n : (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (o $f_n : E(\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$). Convergenza *puntuale* e *uniforme* di successioni di funzioni. Alcuni esempi di successioni di funzioni semplicemente ma non uniformemente convergenti. Convergenza puntuale e uniforme di serie di finzioni. Problema della sviluppabilità di una funzione in serie di funzioni date. Serie di potenze in $\mathbb{R}$. Esempi. Lemma di Abel (D). Dominio di convergenza regolare e accidentale. Raggio di convergenza. Esempi. Enumciato dei teoremi sui limiti, continuità, derivabilità, integrabilità di successioni e serie di funzioni in presenza della convergenza uniforme (SD). La somma di una serie di potenze è continua in $]z_0 - R, z_0 + R[$ (SD). La serie derivata a termine a termine ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza (D). La somma della serie di potenze è derivabile ed uguale alla somma della serie derivata in $]z_0 - R, z_0 + R[$ (SD). Integrazione a termine a termine di una serie di potenze (SD). La somma di una serie di potenze è di classe $\mathcal{C}^\infty(]z_0 - R, z_0 + R[)$, anzi è *analitica.* Un esempio di funzione di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ma non analitica su $\mathbb{R}$. Sviluppabilità in serie di Taylor di una funzione. Alcune condizioni sufficienti (D). Serie di Taylor di e^x, di $\operatorname{sen} x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcsen} x$.

Funzioni e serie nel campo complesso. Funzioni complesse di variabile complessa. Continuità, limiti, derivabilità. Regole di derivazione. Serie di potenze in $\mathbb{C}$. Lemma di Abel. Raggio di convergenza. Dominio di convergenza accidentale. Esempi. Le serie di potenze definiscono funzioni analitiche nel disco aperto di convergenza (SD). Definizione delle funzioni e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\operatorname{senh} z$, $\cosh z$. Formule d'Eulero (D). Scrittura esponenziale dei numeri complessi $z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$. Accenno alla cinematica nel piano. Un accenno ai logaritmi nel piano complesso e alla funzione esponenziale con base ed esponente complessi.

LO SPAZIO $\mathbb{R}^n$.

Distanza in un insieme, sue proprietà. Spazi metrici. Nozioni topologiche in spazi metrici: sfere o palle o bolle aperte; intorni di un punto e loro proprietà; insiemi aperti; punti d'accumulazione e punti aderenti ad un insieme; chiusura di un insieme; insiemi chiusi. Il complementare di un aperto è chiuso; il complementare di un chiuso è aperto (D). Punti interni, esterni, di frontiera. Insiemi limitati. Insiemi compatti in $\mathbb{R}^n$. Esempi di insiemi né aperti né chiusi. Insiemi sia aperti che chiusi. In $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea punti distinti hanno intorni disgiunti (D). Proprietà delle famiglie di aperti e di chiusi: loro riunioni ed intersezioni. Palle aperte in $\mathbb{R}^n$ per diverse metriche. Applicazioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Esempi. Limiti e continuità. Continuità e limiti per una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e delle sue componenti $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Insiemi connessi per archi. Teorema degli zeri per funzioni continue da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. Insiemi connessi (in senso topologico). Teorema di connessione per funzioni continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (SD). Teorema di compattezza per funzioni continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (SD). Teorema di Weierstrass per funzioni continue da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ (SD). Spazi vettoriali sul corpo $\mathbb{R}$ dotati di norma e dotati di prodotto scalare. Disuguaglianza di Cauchy - Buniakovski - Schwarz (D). Ogni prodotto scalare induce una norma. Angolo fra due vettori. Vettori ortogonali. Teorema di Pitagora. Uguaglianza del parallelogramma. Ogni norma induce una distanza. Applicazioni lineari. Caso di $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. In particolare forme lineari. Forme lineari su $\mathbb{R}^n$. Teorema di Riesz (D, nel caso $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$). Un cenno al caso generale del teorema di Riesz. Unicità del vettore associato alla forma. Lo spazio lineare su $\mathbb{R}$ delle applicazioni lineari; in particolare, lo spazio duale $(\mathbb{R}^n)^\star$.

INTEGRALI MULTIPLI.

Intervalli o rettangoli di $\mathbb{R}^n$, in particolare di $\mathbb{R}^2$. Decomposizioni di intervalli. Loro ordine parziale. Somme inferiori e superiori per una funzione limitata su un intervallo limitato di $\mathbb{R}^2$. Integrabilità secondo Riemann e integrale di Riemann:

$$\iint_I f(x,y)\,dxdy = \int_I f\,dm \quad \text{e}$$

$$\iiint_I f(x,y,z)\,dxdydz = \int_I f\,dm \quad ,$$

con $I = [a,b]\times[c,d]$ oppure $I = [a,b]\times[c,d]\times[e,h]$. Condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità. Integrabilità delle funzioni continue (SD). Un accenno alla continuità uniforme e al Teorema di Heine (SD). Proprietà dell'integrale: monotonía; integrabilità sui sottointervalli, additività sul dominio, integrabilità del valore assoluto, del prodotto, della reciproca (tutto SD). Teorema della media (D). Formule di riduzione sui rettangoli di $\mathbb{R}^2$ (Teorema di Fubini) (D).Calcolo di alcuni integrali importanti utilizzando Fubini (e "sporchi trucchi"): $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Formule di riduzione per corde e per sezioni piane di integrali tripli (SD). Definizione dell'integrale di $f\colon E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, limitata su E limitato. Plurirettangoli. Insiemi trascurabili. Funzioni limitate, definite su un intervallo di $\mathbb{R}^n$, continue tranne che su un insieme trascurabile sono integrabili (SD). Cenno agli insiemi misurabili secondo Peano - Jordan: caratterizzazione e proprietà della misura (SD). Funzioni limitate, definite su un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$, continue tranne che su un insieme trascurabile sono integrabili (SD). Insiemi normali in $\mathbb{R}^2$. Il grafico di una funzione integrabile su $[a,b]$ è trascurabile (cenno di D). Insiemi normali rispetto all'asse x o all'asse y in $\mathbb{R}^2$ sono misurabili (D). Insiemi ammissibili in $\mathbb{R}^2$. Formula di riduzione su insiemi normali (D). Area dell'ellisse. Insiemi normali in $\mathbb{R}^3$ rispetto al piano x, y, etc. Formula di riduzione per corde. Formula di riduzione per sezioni piane. Volume dell'ellissoide. Derivate parziali. Il jacobiano di una funzione $\Phi\colon A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Cambiamento del volume di un parallelepipedo di $\mathbb{R}^3$ per una trasformazione lineare. Richiami sul cambiamento di variabile per integrali semplici. Formula del cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^m$ per integrali multipli (SD). Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$. Coordinate polari - ellittiche. Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$. Coordinate ellissoidali. Un accenno agli integrali generalizzati in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$: successioni invadenti e adatte ad una funzione. Calcolo di $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ e di $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

CALCOLO DIFFERENZIALE PER FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI.

Derivate parziali. Derivate direzionali. Esistenza di funzione che ha tutte le derivate direzionali finite in un punto x^0, ma non è continua in x^0. Differenziale di una funzione in un punto. Approssimante lineare e differenziale. Conseguenze della differenziabilità in x^0: continuità di f in x^0 (D) ed esistenza delle derivate direzionali in ogni direzione (in particolare di tutte le derivate parziali) in x^0 (D). I coefficienti della forma lineare differenziale $(df)_{x^0}(x-x^0)$ sono le derivate parziali $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$. Gradiente di una funzione: $\mathrm{grad} f(x^0) =$

$\nabla f(x^0)$ (notazione di Hamilton). Interpretazione geometrica del gradiente. Teorema del differenziale totale (D). Derivazione di funzione composta: il caso di $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, differenziabile in $x^0 \in A$, composta con $g : I \to \mathbb{R}$, derivabile in $t^0 \in I$, con $g(t^0) = x^0$. Per $F(t) = f(g(t))$, si ha $F'(t^0) = \langle (\nabla f)(x^0), g'(t^0) \rangle$ (D). Formula del valore medio. Funzione con differenziale nullo è localmente costante. Derivate successive. Teorema di Schwarz sull'inversione dell'ordine delle derivate (SD). Formula di Taylor-Lagrange per funzioni di piú variabili. Derivate successive della funzione composta $F(t) = f(x(t))$, con $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $x(t) : J(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ (Dimostrazione nei casi $n = 1$ e 2). Differenziali successivi. Se $f \in \mathcal{C}^{k+1}(A)$, il resto $r_k = (d^{k+1}f)(x(\tau))$ è infinitesimo d'ordine maggiore di k rispetto a $||x - x^0||$ (D). Differenziale di una funzione $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$. Matrice jacobiana o derivata di f. Differenziazione di funzione composta $g \circ f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, con $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to B(\subset \mathbb{R}^p)$ e $g : B(\subset \mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}^m$ (D). Le derivate parziali delle componenti di $h = g \circ f$ (D). Formula di Taylor per $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$. Resto riscritto alla Peano. Punti di max e min relativo, di sella. Teorema di Fermat (D). Forme quadratiche, matrici associate: si possono pensare simmetriche. Forme definite positive o negative, semidefinite o indefinite. Classificazione dei punti stazionari o critici. Condizioni sufficienti: se d^2f è definito positivo in x^0, il punto è di minimo relativo; se d^2f è definito negativo in x^0, il punto è di massimo relativo; se d^2f è indefinito in x^0, il punto è di sella (D). Il criterio di Jacobi-Sylvester per le forme quadratiche (SD). L'hessiano di una funzione: caso $n > 2$ e, piú in particolare, il caso $n = 2$. Cenno al Teorema di Dini in $\mathbb{R}^2$ (SD). Estremi vincolati di funzioni. Caso delle funzioni di due variabili con il vincolo dato da una curva liscia: moltiplicatori di Lagrange, nel caso di dimensione 2 (D). Moltiplicatori di Lagrange nel caso generale con k vincoli (SD).

EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

Introduzione alle equazioni differenziali: nozioni di base; esempi, tratti da vari campi d'applicazione, d'equazioni differenziali ordinarie e a derivate parziali. Teoremi d'esistenza e unicità locale e globale per il problema di Cauchy (o ai valori iniziali) (SD). Un esempio di non unicità locale ($y' = \sqrt{|y|}; y(x_0) = 0$). Un esempio di non esistenza globale ($y' = y^2; y(x_0) = y_0$). Le equazioni a variabili separabili. In particolare, questioni di unicità. Esempi. Equazioni omogenee o di Manfredi (esempi). Le equazioni differenziali lineari del prim'ordine a coefficienti continui. Esistenza globale della soluzione (D). Le soluzioni dell'omogenea sono un sottospazio vettoriale di dimensione 1 dello spazio $\mathcal{C}^1(]-\alpha, \beta[, \mathbb{R})$ (D). Soluzione dell'equazione completa (D). Struttura della soluzione generale dell'equazione completa (D). Equazioni del second'ordine del tipo $y'' = f(y)$. Equazioni di Bernoulli. Equazioni d'ordine n: il problema di Cauchy. Esistenza e unicità globale (SD). Equazioni differenziali lineari d'ordine n; applicazione lineare associata $L : \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Esistenza e unicità globale per equazioni differenziali lineari d'ordine n, a coefficienti continui. Struttura delle soluzioni della completa (D). Sistema fondamentale, Wronskiano. Il nucleo $\ker(L)$ ha dimensione n (D). Soluzione particolare della completa (Dimostrazione nel caso $n = 2$). Nucleo risolvente nel caso generale (SD). Equazioni differenziali a coefficienti costanti: sistema fondamentale delle soluzioni (SD). Termini noti di tipo particolare (SD) Un accenno ai sistemi lineari. Riduzione a un'unica equazione differenziale. Metodi astratti: definizione di e^{xA}, con A matrice $n \times n$. Caso delle matrici diagonalizzabili e delle matrici nilpotenti. Equazioni del tipo d'Eulero.

CURVE E SUPERFICIE.

Curve in $\mathbb{R}^m$, ($m = 2, 3$). Curve continue, regolari, generalmente regolari. Curve aperte e chiuse. Semplici e intrecciate. Archi di curva. Archi consecutivi. Curve equivalenti. Lunghezza di una curva. Esempi di curve non rettificabili. Proprietà della lunghezza. Integrale di Riemann come limite (SD). Principio di Duhamel (SD). Lunghezza di curve regolari e generalmente regolari (Cenno di dimostrazione). Ascissa curvilinea. Integrali di linea. Il Teorema di Jordan sulle curve continue, semplici, chiuse (SD). Formule di Gauss - Green nel piano. Dimostrazione per un dominio normale rispetto all'asse x. Applicazione al calcolo di aree. Campi vettoriali nel piano e nello spazio. Campi conservativi. Per i campi conservativi l'integrale di linea dipende solo dai punti estremi del cammino (D), e "viceversa" (Cenno di dimostrazione per campi piani). Il rotore di un campo vettoriale. Rappresentazione di superficie in forma implicita e in forma parametrica. Equazione del piano tangente a una superficie, nei due casi. Definizione di area di una superficie nello spazio. Cenno alle superficie orientabili e non. Esempio di una superficie non orientabile: il nastro di Möbius.