APPUNTI DI TOPOLOGIA INSIEMISTICA

Gino Tironi (Trieste) e Paolo Vitolo (Basilicata, Potenza)

Stesura provvisoria del 4 gennaio, 2002.

Indice

Capitolo 1

Elementi di teoria assiomatica degli insiemi.

1.1 Introduzione

In questo corso ci occuperemo di problemi di Topologia insiemistica e generale, che sono stati sviluppati in tempi recenti. Talvolta saremo condotti a occuparci di risultati che sono consistenti o indipendenti. Una certa proposizione ψ si dice consistente all'interno di una teoria T (e si scrive $Con(T+\psi)$) se non è possibile dimostrare che in T vale $\neg\psi$. Si dirà che ψ è indipendente da T se in T non si può dimostrare né ψ né $\neg\psi$. In generale tale consistenza o indipendenza sarà provata non direttamente, ma per mezzo della deduzione logica dei risultati considerati da una certa proposizione, chiamiamola ϕ, indipendente dalla teoria degli insiemi (ϕ può essere, per esempio, l'*assioma di Martin* (MA) + la negazione dell'*ipotesi del continuo* (CH) oppure l'ipotesi del continuo stessa). Allora anche le conseguenze dedotte da ϕ risulteranno essere consistenti o addirittura indipendenti dalla teoria degli insiemi (quest'ultimo fatto si verifica tipicamente se una proposizione ψ è deducibile da MA $+\neg$ CH mentre $\neg\psi$ è deducibile da CH).

Dovendo decidere sulla consistenza o indipendenza di proprietà di spazi topologici o di spazi di misura, è necessario che siano enunciati in modo formalmente preciso gli assiomi della teoria degli insiemi e che sia data una descrizione precisa del linguaggio del prim'ordine della teoria stessa; esporremo perciò anche alcuni elementi di logica formale.

Inoltre nel seguito faremo una trattazione sufficientemente precisa della teoria dei numeri ordinali e cardinali, che tanta parte ha recentemente avuto nello sviluppo della topologia insiemistica e generale, attraverso la teoria delle funzioni (o invarianti) cardinali.

1.2 Gli assiomi

Diamo di seguito una lista degli assiomi della teoria degli insiemi di Zermelo Fraenkel con l'assioma di scelta (Choice Axiom in inglese) da ora in poi detta Teoria ZFC. Questa lista servirà di riferimento. Successivamente costruiremo tutta la Matematica (almeno quella parte che ci interessa) basandoci solo sulle conseguenze logicamente tratte da questa lista. Si noti che la lista è in realtà infinita poiché contiene due *Schemi di assiomi* che forniscono un assioma per ogni formula. Vedremo che le formule del linguaggio del prim'ordine della teoria degli insiemi sono un'infinità numerabile.

Assioma 0. *Di Esistenza.*

$$\exists x(x = x) \quad .$$

Assioma 1. *Di Estensionalità.*

$$\forall x \forall y \big(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y\big) \quad .$$

Assioma 2. *Di Fondazione.*

$$\forall x \big[\exists y(y \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in x \wedge z \in y))\big] \quad .$$

Schema di Assiomi 3. *Schema di Comprensione o Isolamento.* Per ogni formula ϕ con variabili libere comprese tra $x, z, w_1, \ldots, w_n$, ma non y,

$$\forall z \forall w_1, \ldots, w_n \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi) \quad .$$

Assioma 4. *Della Coppia.*

$$\forall x \forall y \exists z(x \in z \wedge y \in z) \quad .$$

Assioma 5. *Dell'Unione.*

$$\forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x (x \in Y \land Y \in \mathcal{F} \to x \in A) \quad .$$

Schema di Assiomi 6. *Schema di Rimpiazzamento.* Per ogni formula ϕ con variabili libere comprese tra $x, y, A, w_1, \ldots, w_n$,

$$\forall A \forall w_1, \ldots, w_n \big[\forall x \in A \exists ! y \phi(x, y) \to \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \phi(x, y) \big] \quad .$$

Sulla base degli Assiomi 0, 1, 3, 4, 5, 6, come vedremo più avanti, si possono definire la relazione d'inclusione $\subset$, l'insieme vuoto $\emptyset$, la relazione di *successivo ordinale di un insieme* x, cosí definita: $S(x) = x \cup \{x\}$. Inoltre la nozione di buon ordinamento. Confortati da questo fatto e supponendo note le definizioni che saranno esplicitate nelle prossime pagine, possiamo esporre con linguaggio più semplice e intuitivo gli assiomi seguenti

Assioma 7. *Dell'Infinito.*

$$\exists x \big(\emptyset \in x \land \forall y \in x (S(y) \in x) \big) \quad .$$

Assioma 8. *Dell'Insieme Potenza.*

$$\forall x \exists y \forall z (z \subset x \to z \in y) \quad .$$

Assioma 9. *Di Scelta.*

$$\forall A \exists R (R \text{ è un buon ordine per } A) \quad .$$

ZFC è il sistema d'assiomi $0 - 9$. Talvolta potremo considerare solo parte di questi assiomi. Per esempio, ZF indica solo gli assiomi $0 - 8$; ZF - P indica gli assiomi $0 - 7$, ZFC - P indica il sistema degli assiomi $0 - 7$ più 9. ZFC$^-$, ZF$^-$, ZF$^-$ - P e simili, indica che dal sistema di assiomi elencato si intende omesso l'Assioma 2 di Fondazione. ZF$^-$ - P - Inf, indica che anche l'assioma dell'Infinito è omesso.

1.3 Un cenno alla logica formale

Poiché, almeno occasionalmente, ci occuperemo di risultati di compatibilità e indipendenza, necessariamente sono stati dati in modo esplicito gli assiomi della teoria degli insiemi. Come si vede essi sono esposti in modo formalizzato per mezzo di formule di un linguaggio del prim'ordine. Vogliamo ora precisare meglio qual è il linguaggio del prim'ordine nel quale sarà descritta la nostra teoria e che cosa precisamente intenderemo dicendo che una certa formula è una *deduzione formale* nel sistema d'assiomi scelto.

I simboli basilari del nostro linguaggio formale sono $\wedge, \neg, \exists,), (, \in, =$ e v_j, per ogni numero naturale j, per simboleggiare le variabili. Sono noti i significati intuitivi dei vari simboli: $\wedge$ significa " e ", $\exists$ " esiste ", $\in$ denota l'appartenenza, $=$ l'uguaglianza, mentre le parentesi sono ampiamente usate per chiarire il senso di ogni proposizione, togliendo possibilità d'equivoco nell'interpretazione, e $v_0, v_1, \ldots$ denotano un'infinità numerabile di variabili. Ogni sequenza finita di simboli è un'*espressione*, per esempio: $\neg\exists\neg(()\exists$. Parlando di *formule* si intendono quelle espressioni che riteniamo significative; precisamente esse sono costruite secondo le seguenti regole:

i) $v_i \in v_j$ e $v_i = v_j$ sono formule per ogni i, j; esse si dicono *formule atomiche*.

ii) Se ϕ e ψ sono formule lo sono anche $(\phi) \wedge (\psi)$, $\neg(\phi)$, e $\exists v_i(\phi)$ per ogni i.

Per esempio, la seguente è una formula: $\exists v_0(\exists v_1((v_o \in v_1) \wedge (v_1 \in v_0)))$. Formalmente non è una formula la seguente, nella quale le parentesi non sono impiegate così strettamente da evitare ogni possibile equivoco d'interpretazione: $v_0 \in v_1 \wedge \neg(v_1 \in v_0)$. Mancano nel nostro linguaggio molti altri simboli logici comunemente impiegati in matematica, quali $\forall, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Tuttavia è ben noto che essi possono essere espressi utilizzando i simboli sopra presentati; per esempio $\forall v_i(\phi)$ si può considerare come un'abbreviazione di $\neg(\exists v_i(\neg(\phi)))$ e analogamente per gli altri simboli ricordati. Inoltre spesso molte parentesi saranno omesse quando il contesto sia sufficientemente chiaro. Infine ricordiamo che $v_i \neq v_j$ è un'abbreviazione di $\neg(v_i = v_j)$ e che $v_i \notin v_j$ abbrevia $\neg(v_i \in v_j)$. Naturalmente useremo molte altre abbreviazioni oltre a quelle ricordate; principalmente useremo la lingua italiana (o comunque una lingua umana) con l'aggiunta di simboli logici e non, invece di esprimerci solo attraverso formule. Si dirà comunemente *vi sono insiemi* x, y *e* z *tali che* $x \in y$ *e* $y \in z$ invece di scrivere una formula quale

$$\exists v_0(\exists v_1(\exists v_2((v_0 \in v_1) \wedge (v_1 \in v_2)))) \quad . \tag{1}$$

L'assioma di comprensione (o isolamento) è reso preciso richiedendo che la proprietà sia espressa da una formula. Tuttavia, non sarà necessario scrivere esplicitamente la formula ogniqualvolta applicheremo l'assioma di comprensione. Basterà usare il linguaggio comune, quando sia chiaro a quale formula corrisponde il discorso fatto. Una *sottoformula* di ϕ è una sequenza consecutiva di simboli di ϕ che sia a sua volta una formula. Per esempio, la formula $\exists v_0(\exists v_1(\exists v_2(v_0 \in v_1) \wedge (v_1 \in v_2)))$, ha le seguenti sottoformule: $(v_0 \in v_1)$, $(v_1 \in v_2)$, $((v_0 \in v_1) \wedge (v_1 \in v_2))$, $\exists v_2((v_0 \in v_1) \wedge (v_1 \in v_2))$, $\exists v_1(\exists v_2((v_0 \in v_1) \wedge (v_1 \in v_2)))$, $\exists v_0(\exists v_1(\exists v_2((v_0 \in v_1) \wedge (v_1 \in v_2))))$. Il *campo d'azione di un quantificatore* (in inglese *scope*) in una sua occorrenza $\exists v_i$ è l'unica sottoformula che comincia con quel quantificatore $\exists v_i$. Per esempio, il campo d'azione di $\exists v_2$ nella formula (1) è $((v_0 \in v_1) \wedge (v_1 \in v_2))$. L'occorrenza di una variabile in una formula è detta *legata* se giace nel campo d'azione di un quantificatore che agisce su quella variabile; altrimenti l'occorrenza è detta *libera*.[1] Per esempio, nella formula (1) l'occorrenza delle tre variabili è legata; nella sottoformula $\exists v_1(\exists v_2((v_0 \in v_1) \wedge (v_1 \in v_2))$, le variabili v_1 e v_2 sono legate, v_0 è libera. Intuitivamente, una formula esprime una proprietà delle sue variabili libere, mentre le variabili legate sono usate solo per esprimere affermazioni esistenziali che potrebbere essere fatte anche usando altre variabili. Così la formula (1) ha lo stesso significato della seguente formula

$$\exists v_5(\exists v_4(\exists v_3((v_5 \in v_4) \wedge (v_4 \in v_3)))) \quad . \tag{1'}$$

Naturalmente anche il quantificatore universale $\forall v_i$ lega le sue variabili, essendo un'abbreviazione di $\neg\exists v_i \neg$.

Spesso in una discussione, presentiamo una formula e la indichiamo con $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ per mettere in evidenza la sua dipendenza dalle variabili $x_1, \ldots, x_n$. Successivamente se $y_1, \ldots, y_n$ sono altre variabili, $\phi(y_1, \ldots, y_n)$ denoterà la formula risultante dalla sostituzione di ogni occorrenza di x_i con y_i. Tale sostituzione è detta *libera* o *legittima* se e solo se nessuna occorrenza libera di un x_i è nel campo d'azione di un quantificatore $\exists y_i$. L'idea è che $\phi(y_1, \ldots, y_n)$ dovrebbe affermare intorno a $y_1, \ldots, y_n$ esattamente quanto

[1] Più precisamente l'insieme delle *variabili libere* $VL(\phi)$ in una formula ϕ è definito come segue:

(i) Se ϕ è una formula atomica $VL(\phi)$ è l'insieme delle variabili di ϕ;
(ii) $VL(\neg\phi) = VL(\phi)$;
(iii) $VL(\phi \wedge \psi) = VL(\phi \vee \psi) = VL(\phi \to \psi) = VL(\phi) \cup VL(\psi)$;
(iv) $VL(\exists v_i \phi) = VL(\forall v_i \phi) = VL(\phi) \setminus \{v_i\}$.

afferma $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ intorno a $x_1, \ldots, x_n$; ma questo potrebbe non essere più vero se qualche y_i fosse legato da un quantificatore di ϕ. In generale, assumeremo che le nostre sostituzioni siano libere. È da notare che l'uso della notazione $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ non implica che ogni x_i si presenti effettivamente libera nella formula; inoltre la formula può avere altre variabili libere che nella particolare discussione che stiamo svolgendo non vengono enfatizzate.

Sia, per esempio, $\phi(v_1, v_3)$ la formula $(\exists v_0(v_0 \in v_1)) \wedge (\exists v_1(v_2 \in v_1))$; allora $\phi(v_2, v_8)$ è la formula

$$(\exists v_0(v_0 \in v_2)) \wedge (\exists v_1(v_2 \in v_1))$$

nella quale la sostituzione di di v_1, v_3 con v_2, v_8 è libera; la $\phi(v_2, v_8)$ ha rispetto a v_2, v_8 lo stesso significato di $\phi(v_1, v_3)$ rispetto a v_1, v_3. Invece la $\phi(v_0, v_8)$ è la formula

$$(\exists v_0(v_0 \in v_0)) \wedge (\exists v_1(v_2 \in v_1))$$

nella quale il significato della formula è totalmente travisato: la sostituzione di v_2 con v_0 **non è libera**. Il significato di $\phi(v_2, v_8)$ è infatti "v_2 ha un elemento"; invece il significato di $\phi(v_0, v_8)$ è "c'è un insieme che ha sé stesso come elemento".

Una *proposizione* è una formula senza variabili libere. Intuitivamente rappresenta un'affermazione che può essere solo vera o falsa. ZFC è un certo insieme di proposizioni. Se S è un insieme di proposizioni e ϕ è una particolare proposizione allora $S \vdash \phi$ significa intuitivamente che ϕ è dimostrabile a partire da S con argomenti puramente logici, nei quali proposizioni di S si possono assumere come assiomi ma non si fa riferimento al significato usuale di $\in$. Formalmente, definiamo $S \vdash \phi$ qualora vi sia una *deduzione formale* di ϕ a partire da S. Una deduzione formale è una successione finita di formule $\phi_1, \ldots, \phi_n$ nella quale ϕ_n è ϕ e per ogni i, ϕ_i è in S o è un assioma logico o è una conseguenza per mezzo d'assegnate regole d'inferenza di $\phi_1, \ldots, \phi_{i-1}$. Nozioni quali quella d'assioma o di regola d'inferenza sono assegnate in modo puramente sintattico. Ricordiamo che, oltre agli assiomi propri di una teoria, si devono sempre supporre dati anche gli assiomi logici. Una scelta di tali assiomi è per esempio la seguente dovuta a Mendelson, nella quale i connettivi scelti come fondamentali sono $\neg$ e $\rightarrow$ e il quantificatore scelto come primitivo è quello universale:

I. $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$.

II. $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$.

III. $(\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi)$.

IV. $\forall x_i \phi(x_i) \to \phi(t)$, se t è un *termine* libero per x_i in $\phi(x_i)$.

V. $\forall x_i(\phi \to \psi) \to (\phi \to \forall x_i \psi)$ se ϕ è una formula che non contiene occorrenze libere di x_i.

Inoltre vi sono le seguenti *regole d'inferenza*

a) *Modus Ponens*: da ϕ e $\phi \to \psi$, ψ.

b) *Generalizzazione*: da ϕ, $\forall x_i \phi$.

I *termini* di una teoria sono così definiti

I) Le variabili e le costanti individuali sono termini;

II) Se f_i^n è una *lettera funzionale* e $t_1, t_2, \dots, t_n$ sono termini, allora $f_i^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ è un termine.

Qui per lettera funzionale si intende una lettera f_i^n (n indica il numero degli argomenti, i distingue le varie lettere funzionali) che sta a rappresentare operazioni sul dominio del discorso, quali per esempio, l'addizione e la moltiplicazione in un anello, la legge di composizione in un gruppo, etc. Nel caso della teoria degli insiemi, non ci sono lettere funzionali e non ci sono costanti individuali (nel seguito sarà introdotta la costante individuale $\emptyset$ per indicare l'insieme vuoto): dunque gli unici termini sono le variabili. Infine un termine t si dice *libero per x_i in ϕ* se nessuna occorrenza libera di x_i in ϕ si trova nel campo d'azione di un quantificatore $\exists x_k$, dove x_k è una variabile di t.

Se $S \vdash \phi$ e S è l'insieme vuoto di proposizioni, allora si scrive $\vdash \phi$ e si dice che ϕ è *logicamente valido*. Se $\vdash (\phi \leftrightarrow \psi)$ si dice che ϕ e ψ sono *logicamente equivalenti*.

Se ϕ è una formula, la *chiusura universale* di ϕ è una proposizione ottenuta quantificando con quantificatori universali tutte le variabili libere di ϕ. Per esempio se ϕ è la formula

$$x = y \to \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \quad ,$$

allora $\forall x \forall y \phi$ and $\forall y \forall x \phi$ sono le chiusure universali di ϕ. Tutte le chiusure universali di una formula sono logicamente equivalenti. Nel linguaggio comune quando si afferma la validità di ϕ si intende la validità della chiusura universale di ϕ. Formalmente, se S è un insieme di proposizioni e ϕ è una formula, allora scriveremo $S \vdash \phi$ per significare che la chiusura universale di ϕ è derivabile da S. Le nozioni di equivalenza logica e di validità logica possono essere estese alle formule. ϕ è logicamente valida se lo è la sua chiusura universale; ϕ e ψ sono logicamente equivalenti se lo sono le loro chiusure universali. Questo fatto ci permette di essere più precisi sul fatto che le variabili legate sono mute. Se $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ è una formula avente le sole variabili libere $x_1, \ldots, x_n$ e $\phi'(x_1, \ldots, x_n)$ deriva dalla sostituzione delle variabili legate di ϕ con altre variabili, allora ϕ e ϕ' sono logicamente equivalenti. Ciò ci consente di essere permissivi nell'uso delle lettere usate al posto dei simboli ufficiali $v_1, \ldots, v_n$. Così l'assioma di coppia può essere rappresentato da

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$$

invece del più formale

$$\forall v_i \forall v_j \exists v_k (v_i \in v_k \wedge v_j \in v_k)$$

per tre i, j, k distinti.

Possiamo anche permetterci di essere imprecisi in altre occasioni; per esempio accettando che la formula $\phi \wedge \psi \wedge \chi$ possa abbreviare sia $\phi \wedge (\psi \wedge \chi)$ che $(\phi \wedge \psi) \wedge \chi$ dal momento che le due formule sono logicamente equivalenti.

Se S è un insieme di proposizioni, S si dice *consistente* $\big(\mathrm{Con}(S)\big)$ se per nessuna formula ϕ vale $S \vdash \phi$ e anche $S \vdash \neg\phi$. Se S è inconsistente, allora $S \vdash \psi$ per ogni ψ e quindi S non ha alcun interesse. Poiché ogni teorema è una tautologia si dimostra che $S \vdash \phi$ se e solo se $S \cup \neg\phi$ è inconsistente e $S \vdash \neg\phi$ se e solo se $S \cup \phi$ è inconsistente. Dunque $\mathrm{ZFC} \nvdash \mathrm{CH}$ è equivalente a Con(ZFC + $\neg$ CH), ossia a $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} \cup \neg \mathrm{CH})$.

Intuitivamente $x = y$ significa che x e y sono lo stesso oggetto. Perciò formalmente le proprietà dell'uguaglianza sono logicamente valide e non devono essere date come assiomi di ZFC. Per esempio

$$\vdash x = y \rightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \quad ,$$

mentre la reciproca è un teorema di ZFC poiché la sua chiusura universale è un assioma (di Estensionalità).

Il fatto che le deduzioni formali da S sono oggetti finiti significa che esse possono citare solo un numero finito di proposizioni da S, anche se S è infinito. Vale perciò il seguente teorema

Teorema 1.3.1 (Di Compattezza). (a) *Se $S \vdash \phi$, esiste un sottoinsieme finito $S_0 \subset S$ tale che $S_0 \vdash \phi$.* (b) *Se S è inconsistente esiste un sottoinsieme finito $S_0 \subset S$ tale che S_0 è inconsistente.*

Ciò sarà importante poiché ZFC è un insieme infinito d'assiomi.

1.4 La filosofia della Matematica

Al fine di comprendere l'utilità o la sensatezza di dimostrazioni di consistenza o di indipendenza, può essere interessante presentare seppure in modo estremamente semplificato e quasi caricaturale i modi filosofici d'intendere la Matematica che sono maggiormente diffusi. Ci riferiamo al punto di vista **platonistico**, **finitistico** e **formalistico**.

Per un **platonista** la teoria degli insiemi è qualcosa che ha una sua esistenza al di fuori di noi. Gli assiomi della teoria sono semplicemente alcune proposizioni ovviamente vere della teoria stessa. Così è degli assiomi di ZFC. Il fatto che questi assiomi non possano né provare né confutare CH, nulla dice sulla verità di CH stesso e non preclude la possibilità che CH possa venire un giorno provato inserendo tra gli assiomi qualche principio ovviamente vero che ci siamo semplicemente dimenticati di elencare. Tuttavia un platonista dovrebbe ritenere utile la prova d'indipendenza di CH da ZFC, poiché essa gli dice che è tempo sprecato cercare di provare CH o $\neg$ CH da ZFC, a meno che non venga introdotto qualche nuovo principio insiemistico.

Per un **finitista** hanno significato solo gli oggetti finiti. Non trova giustificato considerare l'insieme dei razionali; dunque, a maggior ragione, per lui CH è una proposizione priva di senso. Naturalmente tale posizione è giustificata dal fatto che in natura noi possiamo osservare solo oggetti finiti e quindi gli oggetti infiniti sono pure finzioni dell'immaginazione dei matematici. Tuttavia questo punto di vista estremo ci costringe ad eliminare una gran parte della moderna matematica, e a complicare molto la descrizione della parte che si riesce a salvare.

Per un **formalista** la teoria degli insiemi riveste il massimo interesse. Lo sviluppo formale di ZFC ha senso da un punto di vista strettamente finitistico: gli assiomi di ZFC non significano nulla, sono solamente successioni finite di simboli. L'affermazione ZFC $\vdash \phi$ significa che vi è una successione finita di successioni finite di simboli, l'ultima essendo quella simbolizzata da ϕ; cioè una dimostrazione formale di ϕ. La suddetta affermazione ha senso perché, anche se ZFC ha infiniti assiomi, si può riconoscere in un numero finito di passi quando una particolare proposizione è un assioma di ZFC. In generale un formalista può procedere come un platonista e, se sfidato sul fatto di adoperare oggetti infiniti, può semplicemente rispondere che tutto quello che egli fa è mettere in fila una dopo l'altra successioni finite di simboli.

Dal punto di vista pedagogico è più semplice affrontare la trattazione dal punto di vista platonistico, come in generale faremo e come fa la maggior parte dei matematici. Cioè, per stabilire che ZFC $\vdash \phi$ produrremo un argomento che ϕ è vero ammesso che lo siano gli assiomi di ZFC. In generale un formalista potrà dedurre da tale argomento una prova formale di ϕ, anche se non sempre ciò sarà particolarmente facile.

Sarà spesso opportuno e talvolta importante fare una distinzione tra *teoria formale* e *metateoria*. Se si lavora in ZFC la teoria formale è ZFC. Supponiamo, per esempio, di enunciare il seguente

Teorema 1.4.1 *Esiste un'infinità non numerabile di numeri reali.*

Con ciò intendiamo affermare una proposizione del linguaggio formale all'interno di ZFC.

Invece la metateoria dice quello che è realmente vero. Per esempio

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \mathrm{CH})$$

è una tale affermazione realmente vera intorno alla teoria ZFC. La dimostrazione di tale fatto intorno alla teoria formale è ottenuta per mezzo d'una procedura costruttiva che se applicata ad una contraddizione di ZFC + CH ne produce una di ZFC.

Per un finitista il Teorema sulla cardinalità dei reali è solamente una proposizione formale in quanto si riferisce a insiemi infiniti e quindi non è realmente vero. Per un platonista entrambe le affermazioni sono fatti veri relativi al mondo reale. Tuttavia il primo teorema è anche puramente formale nel senso che esso può essere stabilito sulla base solamente di ZFC.

1.5 Che cosa intendiamo per insiemi

Presenteremo in modo informale quella che intenderemo per interpretazione usuale degli assiomi di ZFC.

Un'*interpretazione* del linguaggio della teoria degli insiemi è definita specificando un *dominio del discorso* non vuoto, nel quale si intende che corrano le variabili, e una relazione binaria su quel dominio che sia un'interpretazione della relazione d'appartenza $\in$. Se ϕ è una proposizione del linguaggio della teoria degli insiemi, in una certa interpretazione ϕ è o **vera** o **falsa**. Per esempio, il dominio del discorso potrebbe essere l'insieme degli interi $\mathbf{Z}$ e si potrebbe interpretare $x \in y$ come $x < y$. Questa sarebbe un'interpretazione legittima anche se la proposizione

$$\forall x \exists y (y \in x)$$

è vera in questa interpretazione ma è confutabile in ZFC. Naturalmente non tutti gli assiomi di ZFC sono veri nell'interpretazione detta.

Nell'interpretazione *usuale* (*"intended"* in inglese) di ZFC, nella quale tutti gli assiomi di ZFC sono supposti veri, $x \in y$ è interpretato proprio come "x è un elemento di y". È invece più difficile da descrivere il dominio del discorso. Vogliamo che la teoria degli insiemi sia fondamento di tutta la matematica; dunque tutti i concetti matematici dovranno essere catturati parlando solo di insiemi; di conseguenza le nostre variabili non dovranno variare su oggetti quali cavalli, vacche, maiali o uomini. Se V è una vacca $\{V\}$ è un insieme ma non un oggetto legittimo del nostro universo del discorso. Più in generale, poiché vogliamo parlare solamente di insiemi tutti gli elementi dei nostri insiemi dovranno essere a loro volta insiemi. Dunque gli oggetti del dominio del discorso saranno insiemi ereditari e ogni loro elemento lo sarà.

A parte l'interpretazione *usuale* ci sono quelle *ad hoc*. Esse sono la base delle dimostrazioni di consistenza. Se S è un insieme di proposizioni possiamo dimostrare la sua consistenza producendo un'interpretazione nella quale tutte le proposizioni di S sono vere. Di solito, $\in$ è ancora interpretato come appartenenza, mentre il dominio del discorso è solo una parte del dominio degli insiemi ereditari. Per esempio, l'indipendenza di CH sarà ottenuta dimostrando che esiste un'interpretazione di ZFC + CH e un'altra di ZFC + $\neg$CH, senza mai decidere se CH è o no vero nell'interpretazione usuale.

La giustificazione di questo modo di procedere per ottenere prove di consistenza sta nel **Teorema di Completezza** di Gödel (1930); se S vale in qualche interpretazione, allora S è consistente. Infatti le regole di deduzione formale (Modus Ponens e Generalizzazione) sono tali che se $S \vdash \phi$, allora ϕ deve essere vera sotto ogni interpretazione che renda vere le proposizioni di S. Se fissiamo un'interpretazione nella quale S è verificato, allora ogni proposizione falsa in quell'interpretazione non è dimostrabile da S. Poiché ϕ e $\neg\phi$ non possono valere nella stessa interpretazione, S non può provare entrambe ϕ e $\neg\phi$. Dunque S è consistente. La parte non banale del Teorema di Gödel è che se S è consistente, allora S è verificato in qualche interpretazione nella quale il dominio del discorso si può prendere **numerabile** (Teorema di Löwenheim e Skolem, 1915 e 1919); naturalmente, in quest'interpretazione, in generale, $\in$ **non** è la relazione d'appartenenza.

1.6 Estensionalità e comprensione

Iniziamo a discutere gli assiomi di ZFC

Assioma 0. *Esistenza.*

$$\exists x(x = x) \quad .$$

Questo assioma afferma che il nostro universo non è vuoto.

Assioma 1. *Estensionalità.*

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y) \quad .$$

Ciò significa che un insieme è individuato dai suoi elementi. Ricordando la discussione informale del precedente paragrafo 1.5 sull'interpretazione usuale della teoria degli insiemi, ricordiamo che le variabili x, y, z denotano insiemi ereditari. Dati insiemi ereditari x e y affermare che $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$ significa dire che x e y hanno gli stessi insiemi ereditari come elementi. Ma i soli elementi di x e y sono insiemi ereditari. Dunque x e y sono lo stesso insieme! Naturalmente è utile in molte situazioni concrete che lo stesso insieme risulti espresso in modi significativi e diversi. (Che cosa sia significativo dipende dal gusto di ogni singolo matematico e, in una stessa persona, può cambiare nel tempo).

L'assioma di Comprensione, detto anche di *Separazione*, mira a formalizzare la costruzione degli insiemi nella forma $\{x : P(x)\}$ dove $P(x)$ denota una proprietà matematica. La nozione di proprietà è resa rigorosa attraverso la nozione di formula, come è stata presentata in un paragrafo precedente.

Il modo ingenuo di presentare l'assioma sarebbe di scriverlo come segue: $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \phi)$. Tuttavia è ben noto che questa presentazione è soggetta al famoso *Paradosso di Russell* : se ϕ fosse la formula $x \notin x$ "l'assioma" darebbe, ponendo y al posto di x, $y \in y \leftrightarrow y \notin y$, che è evidentemente una contraddizione. Si noti infatti che, valendo $\forall x(x \in y \leftrightarrow x \notin x)$, nulla si oppone ad attribuire a x il particolare valore y. Questo fatto ha condotto a maggiore prudenza e a usare l'assioma di comprensione nella forma seguente

Schema di assiomi 3. *Schema di Comprensione.*

Per ogni formula ϕ che non abbia y come variabile libera, la chiusura universale di quanto segue è un assioma

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi) \quad .$$

ϕ può avere un qualsiasi numero di altre variabili libere. L'y del quale si afferma l'esistenza è unico per l'assioma di estensionalità ed è usualmente denotato con $\{x : x \in z \wedge \phi\}$, oppure $\{x \in z : \phi\}$.

L'assioma di comprensione esprime un'unica idea, ma fornisce in realtà un'infinità di assiomi. Esso è uno *schema d'assiomi*; (ad ogni formula ϕ corrisponde un assioma).

La restrizione imposta che ϕ non abbia la variabile libera y elimina la possibilità di auto riferimento nella definizione degli insiemi e permette di evitare che si presentino contraddizioni.

Se z è un insieme, allora per l'assioma di comprensione, si può formare l'insieme $\{x \in z : x \neq x\}$, che è un insieme senza elementi. Poiché per l'assioma 0 esiste qualche insieme, allora esiste anche un insieme privo di elementi; per l'estensionalità tale insieme è unico.

Definizione 1.6.1 *$\emptyset$ è l'unico insieme y tale che $\forall x(x \notin y)$.*

Si può dimostrare che non esiste un insieme universale

Teorema 1.6.1

$$\neg\exists z\forall x(x \in z) \quad .$$

DIMOSTRAZIONE: Se esistesse z tale che $\forall x(x \in z)$, allora, per Comprensione, si potrebbe formare $\{x \in z : x \notin x\} = \{x : x \notin x\}$, che darebbe luogo a contraddizione per il paradosso di Russell discusso precedentemente.□

Useremo $A \subset B$ per abbreviare $\forall x(x \in A \to x \in B)$. Allora valgono $\emptyset \subset A$ e $A \subset A$.

Usando gli assiomi 0, 1 e 3 si può provare l'esistenza del solo insieme vuoto. Infatti se il dominio del discorso consta del solo insieme vuoto e se $\in$ ha l'usuale interpretazione, gli assiomi 0, 1, 3 valgono in questa interpretazione, ma vale pure $\forall y(y = \emptyset)$, e quindi i tre assiomi detti non possono confutare la precedente affermazione. Dunque sono necessari ulteriori assiomi per costruire altri insiemi oltre a $\emptyset$.

1.7 Relazioni, funzioni, buon ordinamento

Proseguiamo nell'esposizione delle conseguenze degli assiomi della teoria degli insiemi. Gli assiomi che esamineremo di seguito sono

Assioma 4. *Della Coppia.*

$$\forall x\forall y\exists z(x \in z \land y \in z) \quad .$$

Assioma 5. *Dell'Unione.*

$$\forall \mathcal{F}\exists A\forall Y\forall x(x \in Y \land Y \in \mathcal{F} \to x \in A) \quad .$$

Schema di assiomi 6. *Schema di Rimpiazzamento.*

Per ogni formula ϕ che non contenga la variabile libera Y, la chiusura universale della seguente formula è un assioma

$$\forall x \in A\exists! y\phi(x, y) \to \exists Y\forall x \in A\exists y \in Y\phi(x, y) \quad .$$

L'assioma della coppia dice che dati gli insiemi x e y esiste un insieme z che li contiene entrambi. Usando l'assioma di estensionalità si vede poi che esiste un solo insieme che contiene esattamente x e y. È precisamente l'insieme così definito: $\{v \in z : v = x \vee v = y\}$. Questo insieme, detto anche *coppia non ordinata*, si denota solitamente con $\{x, y\}$. Il *singoletto* è l'insieme $\{x\} = \{x, x\}$. Definiamo *la coppia ordinata* $\langle x, y\rangle$ come segue: $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Questa definizione è dovuta a Kuratowski; in parte la definizione di coppia ordinata è arbitraria e quella scelta è una delle definizioni possibili. Il fatto essenziale è che la definizione scelta assicura, come è facile verificare, che

$$\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle \leftrightarrow x = x' \wedge y = y' \quad .$$

L'assioma di unione afferma che assegnata una famiglia d'insiemi $\mathcal{F}$ esiste un insieme A tale che ogni membro $Y \in \mathcal{F}$ è un sottoinsieme di A. L'unione di $\mathcal{F}$ si definisce come segue

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x \in A : \exists Y \in \mathcal{F}(x \in Y)\} \quad .$$

L'esistenza di tale insieme è giustificata dall'esistenza dell'insieme A postulata dall'Assioma 5. Quando $\mathcal{F} \neq \emptyset$ si può definire l'intersezione della famiglia $\mathcal{F}$ come segue

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x : \forall Y \in \mathcal{F}(x \in Y)\} \quad ;$$

quest'insieme esiste perché se B è un qualsiasi elemento di $\mathcal{F}$ allora esso si può rappresentare come segue

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x \in B : \forall Y \in \mathcal{F}(x \in Y)\} \quad .$$

Se $\mathcal{F} = \emptyset$ allora $\bigcup \mathcal{F} = \emptyset$ mentre $\bigcap \mathcal{F}$ "dovrebbe essere" la classe universale che nel sistema ZFC non ha diritto a un'esistenza ufficiale: cioè non è un insieme. Infine $A \cap B = \cap\{A, B\}$, $A \cup B = \cup\{A, B\}$ e $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$.

Lo schema di rimpiazzamento dà luogo a un'infinità (numerabile) di assiomi, uno per ogni formula ϕ. Il suo significato in linguaggio comune è il seguente: se $\phi(x, y)$ è una formula funzionale, cioè tale che per ogni $x \in A$ ci sia un solo y per il quale valga $\phi(x, y)$, allora esiste un insieme Y che raccoglie tutti gli y tali che esiste $x \in A$ per il quale vale $\phi(x, y)$. Questo insieme si può descrivere, grazie all'assioma di rimpiazzamento e a quello di comprensione (o di isolamento), come segue

$$\{y \in Y : \exists x \in A\phi(x, y)\} \quad .$$

Grazie agli assiomi fin qui dati si può definire il prodotto cartesiano di due insiemi

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle : x \in A \wedge y \in B\} \quad .$$

La definizione è giustificata in base alle seguenti considerazioni. Per ogni $y \in B$ si consideri la seguente formula funzionale $\phi(x, y)$ data da $z = \langle x, y\rangle$:

$$\forall x \in A \exists ! z (z = \langle x, y\rangle) \quad .$$

Si può allora formare (per rimpiazzamento) l'insieme

$$\operatorname{prod}(A, y) = \{z : \exists x \in A(z = \langle x, y\rangle)\} \quad ;$$

si consideri poi la formula funzionale $\psi(y, z)$ data da $z = \operatorname{prod}(A, y)$:

$$\forall y \in B \exists ! z \big(z = \operatorname{prod}(A, y)\big) \quad .$$

Dunque otteniamo

$$\operatorname{prod}'(A, B) = \{\operatorname{prod}(A, y) : y \in B\} \quad .$$

Infine si ha

$$A \times B = \bigcup \operatorname{prod}'(A, B) \quad .$$

Definiamo ora alcune ulteriori nozioni che possono essere sviluppate sulla base degli Assiomi 0, 1, 3, 4, 5 e 6. Una *relazione* è un insieme R che ha come elementi coppie ordinate. Si definiscono inoltre

$$\operatorname{dom}(R) = \{x : \exists y(\langle x, y\rangle \in R)\} \text{ e } \operatorname{im}(R) = \{y : \exists x(\langle x, y\rangle \in R)\} \quad .$$

Il $\operatorname{dom}(R)$ si dice il *dominio* di R, mentre $\operatorname{im}(R) = \operatorname{ran}(R)$ si dice l' *immagine* (in inglese *range*) di R. Si dice *campo di* R l'insieme $F(R) = \operatorname{dom}(R) \cup \operatorname{im}(R)$. Queste definizioni hanno senso, *a priori*, per ogni insieme R, tuttavia sono solitamente usate solo quando R è una relazione. In questo caso si ha che $R \subset \operatorname{dom}(R) \times \operatorname{im}(R)$. Si definisce infine $R^{-1} = \{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle \in R\}$, cosicché $(R^{-1})^{-1} = R$, se R è una relazione. f si dice una *funzione* se f è una relazione e inoltre

$$\forall x \in \operatorname{dom}(f) \exists ! y \in \operatorname{im}(f)(\langle x, y\rangle \in f) \quad .$$

$f : A \to B$ significa che f è una funzione, $A = \operatorname{dom}(f)$ e $\operatorname{im}(f) \subset B$. Se $f : A \to B$ e $x \in A$, $f(x)$ è l'unico y tale che $\langle x, y\rangle \in f$. Se $C \subset A$, allora $f \restriction C = f \cap (C \times B)$ è detta la *restrizione* di f a C. Con $f(C)$ o con $f''C$, quando la precedente notazione possa creare confusione, indichiamo l' $\operatorname{im}(f \restriction C) = \{f(x) : x \in C\}$.

$f : A \to B$ si dice *iniettiva* se f^{-1} è una funzione; si dice *suriettiva* se $\mathrm{im}(f) = B$; si dice *biiettiva* se è sia iniettiva che suriettiva.

Un *ordine totale* (o ordine totale *stretto*) è una coppia $\langle A, R\rangle$ tale che R ordini totalmente A in senso stretto, cioè che A sia un insieme e R una relazione su A, ossia avente campo $F(R) = A$, che soddisfi le proprietà transitiva, irriflessiva e per la quale valga la legge di tricotomia:

Transitività

$$\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \to xRz) \quad ,$$

Irriflessività

$$\forall x \in A(\neg(xRx)) \quad ,$$

Tricotomia

$$\forall x, y \in A(x = y \vee xRy \vee yRx) \quad .$$

È da ricordare che talvolta si preferisce usare una relazione d'ordine *debole* che si ottiene da una relazione d'ordine stretto R dichiarando che $x \leq y$ se $xRy \vee x = y$. Una relazione d'ordine debole soddisfa la proprietà transitiva e inoltre la proprietà *riflessiva* $\forall x \in A(x \leq x)$ e *antisimmetrica* $\forall x, y \in A(x \leq y \wedge y \leq x \to x = y)$.

Si è scritto xRy per indicare che $\langle x, y\rangle \in R$.

Si dice che R è un *buon ordinamento* per A o che $\langle A, R\rangle$ è *bene ordinato* se $\langle A, R\rangle$ è un ordine totale e ogni sottoinsieme non vuoto di A ha un elemento minimo per R. Un insieme $S \subset A$ si dice un *segmento iniziale di* A se $\forall x \forall y(y \in S \wedge xRy \to x \in S)$. Se $x \in A$ definiamo $\mathrm{pred}(A, x, R) = \{y \in A : yRx\}$. Ovviamente $\mathrm{pred}(A, x, R)$ è un segmento iniziale di A. Vale il seguente

Teorema 1.7.1 *Sia $\langle A, R\rangle$ un insieme bene ordinato. Se S è un segmento iniziale e $S \neq A$, allora esiste $x \in A$ tale che $S = \mathrm{pred}(A, x, R)$.*

DIMOSTRAZIONE: Per ipotesi $A \setminus S \neq \emptyset$. Sia $x = \min(A \setminus S)$. Se yRx allora $y \in S$; altrimenti si contraddirebbe la definizione di x come il minimo degli elementi in A ma non in S. Dunque $\mathrm{pred}(A, x, R) \subset S$. Se poi $z \in S$, non può essere né xRz né $x = z$, perché ciò implicherebbe $x \in S$; allora deve essere zRx. Cioè $S \subset \mathrm{pred}(A, x, R)$. Dunque è $S = \mathrm{pred}(A, x, R)$. □

Vale il seguente teorema fondamentale

Teorema 1.7.2 (Principio d'induzione transfinita) *Sia $\langle A, R\rangle$ un insieme bene ordinato e sia $B \subset A$ un insieme che soddisfa la seguente proprietà*

(1) $$\forall x \in A(\mathrm{pred}(A, x, R) \subset B) \to (x \in B) \quad .$$

Allora $B = A$.

Dimostrazione: Sia, per assurdo, $A \setminus B \neq \emptyset$. Allora tale insieme ha un elemento R-minimo x. Se yRx, $y \notin A \setminus B$, dunque è $y \in B$. Allora $\text{pred}(A, x, R) \subset B$ e, per la (1), deve essere $x \in B$; contro l'ipotesi che x sia il minimo di $A \setminus B$ (e quindi che $x \notin B$). □

Dati due insiemi bene ordinati $\langle A, R\rangle$ e $\langle B, S\rangle$, un'applicazione biiettiva $f\colon A \to B$ si dice un *isomorfismo* se $xRy \leftrightarrow f(x)Sf(y)$. Un'applicazione $f\colon A \to B$ si dice *crescente* se $xRy \to f(x)Sf(y)$.

Lemma 1.7.3 *Sia A un insieme bene ordinato e sia $f\colon A \to A$ un'applicazione crescente; allora è $xRf(x)$ oppure $x = f(x)$, per ogni $x \in A$.*

Dimostrazione: Sia

$$B = \{x \in A : xRf(x) \vee x = f(x)\} \quad .$$

Supponiamo che $\text{pred}(A, z, R) \subset B$ e sia $y \in \text{pred}(A, z, R) \subset B$; allora $yRf(y)$ oppure $y = f(y)$ e yRz. Allora, per la crescenza di f, è $f(y)Rf(z)$ e quindi $yRf(z)$. Ora si ha $yRf(z)$ per ogni $y \in \text{pred}(A, z, R)$, cioè yRz. Ma z è il minimo elemento per il quale ciò accade. Dunque $zRf(z)$ oppure $z = f(z)$. Cioè $z \in B$. Poiché vale (1) si ha $B = A$. □

Lemma 1.7.4 *Siano $\langle A, R\rangle$ e $\langle B, S\rangle$ due insiemi bene ordinati, isomorfi. Allora l'isomorfismo è unico.*

Dimostrazione: Siano f e g due isomorfismi da A a B. f e g sono crescenti e così sono le applicazioni $(g^{-1} \circ f)\colon A \to A$ e $(f^{-1} \circ g)\colon A \to A$. Per il lemma precedente si ha che per ogni $x \in A$ vale $xR(g^{-1} \circ f)(x) \vee x = (g^{-1} \circ f)(x)$ e anche $xR(f^{-1} \circ g)(x) \vee x = (f^{-1} \circ g)(x)$. Dunque si ha $g(x)Sf(x) \vee g(x) = f(x)$ e anche $f(x)Sg(x) \vee f(x) = g(x)$. Ma ciò implica che sia$f(x) = g(x)$ per ogni $x \in A$. □

Teorema 1.7.5 *Siano $\langle A, R\rangle$ e $\langle B, S\rangle$ due insiemi bene ordinati. allora vale una e una sola delle seguenti alternative*

(a) $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$

(b) $\exists y \in B\big(\langle A, R\rangle \cong \langle \text{pred}(B, y, S), S\rangle\big)$

(c) $\exists x \in A\big(\langle \text{pred}(A, x, R), R\rangle \cong \langle B, S\rangle\big)$.

Qui il simbolo $\cong$ indica l'isomorfismo tra i due insiemi bene ordinati.

Dimostrazione: Definiamo l'insieme

$$Z = \{z \in A : \exists y \in B\big(\text{pred}(A, z, R) \cong \text{pred}(B, y, S)\big)\} \quad .$$

Se $x \in Z$ allora esiste $f\colon \mathrm{pred}(A,x,R) \to \mathrm{pred}(B,y,S)$ per qualche $y \in B$. Verifichiamo che Z è un segmento iniziale di A. Infatti se uRx e $v = f(u)$, allora $f \restriction \mathrm{pred}(A,u,R)$ realizza un isomorfismo di $\mathrm{pred}(A,u,R)$ su $\mathrm{pred}(B,v,S)$. Dunque $u \in Z$. Essendo Z un segmento iniziale di A allora $Z = A$ oppure esiste $a \in A$ tale che $Z = \mathrm{pred}(A,a,R)$. In maniera analoga si verifica che gli elementi di B corrispondenti agli elementi di Z, cioè gli $y \in B$ tali che $\mathrm{pred}(A,z,R) \cong \mathrm{pred}(B,y,S)$, per qualche $z \in Z$, costituiscono un segmento iniziale di B. Indicheremo tali elementi con $\tilde{Z}$. Allora si ha $\tilde{Z} = B$ oppure esiste $b \in B$ tale che $\tilde{Z} = \mathrm{pred}(B,b,S)$. Ci sono dunque quattro possibili casi:

(i) $\langle A,R\rangle \cong \langle B,S\rangle$;

(ii) $\exists a \in A \mathrm{pred}(A,a,R) \cong \langle B,S\rangle$;

(iii) $\exists b \in B \langle A,R\rangle \cong \mathrm{pred}(B,b,S)$;

(iv) $\exists a \in A \exists b \in B\ \mathrm{pred}(A,a,R) \cong \mathrm{pred}(B,b,S)$.

Ma (iv) non si può verificare; infatti sarebbe $a \in Z = \mathrm{pred}(A,a,R)$ e quindi aRa, mentre la relazione di buon ordinamento è stretta, cioè irriflessiva. □

1.7.1 Insiemi transitivi

Definizione 1.7.1 *Un insieme X è detto transitivo se $\forall y \in X$ è $y \subset X$; cioè se $z \in y \in X \to z \in X$.*

Lemma 1.7.6 *Se X è transitivo allora è un modello dell'assioma di estensionalità.*

Dimostrazione: X transitivo, $x, y \in X$ e $x \neq y$ implica che $\exists a \in (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$. Ma allora $a \in X$. Dunque $x \neq y$ implica $x \cap X \neq y \cap X$. □

Il seguente lemma è di facile dimostrazione

Lemma 1.7.7 *Sia X transitivo. Allora si ha*

(a) *$y \in X$ e $y \cap X = \emptyset$ implica $y = \emptyset$.*

(b) *$a, x, y \in X$ e $a \cap X = \{x,y\}$ implica $a = \{x,y\}$.*

(c) *$a, x, y \in X$ e $a \cap X = \langle x,y\rangle$ implica $a = \langle x,y\rangle$.*

(d) *$a, x \in X$ e $a \cap X = \cup x$ implica $a = \cup x$.*

(e) *$a \in X$ e $a \cap X$ è una relazione, implica a è una relazione*

(f) *$a \in X$ e $a \cap X$ è una funzione, implica a è una funzione.*

Osserviamo che i seguenti insiemi sono transitivi: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Invece $\{\{\emptyset\}\}$ non è transitivo. Infatti $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$ e $\emptyset \in \{\emptyset\}$, ma $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$. Infine osserviamo che se x è un insieme transitivo allora $S(x) = x \cup \{x\}$ è pure transitivo. Infatti l'unico elemento di $S(x)$ che è nuovo rispetto agli elementi di x è x stesso. Ma, dalla definizione, si ha che $x \in S(x)$ e anche $x \subset S(x)$.

Lemma 1.7.8 *Un insieme X è transitivo se e solo se $(x \subset X) \to \cup x \subset X$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia X transitivo; $x \subset X$e $y \in x$ implica $y \in X$. Se $z \in y$ allora $z \in X$ per la transitività. Ma, per definizione $\cup x = \{z : \exists y(z \in y \wedge y \in x)\}$. Cioè $z \in \cup x$ implica $z \in X$. Sia poi vera l'implicazione $(x \subset X) \to \cup x \subset X$. Se $y \in X$ è $\{y\} \subset X$; perciò vale pure $\cup\{y\} \subset X$. Ma $\cup\{y\} = y$; cioè $y \subset X$. Come si vuole per potere affermare che X è transitivo. $\square$

1.8 I numeri ordinali

Definizione 1.8.1 *Un insieme α si dice un ordinale se α è un insieme transitivo ed è strettamente bene ordinato rispetto alla relazione d'appartenenza $\in$. Si dice che $\alpha < \beta$ se $\alpha \in \beta$.*

È opportuno premettere

Lemma 1.8.1 *Se A è un segmento iniziale di ordinali (rispetto a $\in$), allora A è un ordinale.*

DIMOSTRAZIONE: Per definizione, se $y \in A$ e $x \in y$ allora $x \in A$; dunque A è transitivo. Se poi $\emptyset \neq B \subset A$, sia $y \in B$; allora $\{x \in y : x \in B\}$ è un sottoinsieme di un ordinale. Se è vuoto, allora y è il minimo di B; se non è vuoto allora ha un minimo $u \in y$, che è anche il minimo di B in A. Dunque A è transitivo e bene ordinato da $\in$: è esso stesso un ordinale. $\square$

Vale allora il seguente

Teorema 1.8.2 (Teorema fondamentale).

(1) *Se x è un ordinale e $y \in x$, allora y è un ordinale e $y = \mathrm{pred}(x, y, \in)$.*

(2) *Se x e y sono ordinali e $x \cong y$, allora $x = y$.*

(3) *Se x e y sono ordinali, allora esattamente una delle seguenti alternative vale: $(x = y) \vee (x \in y) \vee (y \in x)$.*

(4) *Se x, y, z sono ordinali e $x \in y$, $y \in z$, allora $x \in z$.*

(5) *Se C è un insieme non vuoto di ordinali, allora $\exists x \in C \forall y \in C(x \in y \vee x = y)$. Cioè ogni insieme non vuoto di ordinali ha un minimo.*

Dimostrazione:
(1) Sia $y \in x$. Allora, per la transitività di x, è certamente $y \subset x$. Supponiamo $z \in y$ e $u \in z$. Poiché $z \in x$ è anche $u \in x$ e poiché $\in$ ordina totalmente x, si deve avere pure $u \in y$. Cioè y è transitivo. Come sottoinsieme di x, anche y è bene ordinato da $\in$. Perciò y è anch'esso un ordinale e tautologicamente vale $y = \{u \in x : u \in y\}$. Ossia y è l'insieme dei suoi predecessori $y = \mathrm{pred}(x, y, \in)$.

(2) Sia $x \cong y$ con x, y ordinali; allora esiste un'applicazione biiettiva $f : x \to y$ tale che $u \in v \in x \leftrightarrow f(u) \in f(v) \in y$. Sia

$$A = \{u \in x : u \neq f(u)\} \quad ;$$

Se si suppone $x \neq y$, è $A \neq \emptyset$. Certamente $0 := \emptyset \notin A$. Supposto $A \neq \emptyset$ sia $v = \min A$; $v \in x$ e $v \neq f(v)$. D'altra parte $\forall u \in v$ è $u = f(u)$. Ora $v = \{u \in v : f(u) = u\}$ è un segmento iniziale di x e di y per la definizione stessa di v. Infatti v ha tutti gli elementi in y ed è un segmento iniziale di y; perciò è un ordinale. Non può essere $v' = \{u \in v : u \in y\} \neq v = \{u \in v : u \in x\}$ perché v e v' hanno gli stessi elementi. Perciò si ha che $v \in y$. Se fosse $v \neq f(v)$ allora $v \in y$ non sarebbe immagine per f di qualche elemento di x. Contro l'ipotesi che f sia biiettiva. Perciò deve essere $x = y$.

(3) Sappiamo che due insiemi bene ordinati o sono isomorfi o uno è isomorfo ad un segmento iniziale dell'altro; cioè si ha $x = y \vee x \in y \vee y \in x$.

(4) Segue dalla transitività di z.

(5) Dato $x \in C$, se $x \cap C = \emptyset$ allora x è il minimo di C. Altrimenti $x \cap C$ ha un minimo: x'; allora $x' \cap C = \emptyset$. □

Teorema 1.8.3 *Non esiste l'insieme di tutti gli ordinali.*

$$\neg(\exists z)(\forall x)(x \text{ è un ordinale} \to x \in z) \quad .$$

Dimostrazione: Se ci fosse un tale insieme z allora esso sarebbe transitivo per il punto (1) del Teorema precedente e bene ordinato per i punti (3), (4) e (5). Cioè z stesso sarebbe un ordinale e quindi dovrebbe essere $z \in z$. Cosa che non può valere per gli ordinali (l'ordine è irriflessivo). □

Dunque la totalità degli ordinali è una **classe** propria. Essa sarà indicata nel seguito con **ON**. Il teorema precedente mette in evidenza il *paradosso di Burali–Forti.*

Teorema 1.8.4 *Se $\langle A, R\rangle$ è un insieme bene ordinato, allora vi è un unico ordinale γ tale che $\langle A, R\rangle \cong \gamma$.*

DIMOSTRAZIONE: L'unicità segue dal punto (2) del Teorema fondamentale. Per l'esistenza: sia

$$B = \{a \in A \colon \exists x \ (x \text{ è un ordinale e}) \ \langle \mathrm{pred}(A, a, R), R\rangle \cong x\} \quad .$$

Si verifica facilmente che B è un segmento iniziale di A. Inoltre, per definizione, se $\langle \mathrm{pred}(A, a, R), R\rangle \subset B$ è pure $a \in B$. Dunque $A = B$. Sia f la funzione avente dominio B e così definita: per ogni $a \in B$, $f(a)$ è l'unico ordinale x tale che $\langle \mathrm{pred}(A, a, R), R\rangle \cong x$. Sia $\gamma = f''B$. Ora γ è un segmento iniziale di ordinali e dunque un ordinale, per il lemma1.8.1. Infatti, se $x \in \gamma$ e $y \in x$, esiste un isomorfismo $f \colon \mathrm{pred}(A, a, R) \to x$; allora esiste c tale che $f(c) = y$ e $f \restriction \mathrm{pred}(A, c, R) \colon \mathrm{pred}(A, c, R) \to y$ è un isomorfismo. Dunque γ è un segmento iniziale e f è un isomorfismo da $\langle B, R\rangle$ su γ. Ma $B = A$. Infatti se $\mathrm{pred}(A, a, R) \subset B$ allora $a \in B$. Per induzione transfinita si ha la tesi. □

Si noti che la dimostrazione di questo teorema richiede l'uso dello schema di rimpiazzamento in modo essenziale per giustificare l'esistenza di f. Sia $\phi(a, x)$ la formula $\langle \mathrm{pred}(A, a, R), R\rangle \cong x$. Allora $\forall a \, \exists! x \, \phi(a, x)$ e per lo schema di rimpiazzamento e comprensione (o isolamento) si può formare $\gamma = \{x \colon \exists a \in B \, \phi(a, x)\}$ e infine (per comprensione) si definisce $f \subset B \times \gamma$.

Definizione 1.8.2 *Se $\langle A, R\rangle$ è un buon ordinamento definiamo* $\mathrm{tipo}(A, R)$ *l'unico ordinale γ tale che $\langle A, R\rangle \cong \gamma$.*

Definizione 1.8.3 *Se X è un insieme di ordinali, diciamo* $\sup(X) = \cup X$ *e, se $X \neq \emptyset$,* $\min(X) = \cap X$.

La definizione è gistificata dal seguente risultato

Lemma 1.8.5 *Valgono le seguenti proposizioni*

(1) $\forall \alpha, \beta$ *(ordinali)* $\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \subset \beta$

(2) *Se X è un insieme d'ordinali* $\sup(X)$ *è il minimo ordinale $\geq$ di tutti gli elementi di X e se $X \neq \emptyset$ $\cap X$ è il minimo di X.*

DIMOSTRAZIONE:

Per (1): $\alpha \leq \beta$ significa $\alpha \in \beta$ oppure $\alpha = \beta$. Ciò significa, per definizione, $\alpha \subset \beta$. Se $\alpha \subset \beta$, allora $\forall \gamma \in \alpha$ è pure $\gamma \in \beta$. Se è $\alpha \neq \beta$ non può essere $\beta \in \alpha$ (che implicherebbe $\beta \subset \alpha$ e quindi $\beta = \alpha$). Dunque è $\alpha \in \beta$. In particolare, $\emptyset \subset \alpha$ per ogni ordinale α. Dunque $0 \leq \alpha$.

Per (2): $\sup X = \cup X$ è un segmento iniziale di ordinali. Infatti sia $\alpha \in \cup X$; allora $\alpha \in \beta$ per qualche $\beta \in X$; se $\gamma \in \alpha \in \beta$ allora $\gamma \in \beta \in X$ e dunque $\gamma \in \cup X$. Allora $\sup X = \cup X$ è un ordinale. Se $\beta \in X$ è $\beta \subset \cup X$ e quindi $\beta \leq \sup X$. Se poi $\beta \leq \gamma$ per ogni $\beta \in X$ allora $(\forall \beta \in X)\beta \subset \gamma$ e dunque $\cup X \subset \gamma$. Sia poi $X \neq \emptyset$ e consideriamo $\cap X = \{\gamma : \forall \beta \in X(\gamma \in \beta)\}$; si vede agevolmente che questo insieme è un segmento iniziale di ordinali e quindi un ordinale: non può essere $\beta \in \cap X$ per qualche $\beta \in X$ perché allora sarebbe in particolare $\beta \in \beta$. Perciò è $\cap X \in \beta \in X$ oppure $\cap X = \beta \in X$; ossia $\cap X \leq \beta$ per ogni $\beta \in X$. Inoltre $\cap X \in X$. Infatti sia $\beta_0 \in X$. Se $X \cap \beta_0 = \emptyset$ allora β_0 sarebbe il minimo di X. Altrimenti $X \cap \beta_0 \neq \emptyset$. Dunque $X \cap \beta_0$ ha un minimo $\beta^\star$. Vale $\beta^\star \subset \beta, \forall \beta \in X$; dunque $\beta^\star \subset \cap X$. Ma $\beta^\star \in X$ e quindi $\beta^\star \supset \cap X$, cioè $\beta^\star = \cap X$. □

Ricordiamo infine la definizione di *successivo di un ordinale.*

Definizione 1.8.4 $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Lemma 1.8.6 *Se α è un ordinale, $S(\alpha)$ è un ordinale, $\alpha < S(\alpha)$ e $\forall \beta$ $(\beta < S(\alpha) \leftrightarrow \beta \leq \alpha)$.*

Dimostrazione: Se α è un ordinale anche $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ è transitivo e bene ordinato per $\in$. Dunque $S(\alpha)$ è un ordinale. Ovviamente si ha $\alpha \in S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$, cioè $\alpha < S(\alpha)$. Infine, se $\beta \in S(\alpha)$ allora $\beta \in \alpha$ oppure $\beta = \alpha$ e viceversa. □

1.8.1 I numeri naturali.

Mostreremo che i primi numeri ordinali sono i numeri naturali.

Definizione 1.8.5 [Definizione dei numeri naturali alla von Neumann]. $0 := \emptyset$*;* $1 := S(0) = \{\emptyset\}$*;* $2 := S(1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$*;* $3 := S(2) = \ldots$*; ecc.. . .*

Definizione 1.8.6 *α si dice un ordinale* successore *se esiste β tale che $\alpha = S(\beta)$. α è un ordinale* limite *se $\alpha \neq 0$ e non è un successore.*

Definizione 1.8.7 *Un ordinale α si dice un* numero naturale *se $\forall \beta \leq \alpha$ ($\beta = 0$ oppure β è un ordinale successore).*

In base agli assiomi fin qui considerati possiamo dimostrare che esistono molti numeri naturali, ma **non** un insieme contenente **tutti** i numeri naturali. È necessario dunque introdurre il seguente

Assioma 7. *Dell'Infinito.*

$$\exists x(0 \in x \wedge \forall y \in x(S(y) \in x)) \quad .$$

Se x soddisfa l'Assioma dell'Infinito, allora *per induzione* contiene tutti i numeri naturali. Precisamente: per assurdo si supponga che esista un numero naturale $n \notin x$. È certamente $n \neq 0$, dunque $n = S(m)$ per qualche m. Allora $m < n$ e $m \notin x$, per la definizione di x. Abbiamo perciò $n \backslash x \neq \emptyset$. Sia n' il minimo di $n \backslash x$. Per l'osservazione precedente $n' = S(m')$ e $m' \notin x$, contro la definizione di n'. Allora per l'Assioma di comprensione o isolamento esiste l'insieme di tutti i numeri naturali. Precisamente

$$\omega = \{n \in x \colon n \text{ è un numero naturale}\} \quad .$$

Qui x è l'insieme infinito l'esistenza del quale è assicurata dall'Assioma 7.

Definizione 1.8.8 *ω si dice l'insieme dei numeri naturali.*

ω è un segmento iniziale di ordinali; dunque è un ordinale. Esso è tale che tutti gli ordinali minori sono o 0 o ordinali successori. Perciò ω è un ordinale limite (altrimenti sarebbe un numero naturale e si avrebbe $\omega \in \omega$ che non vale). Dunque ω è il **minimo ordinale limite**.

È importante osservare che i numeri naturali soddisfano i seguenti Postulati di Peano.

Teorema 1.8.7 [Postulati di Peano] *ω soddisfa le seguenti proprietà*

(1) $0 \in \omega$;

(2) $\forall n \in \omega (S(n) \in \omega)$;

(3) $\forall n, m \in \omega (n \neq m \to S(n) \neq S(m))$;

(4) [Principio d'induzione] $\forall x \subset \omega [(0 \in x \wedge \forall n \in x (S(n) \in x)) \to x = \omega]$.

Dimostrazione: (1) e (2) seguono immediatamente dalla definizione di ω. Per (3) si può ragionare come segue: se $n \neq m$ sarà, per esempio, $n < m$ e quindi $n \cup \{n\} \subset m$. Allora per $S(n) = n \cup \{n\}$ si ha $S(n) \subset m \in S(m)$ cioè $S(n) < S(m)$. Dunque $n \neq m \to S(n) \neq S(m)$. (4) Sia $x \neq \omega$ e sia $\gamma = \min(\omega \setminus x)$. Allora, per la definizione di x deve essere $\gamma \neq S(\alpha)$ per ogni $\alpha < \gamma$. Ossia γ dovrebbe essere un ordinale limite. Ma ω è il minimo ordinale limite. Dunque dovrebbe essere $\gamma \in \omega$ e anche $\omega \in \gamma$ o $\gamma = \omega$: contraddizione. $\square$

Osservazione. Dopo aver definito i numeri naturali, si possono definire a partire da essi gli interi, i razionali e (avendo introdotto anche l'Assioma dell'Insieme Potenza) i reali e i complessi; quindi sostanzialmente tutta la matematica usuale. È in questo senso che si può affermare che tutta la Matematica è costruibile avendo come fondamento la Teoria degli Insiemi.

1.8.2 L'Aritmetica Ordinale.

Abbiamo già incontrato il principio d'induzione transfinita per gli insiemi bene ordinati. Conviene considerarne ora una versione insiemistica che varrà per i numeri ordinali. Sia α un numero ordinale e ϕ una formula. Se

$$\big(\forall\gamma < \beta\, \phi(\gamma)\big) \to \phi(\beta)$$

$$\text{allora } \ \forall\beta < \alpha\ \phi(\beta) \quad .$$

Oltre alla versione insiemistica si può considerare quella per la classe degli ordinali: se ϕ è una formula e per ogni ordinale β

$$\big(\forall\gamma < \beta\ \phi(\gamma)\big) \to \phi(\beta)$$

allora

$$\phi(\beta) \text{ vale per ogni ordinale.}$$

Avendo richiamato queste due versioni del principio d'induzione transfinita possiamo ora dare le seguenti

Definizione 1.8.9 *Per ogni coppia d'ordinali α e β si definisce*

> $\alpha + 0 = \alpha$,
>
> $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$,
>
> $\alpha + \beta = \cup_{\gamma<\beta}(\alpha + \gamma) = \sup\{\alpha + \gamma \colon \gamma < \beta\}$, *se β è un ordinale limite .*

Qui $\beta + 1$ indica il successore di β.

Definizione 1.8.10 *Per ogni coppia d'ordinali α e β si definisce*

> $\alpha \cdot 0 = 0$,
>
> $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$,
>
> $\alpha \cdot \beta = \cup_{\gamma<\beta}(\alpha \cdot \gamma) = \sup\{\alpha \cdot \gamma \colon \gamma < \beta\}$, *se β è un ordinale limite.*

Infine

Definizione 1.8.11 *Per ogni coppia d'ordinali α e β si definisce*

> $\alpha^0 = 1$,
>
> $\alpha^{(\beta+1)} = \alpha^\beta \cdot \alpha$,
>
> $\alpha^\beta = \cup_{\gamma<\beta}\alpha^\gamma = \sup\{\alpha^\gamma \colon \gamma < \beta\}$, *se β è un ordinale limite .*

L'addizione e la moltiplicazione ordinali **non** sono commutative. Infatti

$$2 + \omega = \sup\{2 + n : n < \omega\} = \omega < \omega + 1 < \omega + 2 \quad ;$$

$$2 \cdot \omega = \sup\{2 \cdot n : n < \omega\} = \omega < \omega + 1 < \omega + \omega = \omega \cdot 2 \quad .$$

Per l'esponenziazione ordinale si ha

$$2^\omega = \sup\{2^n : n < \omega\} = \omega \quad .$$

(Si noti che per l'esponenziazione cardinale, che definiremo in seguito, vale $2^\omega > \omega$). Valgono le seguenti proprietà:

Teorema 1.8.8 [Associatività e distributività]. *Se α, β, γ sono ordinali arbitrari*

(a) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

(b) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

(c) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

DIMOSTRAZIONE: (a) Si supponga che la proprietà valga per ogni α e β e per ogni $\delta < \gamma$.

CASO 1. Sia $\gamma = \delta + 1$

$$(\alpha+\beta)+\gamma = (\alpha+\beta)+(\delta+1) = [(\alpha+\beta)+\delta]+1 \text{ (per definizione di somma) } =$$

$$= [\alpha + (\beta + \delta)] + 1 \text{ (ipotesi induttiva) } = \alpha + [(\beta + \delta) + 1] \text{ (definizione) } =$$

$$= \alpha + [\beta + (\delta + 1)] \text{ (definizione) } = \alpha + (\beta + \gamma).$$

CASO 2. Sia γ limite. Conviene osservare preliminarmente che si ha $\sup\{\alpha + \gamma : \gamma \in A\} = \alpha + \sup\{\gamma : \gamma \in A\}$.

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \sup\{(\alpha + \beta) + \delta : \delta < \gamma\} \text{ (per definizione)}$$

$$= \sup\{\alpha + (\beta + \delta) : \delta < \gamma\} \text{ (per l'ipotesi induttiva)}$$

$$= \alpha + \sup\{(\beta + \delta) : \delta < \gamma\} \text{ (osservazione)}$$

$$= \alpha + (\beta + \gamma) \quad .$$

etc. □

Si osservi che la DISTRIBUTIVITÀ DESTRA **non** vale nell'aritmetica ordinale; infatti

$$\omega \cdot (\omega + 1) = \omega \cdot \omega + \omega > \omega \cdot \omega = \sup\{\omega \cdot n + 1 : n \in \omega\} = (\omega + 1) \cdot \omega \quad .$$

Si può osservare che

$$\omega\cdot\omega \leq (\omega+1)\cdot\omega = \sup\{(\omega+1)\cdot n \colon n\in\omega\} = \sup\{\omega\cdot n+1\colon n\in\omega\} \leq \omega\cdot\omega\,;$$

infatti $\omega\cdot n+1 < \omega\cdot\omega$ per ogni $n\in\omega$.

Osservazione. Il tipo d'ordine di $\alpha+\beta$ è il tipo d'ordine dell'insieme ordinato $<(\alpha\times\{0\})\cup(\beta\times\{1\}), R>$ dove R è così definito:

$$R = \{\big\langle\langle\xi,0\rangle,\langle\eta,0\rangle\big\rangle\colon \xi<\eta<\alpha\}\cup\{\big\langle\langle\xi,1\rangle,\langle\eta,1\rangle\big\rangle\colon \xi<\eta<\beta\}\cup$$
$$\cup\big[(\alpha\times\{0\})\times(\beta\times\{1\})\big] \quad .$$

$\alpha\cdot\beta$ è il tipo d'ordine di $\langle\beta\times\alpha, R\rangle$ dove R è l'ordine lessicografico

$$R = \{\big\langle\langle\xi,\eta\rangle,\langle\xi',\eta'\rangle\big\rangle\colon (\xi<\xi')\vee(\xi=\xi'\wedge\eta<\eta')\} \quad .$$

Lemma 1.8.9
(a) Se α_1, α_2 e β sono ordinali, allora $\alpha_1<\alpha_2$ se e solo se $\beta+\alpha_1<\beta+\alpha_2$.
(b) Per quali si vogliano ordinali α_1, α_2, β, vale $\beta+\alpha_1=\beta+\alpha_2$ se e solo se $\alpha_1=\alpha_2$.

DIMOSTRAZIONE:
(a) Usiamo l'induzione transfinita su α_2 per dimostrare che $\alpha_1<\alpha_2$ implica $\beta+\alpha_1<\beta+\alpha_2$. Si assuma che $\alpha_2>\alpha_1$ e che se $\alpha_1<\delta$, allora vale $\beta+\alpha_1<\beta+\delta$, per ogni $\delta<\alpha_2$. Se $\alpha_2=\delta+1$, cioè è un ordinale successore, avremo $\delta\geq\alpha_1$. Se $\delta>\alpha_1$ per l'ipotesi induttiva e se $\delta=\alpha_1$, banalmente, si trova il risultato $\beta+\alpha_1\leq\beta+\delta<(\beta+\delta)+1=\beta+(\delta+1)=\beta+\alpha_2$. Se α_2 è un ordinale limite, allora $\alpha_1+1<\alpha_2$ e $\beta+\alpha_1<(\beta+\alpha_1)+1=\beta+(\alpha_1+1)\leq\sup\{\beta+\delta\colon\delta<\alpha_2\}=\beta+\alpha_2$. Vale anche il viceversa. Assumiamo che sia $\beta+\alpha_1<\beta+\alpha_2$. Il supporre $\alpha_2<\alpha_1$ implicherebbe $\beta+\alpha_2<\beta+\alpha_1$, mentre $\alpha_1=\alpha_2$ implicherebbe $\beta+\alpha_1=\beta+\alpha_2$. In ogni caso una contraddizione rispetto alla nostra ipotesi.
(b) Segue immediatamente dal risultato (a). Se $\alpha_1\neq\alpha_2$, allora o è $\alpha_1<\alpha_2$ o è $\alpha_2<\alpha_1$. In ogni caso, per (a), si trova $\beta+\alpha_1\neq\beta+\alpha_2$. L'unica possibilità per avere $\beta+\alpha_1=\beta+\alpha_2$ è che sia $\alpha_1=\alpha_2$. □

Lemma 1.8.10 *Se $\alpha\leq\beta$ esiste un unico ordinale ξ tale che $\alpha+\xi=\beta$.*

DIMOSTRAZIONE: Se $\alpha\leq\beta$, allora α è un segmento iniziale di β o eventualmente coincide con quest'ultimo ordinale. Allora $\beta=\alpha+\xi$, dove ξ è il tipo d'ordine di$\beta\setminus\alpha=\{\nu\colon\alpha\leq\nu\beta\}$. L'unicità di ξ segue dal precedente lemma 1.8.9, parte (b). □

Si noti che vale la cancellazione a sinistra, ma non a destra: $2<3$, ma $2+\omega=3+\omega=\omega$. Dunque l'addendo comune a destra ω non si può cancellare inducendo l'uguaglianza degli addendi a sinistra.

Definizione 1.8.12 *Sono utili le seguenti definizioni*

(a) A^n *è l'insieme delle funzioni da* $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ *ad* A*;*

(b) $A^{<\omega} = \bigcup\{A^n : n \in \omega\}$.

Si noti che, in base alla definizione data A^2 e $A \times A$ non sono la stessa cosa; A^2 è l'insieme delle funzioni da $\{0, 1\}$ ad A, mentre $A \times A$ è l'insieme delle coppie ordinate $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Naturalmente vi è una corrispondenza biunivoca tra le due nozioni. Non è del tutto banale provare che la definizione precedente sia sensata senza fare uso dell'assioma di potenza. Ci si può arrivare introducendo la seguente formula $\phi(n, y)$ che afferma

$$\forall s\,(s \in y \leftrightarrow s \text{ è una funzione da } n \text{ ad } A) \quad .$$

Si può dimostrare per induzione su n che

$$\forall n \exists y \phi(n, y) \quad .$$

Converrà identificare A^0 con $\{\emptyset\}$; A^1 con A e A^2 con $A \times A$. Noto che sia A^n, potremo identificare $A^{(n+1)}$ con $A^n \times A$. Allora quella data è una formula funzionale: $\forall n \exists! y \phi(n, y)$. Dunque, per ogni $n \in \omega$ A^n è l'unico y che soddisfa $\phi(n, y)$. Quanto detto giustifica anche l'esistenza dell'insieme $A^{<\omega}$.

Un'applicazione da n ad A si può dire anche successione di lunghezza n. In generale, se s è una funzione e dom(s) $= \alpha$, con α un numero ordinale, diremo che s è una successione di *lunghezza* α. Se dom(t) $= \beta$, potremo *concatenare* le due successioni s e t in modo da ottenere la successione $s\widehat{\ }t$ di lunghezza $\alpha + \beta$, così definita: $s\widehat{\ }t \restriction \alpha = s$; $s\widehat{\ }t(\alpha + \xi) = t(\xi)$, $\forall \xi \in \beta$.

1.8.3 La forma normale

Lemma 1.8.11
(a) Se $0 < \alpha \leq \gamma$ *vi è un massimo ordinale* β *tale che* $\alpha \cdot \beta \leq \gamma$.
(b) Se $1 < \alpha \leq \gamma$ *vi è un massimo ordinale* β *tale che* $\alpha^\beta \leq \gamma$.

Dimostrazione: (a) Poiché $\alpha \cdot (\gamma + 1) \geq \gamma + 1 > \gamma$ esiste un ordinale δ tale che $\alpha \cdot \delta > \gamma$. Il minimo di questi ordinali δ è necessariamente un ordinale successore. Infatti se δ fosse un ordinale limite, allora $\alpha \cdot \delta = \sup\{\alpha \cdot \lambda : \lambda < \delta\}$. Poiché, per definizione, $\alpha \cdot \lambda \leq \gamma$ per ogni $\lambda < \delta$, avremmo anche $\alpha \cdot \delta \leq \gamma$, contro l'ipotesi. Dunque $\delta = \beta + 1$ e quindi β è il massimo ordinale tale che $\alpha \cdot \beta \leq \gamma$. (b) Una considerazione assolutamente analoga fa vedere che esiste un massimo ordinale β tale che $\alpha^\beta \leq \gamma$, se $1 < \alpha \leq \gamma$. $\square$

Teorema 1.8.12 *Se γ è un ordinale arbitrario e $\alpha \neq 0$, esistono un unico ordinale β e un unico ordinale $\rho < \alpha$ tali che $\gamma = \alpha \cdot \beta + \rho$.*

Dimostrazione: Sia β il massimo ordinale tale che $\alpha \cdot \beta \leq \gamma$. Questo ordinale esiste per il precdente lemma 1.8.11. (Se $\alpha > \gamma$ è sufficiente prendere $\beta = 0$). In base al lemma 1.8.10, vi è un unico ρ tale che $\alpha \cdot \beta + \rho = \gamma$. L'ordinale ρ è minore di α perché altrimenti avremmo $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha \leq \alpha \cdot \beta + \rho = \gamma$ contro la massimalità di β. Per provare l'unicità, supponiamo che sia $\gamma = \alpha \cdot \beta_1 + \rho_1 = \alpha \cdot \beta_2 + \rho_2$, con ρ_1 e $\rho_2 < \alpha$. Si supponga che $\beta_1 < \beta_2$. Allora $\beta_1 + 1 \leq \beta_2$ e quindi $\alpha \cdot \beta_1 + (\alpha + \rho_2) = \alpha \cdot (\beta_1 + 1) + \rho_2 \leq \alpha \cdot \beta_2 + \rho_2 = \alpha \cdot \beta_1 + \rho_1$. Di qui si trae $\rho_1 \geq \alpha + \rho_2 \geq \alpha$, che è una contraddizione. Allora è $\beta_1 = \beta_2$. Vale poi $\rho_1 = \rho_2$ per il lemma 1.8.9, punto (b). $\square$

Vale ora il seguente

Teorema 1.8.13 [Forma normale dei numeri ordinali]. *Ogni ordinale $\alpha > 0$ può essere rappresentato in maniera unica come*

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \ldots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n \tag{1.1}$$

con $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_n$ e $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \omega \setminus \{0\}$, cioè numeri naturali > 0.

Dimostrazione: Proviamo l'esistenza della forma normale ragionando per induzione transfinita su α. Se $\alpha = 1$, allora l'asserto vale: $1 = \omega^0 \cdot 1$. Sia ora $\alpha > 0$ un ordinale arbitrario e supponiamo che l'esistenza della forma normale sia stata stabilita per ogni ordinale $\gamma < \alpha$. Per il lemma 1.8.11, esiste un massimo ordinale β tale che $\omega^\beta \leq \alpha$. Se $\alpha < \omega$, prendiamo $\beta = 0$. Poichè $\omega^\beta \leq \alpha$ esistono, per l'algoritmo di divisione dato dal teorema 1.8.12, $\delta > 0$ e $\rho < \omega^\beta$ tali che $\alpha = \omega^\beta \cdot \delta + \rho$. Ora δ deve essere un numero naturale. Infatti, se fosse $\delta \geq \omega$, avremmo $\alpha \geq \omega^\beta \cdot \delta \geq \omega^\beta \cdot \omega = \omega^{\beta+1}$, contro la massimalità di β. Abbiamo dunque $\beta_1 = \beta$ e $k_1 = \delta$. Se $\rho = 0$, la forma normale è trovata. Se $\rho > 0$, essendo $\rho < \alpha$, per l'ipotesi induttiva, vale

$$\rho = \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \ldots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n \,,$$

con $\beta_2 > \ldots > \beta_n$ e $k_2, \ldots, k_n \in \omega \setminus \{0\}$. Poiché $\rho < \omega^{\beta_1}$ deve inoltre essere $\beta_1 > \beta_2$. Dunque, finalmente

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \ldots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n \,.$$

Proviamo ora l'unicità. Osserviamo che, se $k \in \omega \setminus \{0\}$ e $\beta < \gamma$, allora $\omega^\beta \cdot k < \omega^\gamma$. Infatti $\omega^\beta \cdot k < \omega^\beta \cdot \omega = \omega^{\beta+1} \leq \omega^\gamma$. Ne segue che se α è in forma normale e $\gamma > \beta_1$, allora $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \ldots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n < \omega^\gamma$. Procediamo ora, ancora per induzione transfinita. Se $\alpha = 1$, lo sviluppo $1 = \omega^0 \cdot 1$ è chiaramente unico. Sia ora $\alpha > 1$ e supponiamo che lo sviluppo sia unico per tutti gli ordinali minori. Ammettiamo che sia

$$\omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \ldots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n = \omega^{\gamma_1} \cdot \ell_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot \ell_2 + \ldots + \omega^{\gamma_m} \cdot \ell_m \,,$$

con $\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_m$ e $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m \in \omega \setminus \{0\}$. Per l'osservazione fatta or ora, deve essere $\beta_1 = \gamma_1$. Se poniamo $\delta = \omega^{\beta_1} = \omega^{\gamma_1}$ e $\rho = \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \ldots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$, $\sigma = \omega^{\gamma_2} \cdot \ell_2 + \ldots + \omega^{\gamma_m} \cdot \ell_m$, allora abbiamo

$$\alpha = \delta \cdot k_1 + \rho = \delta \cdot \ell_1 + \sigma$$

e, per l'unicità della divisione, $k_1 = \ell_1$ e $\rho = \sigma$. Segue dall'ipotesi induttiva che le due rappresentazioni di α in forma normale sono uguali. $\square$

1.8.4 Successioni di Goodstein

Applicheremo la forma normale per dimostrare un risultato piuttosto sorprendente. Dato un numero naturale arbitrario $m > 0$ e un numero naturale $a \geq 2$, sappiamo che esso può essere univocamente rappresentato (in base a) come una somma di potenze

$$m = a^{b_1} \cdot k_1 + a^{b_2} \cdot k_2 + \ldots + a^{b_n} \cdot k_n \,,$$

con $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$ e $k_1, k_2, \ldots, k_n \in a \setminus \{0\}$. Si assegni ora un numero $m = g_0$, $m > 0$, e lo si rappresenti in base 2.

$$g_0 = 2^{b_1} \cdot k_1 + 2^{b_2} \cdot k_2 + \ldots + 2^{b_n} \cdot k_n \,.$$

Per ottenere g_1 da g_0, si passa alla base 3 e si sottrae 1.

$$g_1 = 3^{b_1} \cdot k_1 + 3^{b_2} \cdot k_2 + \ldots + 3^{b_n} \cdot k_n - 1 \,.$$

In generale, si ottiene g_{k+1} da g_k come segue: sia g_k rappresentato in base $(k+2)$; si passi alla base $(k+3)$, senza alterare gli esponenti, e si sottragga 1. Quello ottenuto è il termine g_{k+1}. La successione $g_0, g_1, \ldots, g_k, \ldots$ così ottenuta si dice una *successione debole di Goodstein*.

Se, per esempio, $g_0 = 18 = 2^4 + 2^1$, si trova successivamente

$$\begin{aligned} g_0 &= 2^4 + 2^1 = 18 \\ g_1 &= 3^4 + 3^1 - 1 = 81 + 2 = 83 \\ g_2 &= 4^4 + 2 - 1 = 256 + 1 = 257 \\ g_3 &= 5^4 + 1 - 1 = 625 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl} g_4 & = & 6^4 - 1 = 1295 = 6^3 \cdot 5 + 6^2 \cdot 5 + 6 \cdot 5 + 5 \\ g_5 & = & 7^3 \cdot 5 + 7^2 \cdot 5 + 7 \cdot 5 + 5 - 1 = 1959 \\ g_6 & = & 8^3 \cdot 5 + 8^2 \cdot 5 + 8 \cdot 5 + 4 - 1 = 2923 \\ \dots & & \dots \end{array}$$

I primi termini di questa successione si presentano crescenti:
$18, 83, 257, 625, 1295, 1959, 2923, \ldots$. Diremo che una successione debole di Goodstein finisce al passo $n > 0$, se $g_n = 0$. Vale il seguente

Teorema 1.8.14 [Goodstein, 1944]. *Per ogni $m > 0$ esiste un numero naturale $n > 0$ tale che la successione debole di Goodstein che inizia con $g_0 = m$ finisce al passo n, con $g_n = 0$.*

Dimostrazione: Sia $m > 0$ e $g_0, g_1, \ldots$ una successione debole di Goodstein che inizia con $g_0 = m$. Consideriamo il suo i-esimo termine

$$g_i = (i+2)^{b_1} \cdot k_1 + (i+2)^{b_2} \cdot k_2 + \ldots + (i+2)^{b_r} \cdot k_r \,.$$

In corrispondenza con g_i consideriamo il numero ordinale transfinito, scritto in forma normale

$$\alpha_i = \omega^{b_1} \cdot k_1 + \omega^{b_2} \cdot k_2 + \ldots + \omega^{b_r} \cdot k_r \,.$$

Osserviamo che è, correttamente, $b_1 > b_2 > \ldots > b_r$ e $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \omega \setminus \{0\}$. Ora è immediato riconoscere che $\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_i > \ldots$. Si tratta di una successione decrescente di ordinali che è necessariamente finita (si veda, più avanti, il teorema 1.16.2). Esiste perciò qualche n tale che $\alpha_n = 0$. Ma, ovviamente, vale $0 \leq g_i \leq \alpha_i$ e perciò, necessariamente, $g_n = 0$. $\Box$

Si osservi che possono esistere ordinali α tali che $\alpha = \omega^\alpha$. Infatti, si consideri la successione crescente $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots$. Si definisce

$$\epsilon = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots\} \quad .$$

Allora vale $\epsilon = \omega^\epsilon$.

Possiamo dare una versione più forte del precedente teorema. Diremo che un numero naturale $m > 0$ è *rappresentato in pura base a* se esso è non solo rappresentato in base a, ma lo sono pure gli esponenti, e gli esponenti degli esponenti,...

Per esempio, in pura base 2, avremo $18 = 2^4 + 2^1 = 2^{2^2} + 2^{2^0}$. Dato un intero $m > 0$ si ponga $G_0 = m$, essendo G_0 scritto in pura base 2. Si poi G_1 il numero che si ottiene da G_0 scritto in pura base 2, sostituendo il 2 della base con il 3 e sottraendo 1. In generale, se G_k è il k-esimo numero scritto in pura base $(k+2)$, G_{k+1} è il numero che si ottiene da G_k sostituendo la base $(k+2)$ con $(k+3)$ e sottraendo 1. La successione così ottenuta si dice una *successione (forte) di Goodstein*, con punto base $G_0 = m$. Diremo che $G_0, G_1, \ldots, G_k, \ldots$ termina al passo n se $G_n = 0$. Consideriamo alcuni termini della successione forte con punto base $G_0 = 18$.

$$
\begin{array}{lcl}
G_0 & = & 2^{2^2} + 2^{2^0} = 18 \\
G_1 & = & 3^{3^3} + 3^{3^0} - 1 = 3^{3^3} + 2 = 7,625597 \cdot 10^{12} \\
G_2 & = & 4^{4^4} + 2 - 1 = 4^{256} + 1 = 1,34078 \cdot 10^{154} \\
G_3 & = & 5^{5^5} + 1 - 1 = 5^{3125} = 1,91101 \cdot 10^{2184} \\
\ldots & & \ldots
\end{array}
$$

Come si vede la corrispondente successione forte cresce, inizialmente, in maniera molto più decisa della successione debole che ha lo stesso punto iniziale. Tuttavia vale

Teorema 1.8.15 [Goodstein, 1944; Kirby e Paris, 1982]. *Per ogni $m > 0$ la successione (forte) di Goodstein che inizia con $G_0 = m$, termina al passo n per qualche $n > 0$ tale che $G_n = 0$.*

DIMOSTRAZIONE: Come per il caso delle successioni deboli, si definisce una successione decrescente di ordinali transfiniti $\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_i > \ldots$, ottenuti sostituendo la base $(i+2)$ con ω. Per esempio, nel caso precedente, si ha

$$
\begin{array}{lcl}
\alpha_0 & = & \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^0} = \omega^{\omega^\omega} + \omega \\
\alpha_1 & = & \omega^{\omega^\omega} + 2 \\
\alpha_2 & = & \omega^{\omega^\omega} + 2 - 1 = \omega^{\omega^\omega} + 1 \\
\alpha_3 & = & \omega^{\omega^\omega} + 1 - 1 = \omega^{\omega^\omega} \\
\ldots & & \ldots
\end{array}
$$

Poiché non esistono successioni decrescenti infinite di numeri ordinali, esiste qualche numero naturale $n > 0$ tale che $\alpha_n = 0$. Ma allora, essendo $0 \leq G_i \leq \alpha_i$, è necessariamente $G_n = 0$. $\square$

Può sembrare un'esagerazione avere fatto ricorso alla teoria degli ordinali transfiniti per dimostrare un teorema aritmetico, pertinente a quella che si dice l'aritmetica di Peano (AP). Tuttavia, nel 1982, Kirby e Paris[2] hanno dimostrato che se vale il Teorema di Goodstein (in forma forte),

[2] L. Kirby, J. Paris: Accessible independence results for Peano arithmetic, *Bull. London Math. Soc.* **14** (1982), 285–293

allora l'aritmetica di Peano è consistente. Per il Secondo Teorema d'incompletezza di Gödel, non si può dimostrare la consistenza di una teoria sufficientemente forte (cioè una soprateoria di AP) all'interno della teoria stessa. Se il teorema di Goodstein fosse dimostrabile in AP, allora si troverebbe una dimostrazione della consistenza di AP, fatta all'interno di AP. Se ne conclude che non è possibile dimostrare in AP un teorema che sembra puramente aritmetico come quello di Goodstein. Il ricorso agli insiemi infiniti non è dunque un eccesso, un "accanimento insiemistico", che ci siamo concessi, ma una necessità.

1.9 Classi e ricorsione

In generale non è strettamente necessario nella teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel introdurre la nozione di classe. Tuttavia il concetto di classe, seppure introdotto in modo informale, può essere utile ad abbreviare e semplificare l'enunciazione di alcuni risultati. Se ϕ è una formula, sappiamo che una collezione del tipo $\{x\colon \phi(x)\}$ non è un insieme; anzi possono nascere contraddizioni dal supporre che così si definisca un insieme. Tuttavia è talvolta conveniente dire che una tale collezione è una classe. Come sappiamo, l'assioma di separazione o isolamento ci assicura che una sottoclasse di un insieme è un insieme. Le classi che non sono insiemi si dicono **classi proprie**. Alcune classi che comunemente si usano sono le seguenti:

$\mathbb{V} = \{x\colon x = x\}$, che è la classe propria di tutti gli insiemi.

$\mathbf{On} = \{x\colon x \text{ è un ordinale }\}$ è la classe propria di tutti i numeri ordinali.

Dimostrare un teorema valido per tutte le classi equivale a dimostrare uno schema di teoremi. Per esempio

Teorema 1.9.1 (Induzione transfinita su **On**). *Se* $\mathbf{C}$ *è una classe,* $\mathbf{C} \neq \emptyset$ *e* $\mathbf{C} \subset \mathbf{On}$*, allora* $\mathbf{C}$ *ha minimo.*

Dimostrazione: La dimostrazione si può condurre come nel teorema che asseriva la stessa cosa nel caso in cui C fosse un insieme non vuoto di ordinali. Si prenda $\alpha \in \mathbf{C}$; se α non è il minimo di $\mathbf{C}$, è sufficiente considerare $\beta = \min \alpha \cap \mathbf{C}$. Infatti $\alpha \cap \mathbf{C}$ è un insieme di ordinali che ha un minimo β. Quest'ultimo è anche il minimo di $\mathbf{C}$. □

Teorema 1.9.2 (Ricorsione transfinita su **On**). *Sia* $\mathbf{F}\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ *una funzione. Allora esiste un'unica funzione* $\mathbf{G}\colon \mathbf{On} \to \mathbb{V}$ *tale che*

$$\forall \alpha \quad \mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{G} \restriction \alpha) \quad (\star) \quad .$$

Dimostrazione: Ricordiamo che una funzione $\mathbf{F}\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ è semplicemente una relazione funzionale su $\mathbb{V}$. Cioè una classe di coppie ordinate di insiemi tali che se $\langle x, y\rangle$ e $\langle x, z\rangle$ son elementi della classe $\mathbf{F}$ allora $y = z$.

Ora si possono provare sia l'unicità che l'esistenza di tale funzione $\mathbf{G}$ per induzione transfinita.

Unicità. Supponiamo che $\mathbf{G}_1$ e $\mathbf{G}_2$ soddisfino entrambe la proprietà $(\star)$ e che sia $\mathbf{G}_1(\beta) = \mathbf{G}_2(\beta), \quad \forall\beta < \alpha$. Allora $\mathbf{G}_1 \restriction \alpha = \mathbf{G}_2 \restriction \alpha$. Perciò $\forall\alpha \in \mathbf{On} \quad \mathbf{G}_1(\alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{G}_1 \restriction \alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{G}_2 \restriction \alpha) = \mathbf{G}_2(\alpha)$.

Esistenza. Diremo che g è una δ-approssimazione di $\mathbf{G}$ se g è una funzione di dominio δ e tale che

$$\forall\alpha < \delta \quad [g(\alpha) = \mathbf{F}(g \restriction \alpha)] \quad .$$

Una δ-approssimazione g e una δ'-approsimazione g' sono uguali su $\delta \cap \delta'$; ciò si dimostra per induzione transfinita come si è fatto in precedenza. Inoltre si dimostra per induzione transfinita che per ogni δ vi è una δ-approssimazione (che è necessariamente unica). Infine si può definire $\mathbf{G}(\alpha) = g(\alpha)$ se g è una δ-approssimazione per qualche $\delta > \alpha$. □

1.10 Gli assiomi di potenza e di scelta

Al fine di definire l'insieme prodotto $\prod_{i\in I} X_i$, è conveniente introdurre l'assioma dell'insieme potenza.

Assioma 8. *Dell'Insieme Potenza.*

$$\forall x \exists y \forall z (z \subset x \to z \in y) \quad .$$

Questo ci consentirà inoltre di dimostrare agevolmente l'equivalenza fra i vari modi d'enunciare l'assioma di scelta.

Se I è un insieme d'indici ed è data una famiglia d'insiemi $\{X_i : i \in I\}$, allora definiremo $\prod_{i\in I} X_i$ come la totalità delle applicazioni $f : I \to \cup_{i\in I} X_i$ tali che $f(i) \in X_i$, $\forall i \in I$. Poiché si ha evidentemente che

$$\prod_{i\in I} X_i \subset \mathcal{P}(I \times \bigcup_{i\in I} X_i)$$

ciò mostra che, nelle nostre ipotesi, $\prod_{i\in I} X_i$ è un insieme.

Per introdurre il concetto di numero cardinale di un insieme arbitrario e in molte altre questioni è essenziale l'assioma di scelta. Lo enunceremo sia come principio del *Buon Ordinamento*, come già è stato fatto, sia in alcune maniere alternative.

(BO) *Principio di Buon Ordinamento.*

$$\forall A \exists R (R \text{ è un buon ordine per } A) \quad .$$

I seguenti sono alcuni ulteriori modi per enunciarlo

(AS) (*Assioma di scelta*). *Un prodotto non vuoto d'insiemi non vuoti è non vuoto. Cioè: se $I \neq \emptyset$ ed è data una famiglia d'insiemi $\{X_i : i \in I\}$, con $X_i \neq \emptyset, \forall i \in I$, allora*

$$\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset \quad .$$

(LZ) *(Lemma di Zorn). Se ogni catena non vuota di un insieme parzialmente ordinato non vuoto P ha un maggiorante, allora P ha un elemento massimale.*

(PMH) *(Principio di massimalità di Hausdorff). Ogni catena non vuota in un insieme parzialmente ordinato può essere estesa ad una catena massimale.*

Qui per *catena* in un insieme parzialmente ordinato P intediamo un suo sottoinsieme totalmente ordinato. Ci sarà utile la seguente

Definizione 1.10.1 *Se X è un insieme totalmente ordinato da una relazione d'ordine che denoteremo con $\leq$, $A \subset X$ si dice cofinale in X se $\forall x \in X, \exists y \in A \quad (x \leq y)$.*

Teorema 1.10.1 *Ogni insieme totalmente ordinato ha un sottoinsieme cofinale bene ordinato.*

Dimostrazione: (Usando **(BO)**). Sia $\langle X, R \rangle$ l'insieme totalmente ordinato dalla relazione d'ordine R. Per **(BO)** esso si può scrivere $X = \{x_\alpha : \alpha < \beta\}$ per qualche ordinale β. Definiremo un insieme bene ordinato cofinale come segue

$$A = \{x_\gamma : \forall \delta < \gamma \quad (x_\delta R x_\gamma)\} \quad .$$

Osserviamo che $x_0 \in A$, dunque $A \neq \emptyset$. Se $x = x_\alpha \in X$, allora o esiste qualche $\gamma < \alpha$ tale che $x_\alpha R x_\gamma$ oppure $x_\alpha \in A$. Se $x_\alpha \notin A$, sia γ il minimo ordinale minore di α per il quale si ha $x_\alpha R x_\gamma$. Allora, se $\delta < \gamma$ si ha $x_\delta R x_\gamma$, cioè x_γ è elemento di A e supera nel senso della relazione R x_α: $x_\alpha R x_\gamma \in A$. Dunque A è cofinale. Per definizione, se $x_0 R x_\delta R x_\gamma$ e $x_\delta, x_\gamma \in A$, allora $\delta < \gamma$. Allora A è isomorfo a un sottoinsieme di β e quindi ogni suo sottoinsieme ha minimo. □

Teorema 1.10.2 **(LZ)**$\leftrightarrow$**(PMH)** $\leftrightarrow$ **(AS)** $\leftrightarrow$ **(BO)**.

Dimostrazione: Dimostreremo che **(LZ)**$\rightarrow$**(PMH)** $\rightarrow$ **(AS)**$\rightarrow$ **(BO)**$\rightarrow$ **(LZ)**.

i) **(LZ)**$\rightarrow$**(PMH)**

Sia P un insieme parzialmente ordinato, A una catena in P e $\mathcal{C}$ l'insieme di tutte le catene C in P tale che $C \supset A$. $\mathcal{C}$ è parzialmente ordinato per inclusione e l'unione di una catena di catene è una catena. Allora per $\mathcal{C}$ valgono le ipotesi di **(LZ)**. Dunque $\mathcal{C}$ ha un elemento massimale che è una catena $C^\star \supset A$.

II) **(PMH) $\rightarrow$ (AS)**

Data la famiglia di insiemi $\{X_i : i \in I\}$, $I \neq \emptyset$ e $X_i \neq \emptyset, \forall i \in I$, sia

$$\mathcal{F} = \{f : f \text{ è una funzione da } J \subset I \text{ a } \bigcup_{i \in I} X_i \text{ tale che } \forall i \in J, f(i) \in X_i\}.$$

Si ordini $\mathcal{F}$ per inclusione: $f \prec g$ se $\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(g)$ e $g \restriction \mathrm{dom}(f) = f$. Sia $\mathcal{C}$ una catena massimale in $\mathcal{F}$. Allora $\cup\mathcal{C} \in \mathcal{F}$. Sia $f^\star = \cup\mathcal{C}$ e si supponga che $i \notin \mathrm{dom}(f^\star)$ per qualche $i \in I$. Poiché $X_i \neq \emptyset$, sia $a \in X_i$ e si ponga $g = f^\star \cup \{\langle i, a\rangle\}$; allora $g \in \mathcal{F}$, $g \supset f^\star$ e $g \neq f^\star$, contro il fatto che $\mathcal{C}$ è massimale. Allora $f^\star \in \prod_{i \in I} X_i$.

III) **(AS)$\rightarrow$ (BO)**

Sia X un insieme e sia $I = \mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$. Per ogni $Y \in I$, sia $z_Y = X \setminus Y$. Sia $g \in \prod_{Y \in I} z_Y$ e si definisca $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow X \cup \{X\}$ come segue: $f(Y) = g(Y)$ se $Y \in I$, $f(X) = X$. Si definisca poi una funzione h per induzione transfinita: $h(0) = f(\emptyset)$. Se è nota $h \restriction \alpha$, $h(\alpha) = f(h''\alpha)$, se $h''\alpha \neq X$; altrimenti $h(\alpha) = X$. La tesi è raggiunta utilizzando le seguenti due tappe

Fatto 1.10.1 *Esiste un $\alpha \in \mathbf{On}$ tale che $h(\alpha) = X$.*

DIMOSTRAZIONE: Altrimenti diciamo $Z = \{a \in X : \exists\alpha \quad h(\alpha) = a\}$. Osserviamo che Z è un insieme per l'assioma di comprensione o isolamento. Se $\beta < \alpha$ allora $h(\beta) \in h''\alpha$, dunque $h(\beta) \neq h(\alpha) \notin h''\alpha$. Dunque h è iniettiva e su Z. Allora h^{-1} sarebbe biiettiva da Z su $\mathbf{On}$: $\mathbf{On}$ dovrebbe essere un insieme per lo schema d'assiomi di rimpiazzamento. Ciò è una contraddizione. $\square$

Fatto 1.10.2 *Se α è il minimo ordinale tale che $h(\alpha) = X$, allora $h \restriction \alpha$ induce un buon ordinamento su X.*

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo che se $y \in X$ e $y \notin h''\alpha$, allora $h''\alpha \neq X$ cioè $h(\alpha) \neq X$ contro la definizione di α. Dunque $X = h''\alpha$. Dichiariamo poi che $y = f(\beta) \prec z = f(\gamma)$ se $\beta < \gamma < \alpha$. $\square$

IV) **(BO)$\rightarrow$ (LZ)**

Sia $\langle P, \sqsubset\rangle$ un insieme parzialmente ordinato soddisfacente le ipotesi di **(LZ)** e si bene ordini $P = \{p_\alpha : \alpha < \beta\}$ per qualche β. Si definisca una funzione $f : \beta \rightarrow P$ come segue: $f(\alpha) = p_\delta$ se δ è il minimo ordinale tale che $p_\delta \sqsupset p, \forall p \in f''\alpha$. Altrimenti $f(\alpha) = p_0$. Se $f(\alpha) = p_\delta$, allora $\delta = 0$ oppure $\delta \geq \alpha$; inoltre $p_0 = f(0)$. Se $A = \{f(\alpha) : \alpha < \beta\}$, allora A è una catena. Per ipotesi A ha un maggiorante p. Se p non fosse massimale in P, allora $\exists q = p_\gamma \sqsupset p$. Ma allora $p_\gamma \sqsupset r, \forall r \in f''\gamma$, cosicché $q = f(\gamma)$, $q \in A$ e quindi $q \sqsubseteq p$. Contraddizione. $\square$

1.11 La chiusura transitiva

Dato un insieme x, definiamo $f_x(0) = x$ e $\forall n \in \omega \quad f_x(n+1) = \cup f_x(n)$. Definiamo poi $TC(x) = \cup_{n=0}^{\infty} f_x(n)$.

Definizione 1.11.1 *$TC(x)$ si dice la chiusura transitiva di x.*

Teorema 1.11.1 *Sia x un insieme; $TC(x)$ è un insieme transitivo; se $x \in y$ e y è transitivo, allora $TC(x) \subset y$.*

Dimostrazione: Sia $z \in TC(x)$ e $w \in z$. $z \in f_x(n)$ per qualche n e quindi $w \in f_x(n+1)$; dunque $w \in TC(x)$, che è transitivo. Sia poi $x \in y$ e y sia transitivo. È allora $f_x(0) = x \subset y$. Osserviamo poi che se $f_x(n) \subset y$ è anche $f_x(n+1) \subset y$. Perciò $\cup_{n=0}^{\infty} f_x(n) \subset y$. □

Corollario 1.11.2 *x è transitivo se e solo se $x = TC(x)$.*

Dimostrazione: Se $x = TC(x)$, x è transitivo; se x è transitivo $f_x(0) = x \subset x$; se $f_x(n) \subset x$ allora è pure $f_x(n+1) \subset x$. Dunque, per induzione, $TC(x) \subset x$ e dunque $TC(x) = x$.

1.12 I numeri cardinali

Definizione 1.12.1 *Fra due insiemi arbitrari A e B si possono stabilire le seguenti relazioni binarie*

(1) *$A \preceq B$ (A è sottopotente a B) se vi è un'applicazione iniettiva da A in B.*

(2) *$A \approx B$ (A è equipotente con B) se esiste un'applicazione biiettiva tra A e B.*

(3) *$A \prec B$ (A è strettamente sottopotente a B) se $A \preceq B$ e $A \not\approx B$.*

Teorema 1.12.1 (Schröder–Bernstein). *$A \preceq B$ e $B \preceq A$ implica $A \approx B$.*

Dimostrazione: Esistano $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to A$ iniettive. Sia $A_0 = A$, $B_0 = B$ e $A_{n+1} = g''B_n$ e $B_{n+1} = f''A_n$, $A_\infty = \cap_{n=0}^{\infty} A_n$, $B_\infty = \cap_{n=0}^{\infty} B_n$.

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_\infty \cup \bigcup_{n=0}^{\infty}(A_{2n} \setminus A_{2n+1}); \\ g^{-1}(x), & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

h è biiettiva. □

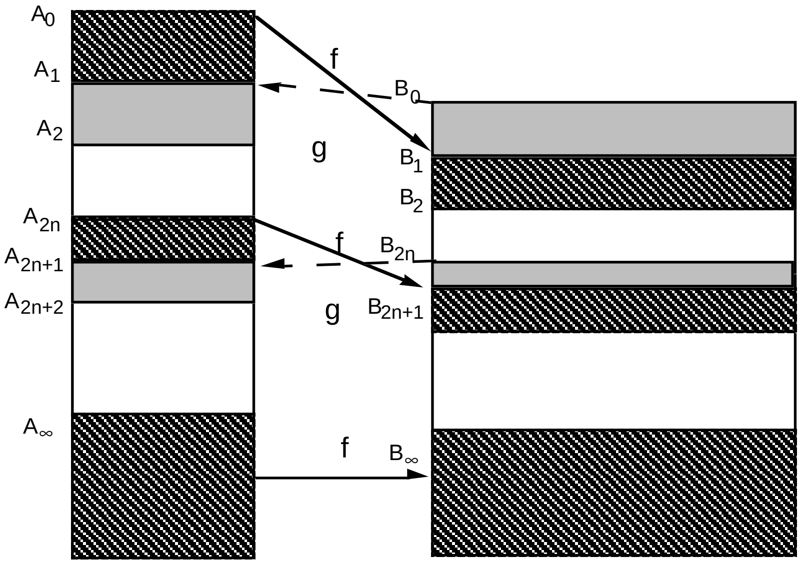

Figura 1.1: Il Teorema di Schröder–Bernstein

Definizione 1.12.2 *Si supponga che A possa essere bene ordinato. Allora $A \approx \alpha$, con α ordinale. $|A|$ è il minimo numero ordinale α tale che*

$$\alpha \approx A \quad .$$

Tale numero ordinale $|A|$ si dice la cardinalità di A.

Per l'assioma di scelta $|A|$ è definito per ogni insieme A. Indipendentemente dall'assioma di scelta, $|\alpha|$ è definito e $\leq \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbf{On}$. Diremo che l'ordinale α è un *numero cardinale* se $|\alpha| = \alpha$. Equivalentemente α è un cardinale se $\forall \beta < \alpha \quad (\beta \not\approx \alpha)$. Per quanto osservato un numero cardinale si dice anche un *numero ordinale iniziale*.

Si usano lettere come $\kappa, \lambda, \tau, \sigma$ per indicare i numeri cardinali. $\kappa \leq \lambda$ se esiste f iniettiva $f\colon \kappa \to \lambda$; $\kappa < \lambda$ se c'è un'applicazione f iniettiva, ma non esiste una g biiettiva, $g\colon \kappa \to \lambda$.

Lemma 1.12.2 *Se $|\alpha| \leq \beta \leq \alpha$ allora $|\beta| = |\alpha|$.*

Dimostrazione: $\beta \subset \alpha$ dunque $\beta \preceq \alpha$ ma $\alpha \approx |\alpha| \subset \beta$ e quindi $\alpha \preceq \beta$. Per il Teorema di Schröder–Bernstein è $\alpha \approx \beta$ e quindi $|\alpha| = |\beta|$. □

Lemma 1.12.3 *Se $n \in \omega$ allora*

(1) $n \not\approx n+1$

(2) $\forall \alpha \quad ((\alpha \approx n) \rightarrow (\alpha = n))$.

Dimostrazione: (1) Per induzione su n. Ovviamente $0 = \emptyset \not\approx 1 = \{\emptyset\}$. Infatti per ogni funzione $f(0) = f''\emptyset = \emptyset \neq \{\emptyset\}$. Valga $n \not\approx n+1$; allora non può essere $n+1 \approx (n+1)+1$. Se così fosse, ci sarebbe un'applicazione biiettiva f tra i due insiemi; detto $f(n) = m \in (n+1)+1$, si potrebbe definire un'applicazione $g: n \rightarrow n+1$, come segue: $g(x) = f(x)$ se $f(x) < m$; $g(x) = f(x)-1$, se $f(x) > m$. g sarebbe biettiva, contro l'ipotesi $n \not\approx n+1$. Dunque

$$\forall n \in \omega \quad n \not\approx n+1 \quad .$$

(2) Supponiamo $\alpha \approx n$. Poiché α e n sono ordinali allora $\alpha \in n$ o $\alpha = n$ o $n \in \alpha$. Se fosse $\alpha \in n$, cioè $\alpha < n$, allora sarebbe $\alpha \subset (n-1) \subset n$. Allora $n \approx \alpha \subset (n-1)$ implicherebbe $n-1 \approx n$, contro il punto (1). Infine, $n \in \alpha$ porterebbe ad una contraddizione analoga. □

Corollario 1.12.4 *ω è un cardinale e ogni $n \in \omega$ è un cardinale.*

Infatti $\forall \alpha < \omega$ è $\alpha = n \in \omega$; poiché $n \not\approx n+1$ a maggior ragione vale $n \not\approx \omega$. Lo stesso vale per ogni n, in base al lemma precedente.

Definizione 1.12.3 *A è finito se $|A| < \omega$. A è numerabile se $|A| \leq \omega$. Infinito significa non finito; non numerabile significa che l'insieme è infinito ma non è numerabile: $|A| > \omega$.*

Non si può provare senza l'uso dell'Assioma di Potenza che esistono insiemi non numerabili.

Definizione 1.12.4 *Definiamo l'addizione e la molteplicazione di numeri cardinali come segue:*

(1) $\kappa \oplus \lambda = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}| = |\lambda \times \{0\} \cup \kappa \times \{1\}| = \lambda \oplus \kappa$,

(2) $\kappa \otimes \lambda = |\kappa \times \lambda| = |\lambda \times \kappa| = \lambda \otimes \kappa$.

Infatti si osservi che è $\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\} \approx \lambda \times \{0\} \cup \kappa \times \{1\}$ e $\lambda \times \kappa \approx \kappa \times \lambda$. Le operazioni sui cardinali sono dunque commutative. Il legame con le corrispondenti operazioni sugli ordinali mostra che

$$|\kappa + \lambda| = |\lambda + \kappa| = \kappa \oplus \lambda$$

$$|\kappa \cdot \lambda| = |\lambda \cdot \kappa| = \kappa \otimes \lambda$$

$$\omega \oplus 1 = |1 + \omega| = \omega < \omega + 1$$

$$\omega \otimes 2 = |2 \cdot \omega| = \omega < \omega \cdot 2.$$

Lemma 1.12.5 $\forall n, m \in \omega, n \oplus m = n + m < \omega; n \otimes m = n \cdot m < \omega.$

DIMOSTRAZIONE: Per induzione su m dimostremo che $n + m < \omega$. Infatti $n+0 = n < \omega$; $n+m < \omega \Rightarrow (n+m)+1 < \omega$. Ma $(n+m)+1 = n+(m+1)$. Dunque $n+m < \omega \Rightarrow n+(m+1) < \omega$. Per induzione $n+m < \omega$ cioè $n+m$ è un numero naturale, quindi un cardinale, per ogni n e m. Analogamente $n \cdot 0 = 0 < \omega$; $n \cdot m < \omega \Rightarrow n \cdot (m+1) = n \cdot m + n < \omega$, per quanto si è dimostrato a proposito dell'addizione. Dunque $\forall n, m \; n \cdot m < \omega$. Cioè se n, m sono numeri naturali anche la somma e il prodotto lo sono. Ma i naturali sono cardinali, perciò

$$n \oplus m = |n + m| = n + m \quad ,$$

$$n \otimes m = |n \cdot m| = n \cdot m \quad .$$

□

Lemma 1.12.6 *Ogni cardinale infinito è un ordinale limite.*

DIMOSTRAZIONE: Per assurdo sia $\kappa = \alpha + 1$ $(\alpha \geq \omega)$. Allora si ha

$$\kappa = |\alpha + 1| = |1 + \alpha| = |\alpha| \approx \alpha \text{ con } \alpha < \kappa \quad .$$

Si è ricordato infatti che $1 + \alpha = \alpha$. Ma questa è una contraddizione; infatti non può essere $\kappa \approx \alpha$ se $\alpha < \kappa$. □

Definizione 1.12.5 *Diremo che un ordinale è pari se ha la forma $\alpha + 2n$, con α ordinale limite e $n \in \omega$. Un ordinale non pari è dispari.*

Lemma 1.12.7 *Sia κ un cardinale infinito; allora*

$$\kappa = |\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ è pari}\}| = |\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ è dispari}\}| \quad .$$

DIMOSTRAZIONE: Si definisca $f(\alpha + 2n) := \alpha + n$; allora

$$f : \{\alpha : \alpha < \kappa, \alpha \text{ pari}\} \to \{\beta : \beta < \kappa\} = \kappa$$

è un'applicazione biiettiva dai pari $< \kappa$ su κ. Se $g(\alpha + 2n + 1) = \alpha + 2n$, allora i dispari $< \kappa$ sono equipotenti con i pari $< \kappa$. □

Corollario 1.12.8 $\kappa \oplus \kappa = \kappa$ *per ogni cardinale infinito κ.*

DIMOSTRAZIONE: Infatti

$$\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ pari}\} \approx \{\alpha < \kappa : \alpha \text{ dispari}\} \approx \kappa \quad .$$

Ma $\kappa = \{\alpha < \kappa : \alpha \text{ pari}\} \cup \{\alpha < \kappa : \alpha \text{ dispari}\}$. Dunque

$$\kappa = |\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ pari}\} \cup \{\alpha < \kappa : \alpha \text{ dispari}\}| =$$

$$|\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ pari}\}| \oplus |\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ dispari}\}| = \kappa \oplus \kappa \ . \quad \square$$

Teorema 1.12.9 *Sia κ un cardinale infinito. Allora $\kappa \otimes \kappa = \kappa$.*

Dimostrazione: Per induzione transfinita su κ.

Sappiamo che $\omega \otimes \omega = \omega$; è sostanzialmente la dimostrazione elementare che i razionali sono un insieme numerabile. Supponiamo ora che ciò valga per ogni cardinale $\rho < \kappa$: $\rho \otimes \rho = \rho$. Ordiniamo l'insieme $\kappa \times \kappa$ come segue.

$$\langle \alpha, \beta \rangle \lhd \langle \gamma, \delta \rangle$$

se

$$\max(\alpha, \beta) < \max(\gamma, \delta) \vee [\max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \delta) \wedge <\alpha, \beta> \prec <\gamma, \delta>]$$

dove $\prec$ rappresenta l'ordine lessicografico. Quest'ordine è un buon ordine. Infatti, se $\emptyset \neq A \subset \kappa \times \kappa$, esiste un minimo valore di $\max(\alpha, \beta)$ tra tutte le coppie $\langle \alpha, \beta \rangle \in A$. Fra tutte le coppie aventi lo stesso valore di $\max(\alpha, \beta)$ ce n'è poi una con primo elemento minimo e fra quelle con lo stesso primo elemento ce n'è una con secondo elemento minimo. Ora ogni $\langle \alpha, \beta \rangle$ ha al più un numero $|(\max(\alpha, \beta) + 1) \times (\max(\alpha, \beta) + 1)| < \kappa$ di predecessori nell'ordine $\lhd$ e dunque il tipo$\langle \kappa \times \kappa, \lhd \rangle \leq \kappa$. Cioè $|\kappa \times \kappa| \leq \kappa$. D'altra parte, ovviamente, $|\kappa \times \kappa| \geq \kappa$ e quindi

$$\kappa \otimes \kappa = |\kappa \times \kappa| = \kappa \quad . \quad \square$$

Corollario 1.12.10 *Se κ e λ sono cardinali infiniti, allora*

1. $\kappa \oplus \lambda = \kappa \otimes \lambda = \max(\kappa, \lambda) \quad ,$
2. $|\kappa^{<\omega}| = \kappa \quad .$

Dimostrazione:

1. Sia $\kappa \leq \lambda$, allora $\lambda \leq \kappa \oplus \lambda \leq \lambda \oplus \lambda = \lambda$; cioè $\kappa \oplus \lambda = \max(\kappa, \lambda) = \lambda$ nel nostro caso. Analogamente, se $\kappa \leq \lambda$, si ha $\lambda \leq \kappa \otimes \lambda \leq \lambda \otimes \lambda = \lambda$; cioè $\kappa \otimes \lambda = \max(\kappa, \lambda) = \lambda$ nel nostro caso.

2. Dal momento che $\kappa^2 = \kappa$, allora per induzione avremo che $\kappa^n = \kappa$, $\forall n \in \omega \setminus \{0\}$. Possiamo dunque definire per ogni $n \in \omega \setminus \{0\}$ un'applicazione biiettiva $f_n \colon \kappa^n \to \kappa$. Ma allora si ottiene un'applicazione biiettiva

$$f \colon \cup_{0<n<\omega} \kappa^n \to \omega \times \kappa \quad .$$

Precisamente, se $x \in \cup_{0<n<\omega} \kappa^n$, per es. $x =< \alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n >$, allora $f(x) =< n, f_n(\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n) >$. Allora $|\kappa^{<\omega}| \leq \omega \otimes \kappa = \kappa$. Infatti $\kappa^{<\omega} = \kappa^0 \cup \cup_{0<n<\omega} \kappa^n$ e i due insiemi hanno la stessa cardinalità. $\square$

Osserviamo che senza l'assioma di potenza non si può assicurare l'esistenza di cardinali $> \omega$. Ma è ben noto che dall'assioma di potenza segue il seguente

Teorema 1.12.11 (Cantor). *Per ogni insieme x si ha $|x| < |\mathcal{P}(x)|$.*

DIMOSTRAZIONE: Ovviamente esiste un'applicazione iniettiva da x a $\mathcal{P}(x)$. Per esempio quella che associa a ogni $y \in x$ l'insieme $\{y\} \in \mathcal{P}(x)$. Dunque $|x| \leq |\mathcal{P}(x)|$. Si supponga, per assurdo, che esista un'applicazione biiettiva φ tra x e $\mathcal{P}(x)$. Definiamo allora un sottoinsieme di x come segue

$$a = \{y : y \notin \varphi(y)\} \quad .$$

Poiché φ si è supposta biiettiva dovrà esistere $z \in x$ tale che $a = \varphi(z)$. Ci possiamo allora chiedere: $z \in \varphi(z)$? Se supponiamo che $z \in a = \varphi(z)$ allora per la definizione di a deve essere $z \notin a = \varphi(z)$. Se supponiamo invece che $z \notin a = \varphi(z)$, allora, per definizione, $z \in a = \varphi(z)$. Dunque otteniamo la contraddizione

$$z \in a = \varphi(z) \ \leftrightarrow \ z \notin a = \varphi(z) \quad .$$

Perciò non può esistere un'applicazione biiettiva come φ e dunque deve essere $|x| < |\mathcal{P}(x)|$. $\square$

Si noti che nella dimostrazione del teorema di Cantor si usa sia l'assioma di potenza che l'assioma di scelta. Infatti per attribuire una cardinalità a $\mathcal{P}(x)$ è necessario che l'insieme possa essere bene ordinato (x potrebbe esserlo automaticamente se fosse un ordinale).

Tuttavia non è necessario l'assioma di scelta per dimostrare che ogni cardinale ammette un cardinale maggiore. Vale infatti il seguente

Teorema 1.12.12 (Hartogs). $\forall \alpha \ \exists \kappa \quad (\kappa > \alpha)$, *$\kappa$ è un cardinale.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\alpha \geq \omega$. Consideriamo $W = \{R \in \mathcal{P}(\alpha \times \alpha) : R$ è un buon ordinamento su $\alpha\}$. Sia $S = \{\text{tipo}(< \alpha, R >) : R \in W\}$. S è un insieme di ordinali. Possiamo considerare l'ordinale $\lambda = \sup S$. Verifichiamo che si tratta di un ordinale iniziale, cioè un cardinale $\lambda > \alpha$. Ovviamente non può essere $|\lambda| < |\alpha|$, poichè $\alpha \in S$. Se fosse $\lambda \approx \alpha$, allora esisterebbe $R \in W$ tale che $\lambda = \text{tipo}(\langle \alpha, R \rangle)$. Ma allora $\lambda \in S$ e quindi anche $\lambda + 1 \in S$, contro la definizione di $\lambda = \sup S$. $\square$

Definizione 1.12.6 *Denoteremo con α^+ il minimo cardinale $> \alpha$. Si dice che κ è un cardinale successore se $\kappa = \alpha^+$ per qualche α; se $\kappa \geq \omega$ e κ non è un cardinale successore, esso si dice un cardinale limite. ω è il minimo cardinale limite.*

Definizione 1.12.7 (Gli "aleph"). *Sono i numeri cardinali infiniti così definiti per ricorsione.*

1. *$\aleph_0 = \omega$;*

2. *$\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$;*

3. *$\aleph_\gamma = \sup\{\aleph_\beta : \beta < \gamma\}$ se γ è un ordinale limite.*

Lemma 1.12.13 *Valgono i seguenti fatti:*

1. *Ogni $\aleph_\alpha$ è un cardinale.*

2. *Ogni cardinale infinito coincide con qualche $\aleph_\alpha$.*

3. *$\alpha < \beta \to \aleph_\alpha < \aleph_\beta$.*

4. *$\aleph_\alpha$ è un cardinale limite se e solo se α è un ordinale limite.*

DIMOSTRAZIONE: La dimostrazione viene fatta per induzione transfinita su α.

(1) Se α è un ordinale successore $\alpha = \beta + 1$ allora ovviamente $\aleph_{\beta+1} = (\aleph_\beta)^+$ è un cardinale. Supponiamo che α sia un ordinale limite. Se $\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$ non fosse un cardinale, allora $\aleph_\alpha$ sarebbe equipotente con qualche ordinale $\gamma < \aleph_\alpha$ e quindi con qualche $\gamma < \aleph_\beta < \aleph_\alpha$ (per la definizione di sup e per il terema di Schröder–Bernstein). Cioè $|\aleph_\alpha| = \aleph_\beta$ per qualche $\beta < \alpha$. Ma allora avremmo $\aleph_\beta < \aleph_{\beta+1} \leq \aleph_\alpha$ e quindi $\aleph_{\beta+1} \leq \aleph_\alpha$ e la contraddizione $\aleph_{\beta+1} > |\aleph_\alpha| = \aleph_\beta$.

(2) La proposizione discende dall'assioma di scelta (AS), anzi è equivalente ad esso. Se (AS) non vale, allora esiste un insieme x non equipotente con alcun ordinale e quindi con alcun ordinale iniziale. Cioè esiste un insieme x del quale non si può stabilire la cardinalità. Se vale (AS), allora ogni insieme si può bene ordinare. Dunque per ogni x si trova un ordinale α tale che $\langle x, R\rangle \cong \alpha$, per qualche buon ordinamento R su x, e quindi $x \approx \alpha$. Se κ è il minimo di tali ordinali, allora $|x| = \kappa$. I cardinali finiti sono tutti i naturali $n < \omega = \aleph_0$. I cardinali infiniti sono i $\kappa \geq \aleph_0$. Dimostriamo che essi sono tutti degli $\aleph$. Per assurdo si supponga che ci sia un cardinale infinito $\kappa \neq \aleph_\alpha, \forall\alpha \in \mathbf{On}$. Allora si può considerare

$$A = \{\kappa : \kappa \geq \aleph_0, \kappa \neq \aleph_\alpha, \forall\alpha \in \mathbf{On}\}.$$

Essendo $A \neq \emptyset$, si può considerare $\sigma = \min A$. Allora se λ è un cardinale minore di σ, $\lambda = \aleph_\beta$ per qualche ordinale β. Consideriamo ora $C = \{\gamma : \aleph_\gamma < \sigma\}$. Sia $\delta = \sup C$. Sia poi $\aleph_\delta = \sup\{\aleph_\gamma : \gamma \in C\}$. Per la definizione di estremo superiore, deve essere $\aleph_\delta \leq \sigma$. Non può essere $\aleph_\delta = \sigma$, perché ciò contraddirebbe la definizione di σ. Può essere $\aleph_\delta < \sigma$? In questo caso avremmo $\aleph_\delta < \aleph_{\delta+1}$. Non potrebbe essere $\aleph_{\delta+1} < \sigma$, perché ciò contraddirebbe la definizione di $\aleph_\delta$. Né può essere $\aleph_{\delta+1} = \sigma$, che contraddice la definizione di σ. Infine non può essere $\aleph_\delta < \sigma < \aleph_{\delta+1}$, poiché σ è un cardinale e non ci sono cardinali tra $\aleph_\delta$ e $\aleph_{\delta+1}$.

(3) e (4) seguono in modo immediato dalla definizione. $\square$

Lemma 1.12.14 (AS). *Se esiste $f\colon X \to Y$ suriettiva, allora $|Y| \leq |X|$.*

Dimostrazione: Si dia un buon ordinamento R su X. Per ogni $y \in Y$ sia $g(y) = \min\{f^{-1}(y)\}$ essendo il minimo preso rispetto al buon ordine R. Allora $g\colon X \to Y$ è una funzione iniettiva. $\square$

Lemma 1.12.15 (AS). *Sia $\kappa \geq \omega$ e $|X_\alpha| \leq \kappa, \forall \alpha < \kappa$. Allora $|\cup_{\alpha<\kappa} X_\alpha| \leq \kappa$.*

Dimostrazione: Per ogni $\alpha < \kappa$ esiste una funzione iniettiva $f_\alpha\colon X_\alpha \to \kappa$. Si consideri la riunione $\cup_{\alpha<\kappa} X_\alpha$. Si consideri quindi un buon ordine sull'insieme

$$\mathcal{P}\big((\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha) \times \kappa\big).$$

Ogni funzione $f_\alpha \in \mathcal{P}\big((\cup_{\alpha<\kappa} X_\alpha) \times \kappa\big)$, che è un insieme bene ordinato. Vogliamo costruire un'applicazione iniettiva da $(\cup_{\alpha<\kappa} X_\alpha)$ a $\kappa \times \kappa$. Se $x \in \cup_{\alpha<\kappa} X_\alpha$, sia $f_{\overline{\alpha}}$ la minima f_α (nel buon ordine scelto) tale che $x \in \mathrm{dom}(f_\alpha)$. Definiamo allora

$$f(x) := < f_{\overline{\alpha}}(x), \overline{\alpha} > \quad .$$

Evidentemente si definisce così una funzione

$$f\colon \bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha \to \kappa \times \kappa \quad .$$

La funzione f è iniettiva. Se $x \neq y$ in $\cup_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ e se accade che $x \in \mathrm{dom} f_{\alpha'}$, $y \in \mathrm{dom} f_{\alpha''}$, con $\alpha' \neq \alpha''$, allora

$$f(x) = < f_{\alpha'}(x), \alpha' > \neq < f_{\alpha''}(y), \alpha'' > = f(y)$$

poiché è $\alpha' \neq \alpha''$. Se poi $\alpha' = \alpha'' = \alpha$, allora

$$f(x) = < f_\alpha(x), \alpha > \neq < f_\alpha(y), \alpha > = f(y)$$

poiché $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.

Essendo f iniettiva concludiamo che $|\cup_{\alpha<\kappa} X_\alpha| \leq \kappa \otimes \kappa = \kappa$. $\square$

Definizione 1.12.8

$${}^B A = A^B := \{f\colon f \text{ è funzione}, \mathrm{dom}(f) = B \text{ e } \mathrm{im}(f) \subset A\} \quad .$$

Si osservi che la definizione data è una buona definizione poiché

$$^{B}A \subset \mathcal{P}(B \times A)\,.$$

Definizione 1.12.9 (AS).

$$\kappa^{\lambda} := |^{\lambda}\kappa| \quad .$$

Lemma 1.12.16 *Se $\lambda \geq \omega$ e $2 \leq \kappa \leq \lambda$, si ha $\kappa^{\lambda} = |^{\lambda}\kappa| = 2^{\lambda} = |^{\lambda}\{0,1\}| = |\mathcal{P}(\lambda)|$.*

Dimostrazione: Il fatto che $^{\lambda}\{0,1\} \approx \mathcal{P}(\lambda)$ segue dall'identificazione di ogni sottoinsieme $A \subset \lambda$ con la sua funzione caratteristica $\chi_A \colon \lambda \to \{0,1\}$ definita, come è noto, nel modo seguente: $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$. Si ha poi la seguente catena d'insiemi equi- o sotto- potenti

$$^{\lambda}\{0,1\} \preceq {}^{\lambda}\kappa \preceq {}^{\lambda}\lambda \preceq \mathcal{P}(\lambda \times \lambda) \approx {}^{\lambda\times\lambda}\{0,1\}\,.$$

Da ciò segue che

$$2^{\lambda} = |^{\lambda}\{0,1\}| \leq \kappa^{\lambda} = |^{\lambda}\kappa| \leq \lambda^{\lambda} \leq |^{\lambda\times\lambda}\{0,1\}| = 2^{\lambda\otimes\lambda} = 2^{\lambda}\,,$$

e quindi quanto asserito. □

Si noti che nell'esponenziazione ordinale risulta $2^{\omega} = \omega$, mentre nell'esponenziazione cardinale si ha $2^{\omega} = 2^{\aleph_0} > \omega = \aleph_0$.

Lemma 1.12.17 (AS). *Se κ, λ, σ sono numeri cardinali, allora*

$$\kappa^{\lambda\oplus\sigma} = \kappa^{\lambda} \otimes \kappa^{\sigma}\,,$$

$$(\kappa^{\lambda})^{\sigma} = \kappa^{\lambda\otimes\sigma}\,.$$

Dimostrazione: Quanto asserito segue facilmente dall'osservare che, se A, B, C son tre insiemi tali che $|A| = \kappa, |B| = \lambda, |C| = \sigma$ e $B \cap C = \emptyset$, allora

$$^{B\cup C}A \approx {}^{B}A \times {}^{C}A \text{ e}$$

$$^{C}(^{B}A) \approx {}^{C\times B}A \quad .$$

Infatti a ogni $f \colon (B \cup C) \to A$ si può associare una coppia di funzioni $\langle g, h\rangle$ con $g = f \restriction B$ e $h = f \restriction C$ e viceversa. A ogni $f(.,.) \colon C \times B \to A$ si può associare una funzione da C a ^{B}A che a ogni $x \in C$ fa corrispondere $f(x,.) \colon B \to A$. Viceversa se è data una funzione $h \colon C \to {}^{B}A$ che a $x \in C$ fa corrispondere $h_x(.) \colon B \to A$, a essa si può associare $f(.,.) \colon C \times B \to A$ data da $f(x,y) := h_x(y)$. □

D'ora in poi per **Ipotesi del continuo**, denotata in breve con CH, dall'inglese "Continuum Hypothesis", intenderemo la congettura di Cantor che $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Ricordiamo che il numero cardinale $2^{\aleph_0}$ si indica anche con la lettera $\mathfrak{c}$. L'**Ipotesi del continuo generalizzata**, GCH dall'inglese "Generalized Continuum Hypothesis", è la congettura che per ogni ordinale α sia $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. È stato dimostrato che né CH né GCH possono essere provate in ZFC, né sono provabili le loro negazioni.

1.13 Cofinalità e teorema di König

Definizione 1.13.1 *Sia $f\colon \alpha \to \beta$, con α e β numeri ordinali. Diremo che f* applica α in β in modo cofinale *se* $\mathrm{im}(f)$ *è illimitata in β.*

Definizione 1.13.2 *Diremo* cofinalità *di β il minimo ordinale α tale che vi è un'applicazione cofinale di α in β. La cofinalità di β sarà indicata con* $\mathrm{cf}(\beta)$.

Evidentemente si ha $\mathrm{cf}(\beta) \leq \beta$; se β è un ordinale successore $\mathrm{cf}(\beta) = 1$ e solamente in questo caso.

Lemma 1.13.1 *Per ogni ordinale β si può trovare un'applicazione cofinale strettamente crescente da* $\mathrm{cf}(\beta)$ *in β.*

Dimostrazione: Sia $g\colon \mathrm{cf}(\beta) \to \beta$ un'applicazione cofinale. Si definisca ricorsivamente un'applicazione f da $\mathrm{cf}(\beta)$ in β come segue:

$$f(\eta) := \max(g(\eta), \sup\{f(\xi) + 1 \colon \xi < \eta\}) \quad .$$

È immediato riconoscere che se $\eta_1 < \eta_2$ allora $f(\eta_2) \geq f(\eta_1) + 1 > f(\eta_1)$, dunque f è strettamente crescente. Inoltre, poiché è $f(\eta) \geq g(\eta)$, essendo g cofinale, lo è la f. $\Box$

Lemma 1.13.2 *Se α è un ordinale limite e $f\colon \alpha \to \beta$ è una funzione cofinale strettamente crescente, allora*

$$\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta) \quad .$$

Dimostrazione: $\mathrm{cf}(\beta) \leq \mathrm{cf}(\alpha)$ segue dalla composizione delle funzioni $g\colon \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ e $f\colon \alpha \to \beta$. Infatti $f \circ g\colon \mathrm{cf}(\alpha) \to \beta$ è un'applicazione cofinale.

Per mostrare che $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\beta)$ faremo vedere che esiste un'applicazione cofinale da $\mathrm{cf}(\beta)$ in α. Sappiamo che esiste $g\colon \mathrm{cf}(\beta) \to \beta$ cofinale. Definiamo ora

$$h(\xi) := \min\{\eta \in \alpha \colon f(\eta) > g(\xi)\} \quad .$$

Evidentemente $h\colon \mathrm{cf}(\beta) \to \alpha$. Inoltre essa è cofinale. Dato $\alpha_0 < \alpha$ sia $\beta_0 = f(\alpha_0)$. Poiché g è cofinale, esiste $\xi_0 < \mathrm{cf}(\beta)$ tale che $g(\xi_0) \geq \beta_0$. Se $\eta \in \alpha$ è tale che $f(\eta) > \beta_0$, per la crescenza di f deve essere $\eta > \alpha_0$. Il minimo di tali ordinali è il valore di $h(\xi_0)$. Dunque per ogni $\alpha_0 \in \alpha$ esiste un valore $\xi_0 \in \mathrm{cf}(\beta)$ tale che $h(\xi_0) > \alpha_0$. Si noti che essendo α limite, per ogni $\alpha_0 < \alpha$ esistono ordinali $\alpha_0 < \eta < \alpha$. □

Corollario 1.13.3
$$\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\beta)) = \mathrm{cf}(\beta) \quad .$$

Dimostrazione: Infatti $\mathrm{cf}(\beta) = 1$ se e solo se β è un ordinale successore. Dunque sarà sufficiente dimostrare l'affermazione per gli ordinali limite. Ma sappiamo che esiste un'applicazione cofinale strettamente crescente $f\colon \mathrm{cf}(\beta) \to \beta$. Applicando il lemma precedente a questa funzione si ottiene il risultato voluto. □

Definizione 1.13.3 *Un ordinale infinito β si dice* regolare *se è limite e* $\mathrm{cf}(\beta) = \beta$.

Lemma 1.13.4 *Valgono i seguenti fatti*

1. *Se β è regolare, β è un cardinale.*
2. *$\omega = \aleph_0$ è regolare.*
3. *κ^+ è regolare.*

Dimostrazione:
(1) Se fosse $\kappa = |\beta| < \beta$ esisterebbe un'applicazione biiettiva $f\colon \kappa \to \beta$. Una tale applicazione, essendo $\mathrm{im}(f) = \beta$, è certamente cofinale. Allora avremmo $\mathrm{cf}(\beta) \leq \kappa < \beta$, contro l'ipotesi che β è regolare.
(2) Se $\alpha < \omega$ allora $\alpha \in \omega$ è un numero naturale n. Ogni applicazione $f\colon n \to \omega$ non può essere cofinale in ω perché la sua immagine essendo finita ha un massimo $m \in \omega$.
(3) Se esistesse un'applicazione cofinale $f\colon \alpha \to \kappa^+$, con $\alpha < \kappa^+$, allora avremmo
$$\kappa^+ = \sup\{f(\xi)\colon \xi < \alpha\} = \cup\{f(\xi)\colon \xi < \alpha\}\,,$$
con $f(\xi) < \kappa^+$ e $\alpha < \kappa^+$, cioè $\alpha \leq \kappa$. Ma anche $|f(\xi)| \leq \kappa$ per ogni $\xi < \alpha$. Dunque per il Lemma 1.12.8 avremmo
$$\kappa^+ = |\cup\{f(\xi)\colon \xi < \alpha\}| \leq \kappa\,,$$
che è una contraddizione. □

Lemma 1.13.5 *Se α è un ordinale limite, allora* $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

DIMOSTRAZIONE: Infatti $f\colon \alpha \to \aleph_\alpha$ definita da $f(\beta) = \aleph_\beta$, $\forall \beta < \alpha$, è un'applicazione strettamente crescente e cofinale definita sull'ordinale limite α. Per il Lemma 1.13.2, si ha dunque $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$. □

Si può agevolmente riconoscere che per ogni ordinale α vale $\alpha \leq \aleph_\alpha$. I vari $\aleph$ possono essere cardinali regolari o singolari. Per esempio, $\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_n, \ldots$ sono cardinali regolari; $\aleph_\omega$ è un cardinale singolare. Infatti, in base al Lemma precedente si ha $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \omega < \aleph_\omega$. Si può inoltre osservare che se $\aleph_\alpha$ è un cardinale limite e regolare vale necessariamente $\aleph_\alpha = \alpha$. Infatti si ha $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha = \mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha \leq \aleph_\alpha$. Si noti però che l'essere $\aleph_\alpha = \alpha$ non impone che $\aleph_\alpha$ sia un cardinale regolare. Infatti se definiamo $\sigma_0 = \omega$ e per ogni n definiamo ricorsivamente $\sigma_{n+1} = \aleph_{\sigma_n}$, posto $\alpha = \sup\{\sigma_n \colon n \in \omega\}$, allora evidentemente si ha $\alpha = \aleph_\alpha$, ma $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$, cioè α è singolare. Il primo cardinale regolare limite, se c'è è molto grande.

Definizione 1.13.4 *Si usano le seguenti definizioni*

1. *Un cardinale $\kappa > \omega$ si dice* debolmente inaccessibile *se è un cardinale limite e regolare.*

2. *Un cardinale $\kappa > \omega$ si dice* fortemente inaccessibile *se è regolare e per ogni cardinale $\lambda < \kappa$ è anche $2^\lambda < \kappa$.*

I cardinali fortemente inaccessibili lo sono debolmente e sotto GCH le due nozioni coincidono. È consistente con ZFC che $2^{\aleph_0}$ sia un cardinale debolmente inaccessibile o maggiore del primo cardinale debolmente inaccessibile. Non si può provare in ZFC l'esistenza di cardinali debolmente inaccessibili.

Definizione 1.13.5 *Sia I un insieme d'indici e sia κ_i un numero cardinale per ogni $i \in I$. Definiamo*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \bigoplus_{i\in I} \kappa_i := |\bigcup_{i\in I} A_i|\,,$$

con $|A_i| = \kappa_i$ per ogni $i \in I$ e con gli A_i a due a due disgiunti (per es. $A_i = \kappa_i \times \{i\}$).

Definiamo poi

$$\prod_{i\in I} \kappa_i = \bigotimes_{i\in I} \kappa_i := |\prod_{i\in I} \kappa_i|\,.$$

Qui nella prima definizione si è usato il simbolo $\sum_{i\in I}$ per indicare la somma cardinale invece del più corretto $\bigoplus_{i\in I}$; nella seconda definizione si è usato il simbolo $\prod_{i\in I}$ sia per indicare il prodotto cardinale che il prodotto cartesiano di insiemi. Sarebbe più corretto usare il simbolo $\bigotimes_{i\in I}$ per il prodotto cardinale, ma spesso utilizzeremo questo abuso di linguaggio, quando ciò non comporti confusione.

Vale il seguente importante

Teorema 1.13.6 (di König) (AS). *Sia $I \neq \emptyset$ e per ogni $i \in I$ sia $\kappa_i < \lambda_i$, essendo κ_i e λ_i cardinali. Allora*

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i \quad .$$

DIMOSTRAZIONE: Per ogni $i \in I$ sia dato un insieme A_i di cardinalità κ_i e gli insiemi A_i siano a due a due disgiunti. Sia poi $f_i : A_i \to \lambda_i \setminus \{0\}$ un'applicazione iniettiva, che esiste certamente per l'ipotesi $\kappa_i < \lambda_i$. Se $x \in A_i$ definiamo $f_x(i) := f_i(x)$ e $f_x(j) := 0$ se $j \neq i$. Dunque, associando a ogni $x \in \cup_{i \in I} A_i$ l'elemento $f_x \in \prod_{i \in I} \lambda_i$, otteniamo un'applicazione chiaramente iniettiva

$$F : \bigcup_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} \lambda_i \, , F(x) = f_x \, .$$

Ciò mostra che

$$\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \prod_{i \in I} \lambda_i \quad .$$

Verifichiamo ora che

$$\sum_{i \in I} \kappa_i \neq \prod_{i \in I} \lambda_i \quad .$$

Sia $G : \sum_{i \in I} (\kappa_i \times \{i\}) \to \prod_{i \in I} \lambda_i$ un'applicazione arbitraria e mostriamo che non può essere **su**. Indichiamo con $g_{\alpha,i} = G(\alpha, i)$ l'elemento di $\prod_{i \in I} \lambda_i$ ottenuto come immagine per mezzo di G di $\langle \alpha, i \rangle$; definiamo

$$K_i := \{ g_{\alpha,i}(i) : \alpha < \kappa_i \} \quad .$$

Poiché $|K_i| \leq \kappa_i < \lambda_i$, esiste $\gamma_i \in \lambda_i \setminus K_i$. Se poniamo $f(i) = \gamma_i$ per ogni $i \in I$, $f \in \prod_{i \in I} \lambda_i$. Ora un elemento $h \in \prod_{i \in I} \lambda_i$ è un elemento di $\mathrm{im}(G)$ se e solo se esistono $i \in I$ e $\alpha \in \kappa_i$ tali che $h = G(\alpha, i)$. Ma allora per qualche $i \in I$ deve essere $h(i) \in K_i$. Ma nel nostro caso non c'è alcun $i \in I$ tale che $f(i) \in K_i$. Perciò $f \notin \mathrm{im}(G)$ e dunque G non può essere suriettiva. Resta dunque dimostrata la tesi. □

Come conseguenza si ottengono i seguenti importanti risultati

Teorema 1.13.7 (AS). *Per ogni cardinale infinito κ si ha*

1. $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa$.

2. $\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$.

DIMOSTRAZIONE:

(1) Sia f un'applicazione cofinale strettamente crescente da $\mathrm{cf}(\kappa)$ in κ. Allora

$$\kappa = |\bigcup_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} f(\alpha)| \leq \sum_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} |f(\alpha)| < \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} .$$

Infatti $|f(\alpha)| < \kappa$ per ogni $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$; si applichi poi il Teorema di König.

(2) Sia $\lambda = \mathrm{cf}(2^\kappa)$. Se fosse $\lambda \leq \kappa$ si avrebbe

$$(2^\kappa)^\lambda = 2^{\kappa\otimes\lambda} = 2^\kappa ,$$

contro il punto (1) appena dimostrato applicato al cardinale 2^κ. $\square$

Si noti che essendo $\mathrm{cf}(\lambda) \leq \lambda$ si ottiene $\kappa < \mathrm{cf}(2^\kappa) \leq 2^\kappa$, cioè $\kappa < 2^\kappa$ per ogni cardinale infinito. Si riottiene dunque la tesi del teorema di Cantor 1.12.3 per i cardinali infiniti.

Il Teorema 1.13.2 dice quasi tutto quanto si conosce sull'esponenziazione cardinale senza ulteriori ipotesi sul sistema ZFC. Per esempio, sotto l'ipotesi GCH, si può descrivere più completamente l'operazione d'esponenziazione cardinale. Infatti si ha

Teorema 1.13.8 (AS + GCH). *Siano $\kappa, \lambda \geq 2$ e almeno uno dei due sia infinito. Allora si ha*

1. $\kappa \leq \lambda \to \kappa^\lambda = \lambda^+$.
2. $\kappa > \lambda \geq \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa^\lambda = \kappa^+$.
3. $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa^\lambda = \kappa$.

DIMOSTRAZIONE:

(1) Da un risultato precedente (Lemma 1.12.9) sappiamo che nelle nostre ipotesi $\kappa^\lambda = 2^\lambda = \lambda^+$. L'ultima uguaglianza segue da GCH.

(2) $\kappa^\lambda \geq \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa$ per König. Ma $\kappa^\lambda \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+$. Dunque $\kappa < \kappa^\lambda \leq \kappa^+$. Perciò deve essere $\kappa^\lambda = \kappa^+$.

(3) Se $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$ allora ${}^\lambda\kappa = \cup\{{}^\lambda\alpha : \alpha < \kappa\}$. Infatti se $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$ e $f: \lambda \to \kappa$ si ha che $\sup f''\lambda < \kappa$. Si ha poi $|{}^\lambda\alpha| \leq 2^{|\alpha|\otimes|\lambda|} = 2^{\max(|\alpha|,|\lambda|)} = \max(|\alpha|, |\lambda|)^+ \leq \kappa$. Di qui segue che $\kappa^\lambda \leq \kappa$ ed essendo ovviamente anche $\kappa^\lambda \geq \kappa$ si trova $\kappa^\lambda = \kappa$. $\square$

Daremo inoltre le seguenti definizioni che potranno essere utili nel seguito

Definizione 1.13.6 (AS).

1. ${}^{<\beta}A = A^{<\beta} := \cup\{{}^\alpha A : \alpha < \beta\}$.

2. $\kappa^{<\lambda} = |{}^{<\lambda}\kappa|$.

Già abbiamo dimostrato che se $\kappa \geq \omega$, allora $\kappa^{<\omega} = \kappa$.

Definiamo infine i numeri "beth" ($\beth$).

Definizione 1.13.7 (AS)

1. $\beth_0 = \omega$.

2. $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$.

3. Se γ è un ordinale limite $\beth_\gamma = \sup\{\beth_\alpha : \alpha < \gamma\}$.

GCH equivale ad affermare che $\forall \alpha \in \mathbf{On}$, $\beth_\alpha = \aleph_\alpha$.

1.14 Altre teorie degli insiemi

Accanto a ZF (con o senza C) sono state considerate numerose altre teorie degli insiemi. Ne ricorderemo qui alcune a solo scopo informativo. Ricordiamo innanzi tutto la teoria NBG di von Neumann, Bernays e Gödel che ha un assioma specificamente dedicato alle *classi.* In questa teoria si indicano con lettere minuscole gli insiemi, con lettere maiuscole le classi, che sono agglomerati più ampli e generali degli insiemi. Gli insiemi sono quelle classi che appartengono a un'altra classe. Cioè la classe X è un insieme se esiste una classe Y tale che $X \in Y$. Gli assiomi della Teoria NBG sono i seguenti

1) $\forall u\, (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y$. (Uguaglianza per le classi).

2) Ogni insieme è una classe. (Insiemi e classi).

3) Se $X \in Y$ allora X è un insieme. (Insiemi).

4) Per ogni insieme x e per ogni insieme y esiste un insieme $\{x, y\}$. (Coppia).

5) $\forall X_1 \ldots \forall X_n\, \exists Y\ Y = \{x : \phi(x, X_1, \ldots, X_n)\}$, dove ϕ può avere altre variabili libere di tipo insieme o classe oltre a quelle esplicitate, ma dove le variabili legate sono solamente di tipo insieme. (Comprensione per le classi).

6) Esiste un insieme infinito. (Infinito).

7) Per ogni insieme x esiste un insieme $\cup x$. (Unione).

8) Per ogni insieme x esiste un insieme $\mathcal{P}(x)$. (Potenza).

9) Se una classe F è una funzione e X è un insieme, allora $F''X$ è un insieme. (Rimpiazzamento).

10) Regolarità.

11) Scelta.

NBG ha parecchie proprietà interessanti fra le quali quella di essere *finitamente* assiomatizzabile, al contrario di ZFC che contiene schemi di assiomi e quindi ha un'infinità di assiomi. Un'altra importante proprietà di NBG è che si tratta di un'estensione *conservativa* di ZF. Ciò significa che se ψ è una formula che contiene solo variabili di tipo insiemistico, NBG $\vdash \psi$ se e solo se ZF $\vdash \psi$ (ciò è stato dimostrato da Wang nel 1949 e da Schoenfield nel 1954). La teoria MK (Morse e Kelley, pubblicata in appendice del libro di Kelley "General Topology", 1955) permette alla ϕ dell'assioma di comprensione di essere arbitraria. Essa non è finitamente assiomatizzabile e non è un'estensione conservativa di ZF. In MK si possono formare superclassi che producono ineleganze dello stesso tipo presente in ZF nel trattare le classi.

Dal punto di vista tecnico ZF è la più semplice delle tre teorie finora ricordate.

Una teoria degli insiemi basata su principi diversi da ZF è NF (New Foundations) di Quine (1937, 1951) e Rosser (1955). NF tratta solo insiemi, ma in essa è previsto un insieme universale:

$$\exists v \forall x \, (x \in v) \quad .$$

Non ci sono limitazioni nell'assioma di comprensione, però la formula ϕ deve essere stratificata. Per esempio, $x = x$ è stratificata, ma $x \in x$ e $x \notin x$ **non lo sono**. Non si sa se NF sia consistente, anche assumendo che ZF lo sia.

In anni molto recenti (1996) Ennio De Giorgi, Marco Forti e Giacomo Lenzi hanno sviluppato un quadro assiomatico generale per i fondamenti di Matematica, Logica e Informatica, nel quale si introducono e assiomatizzano le nozioni di operazione, collezione e correlazione, proposizione e predicato, numero naturale e sequenza finita, insieme, sistema e funzione. La teoria è presentata in M. Forti e G. Lenzi: " A General Axiomatic Framework for the Foundations of Mathematics, Logic and Computer Science", Rendiconti dell'Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, Roma 1997, Serie V, vol. XXI, parte I, pagg. 171-207.

1.15 Alcuni conteggi

Esempio 1.15.1

$$|\mathbb{R}| = \mathfrak{c} \quad .$$

Questo risultato è ben noto.

Esempio 1.15.2 Numero dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{Q}$.

I polinomi sono espressioni del tipo $\sum_{i\leq n} r_i x^i$, dove $r_i \in \mathbb{R}$ oppure $r_i \in \mathbb{Q}$. Dunque l'insieme dei polinomi in un'indeterminata x ha cardinalità

$$|\mathbb{R}[x]| = |\cup_{n\in\omega} \mathbb{R}^n| = \omega \otimes 2^\omega = 2^\omega = \mathfrak{c}\,,$$

se i coefficienti sono in $\mathbb{R}$. Se invece i coefficienti sono in $\mathbb{Q}$, si ha

$$|\mathbb{Q}[x]| = |\cup_{n\in\omega} \mathbb{Q}^n| = \omega \otimes \omega = \omega = \aleph_0\,.$$

Esempio 1.15.3 Numero degli aperti di $\mathbb{R}$.

Ogni aperto di $\mathbb{R}$ è riunione d'intervalli aperti aventi gli estremi razionali. Sia $\mathcal{J}$ l'insieme di tali intervalli; $\mathcal{J}$ è numerabile. Definiamo un'applicazione dalla famiglia $\mathcal{A}$ degli aperti di $\mathbb{R}$ in $\mathcal{P}(\mathcal{J})$, come segue. Ad ogni aperto $U \in \mathcal{A}$ associamo $f(U) = \{J : J \in \mathcal{J}, J \subset U\}$. Poiché f è una funzione iniettiva e $\mathcal{J}$ è numerabile, quindi $|\mathcal{P}(\mathcal{J})| \leq \mathfrak{c}$, ci sono al più $\mathfrak{c} = 2^\omega$ aperti di $\mathbb{R}$. Ma ce ne sono esattamente $\mathfrak{c}$, perché $\mathbb{R}\setminus\{r\}$ è aperto per ogni $r \in \mathbb{R}$.

Esempio 1.15.4 Cardinalità degli irrazionali.

L'insieme $\mathbb{P}$ dei numeri irrazionali in $\mathbb{R}$ ha cardinalità $\mathfrak{c}$. Infatti $\mathbb{R} = \mathbb{P}\cup\mathbb{Q}$. Poiché $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ e $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, si conclude che $|\mathbb{P}| = \mathfrak{c}$.

Esempio 1.15.5 Cardinalità dell'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

L'insieme $\mathcal{F}$ di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ ha cardinalità $|\mathcal{F}| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{R}|} = 2^{\mathfrak{c}} = 2^{2^{\aleph_0}}$, ma quella delle funzioni continue $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ è inferiore: $|\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})| = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. Infatti una funzione continua avente dominio $\mathbb{R}$ è nota se è nota la sua restrizione a $\mathbb{Q}$. Dunque $|\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})| = |{}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0\otimes\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Esempio 1.15.6 Cardinalità dell'insieme delle funzioni iniettive da ω a ω_1.

Le applicazioni da ω a ω_1 sono $|\omega_1^\omega|$. Dunque le applicazioni iniettive da ω a ω_1 sono al più $|\omega_1^\omega|$.

Esiste un'applicazione iniettiva G da ${}^\omega\omega_1$ all'insieme delle applicazioni iniettive da ω a $\omega\times\omega_1$, che denoteremo con $\mathrm{In}(\omega,\omega\times\omega_1)$. Se $f \in {}^\omega\omega_1$, definiamo $G(f) = \{\langle n,\langle n,\alpha\rangle\rangle : n\in\omega, \alpha = f(n)\}$. Se $f \neq g$, allora esiste $\overline{n}$ tale che $f(\overline{n}) \neq g(\overline{n})$e quindi $G(f)(\overline{n}) = \langle\overline{n}, f(\overline{n})\rangle \neq \langle\overline{n}, g(\overline{n})\rangle = G(g)(\overline{n})$. Cioè $G(f) \neq G(g)$. Inoltre $G(f)\colon\omega\to\omega\times\omega_1$ è iniettiva. Infatti, se $n \neq m$

$G(f)(n) = \langle n, f(n)\rangle \neq \langle m, f(m)\rangle = G(f)(m)$. D'altra parte $|\omega \times \omega_1| = |\omega_1| = \aleph_1$ e quindi il numero delle applicazioni iniettive da ω a ω_1 è pari al numero delle applicazioni iniettive da ω a $\omega \times \omega_1$. Ma abbiamo appena visto che ${}^{\omega}\omega_1 \preceq \mathrm{In}(\omega, \omega \times \omega_1)$. Cioè

$$|\omega_1^{\omega}| \geq |\mathrm{In}(\omega, \omega_1)| = |\mathrm{In}(\omega, \omega \times \omega_1)| \geq |\omega_1^{\omega}| \quad .$$

Infine è $2^{\omega} \leq |\omega_1^{\omega}| \leq (2^{\omega})^{\omega} = 2^{\omega}$. Cioè

$$|\mathrm{In}(\omega, \omega_1)| = 2^{\omega} \quad .$$

Esempio 1.15.7 Cardinalità dell'insieme dei sottoinsiemi di $\kappa \geq \omega$ aventi cardinalità κ.

$[\kappa]^{\kappa} \subset [\kappa]^{\leq\kappa} = \mathcal{P}(\kappa)$. Dunque $|[\kappa]^{\kappa}| \leq 2^{\kappa}$. Dato $A \subset \kappa$, sia $f(A) = A \times \kappa$. Ora per ogni $A \subset \kappa$, $f(A) \subset \kappa \times \kappa$ e $|f(A)| = \kappa$. Dunque

$$[\kappa]^{\kappa} \subset \mathcal{P}(\kappa) \preceq [\kappa \times \kappa]^{\kappa} \quad .$$

Poiché $[\kappa]^{\kappa} \approx [\kappa \times \kappa]^{\kappa}$, allora $2^{\kappa} \leq |[\kappa \times \kappa]^{\kappa}| \leq 2^{\kappa}$ e si ha finalmente

$$|[\kappa]^{\kappa}| = 2^{\kappa} \quad .$$

Esempio 1.15.8 Cardinalità dei buoni ordinamenti su $\kappa \geq \omega$.

Per definizione vi sono κ^{+} ordinali di cardinalità κ. I buoni ordinamenti su κ sono ovviamente non più di 2^{κ}. Come abbiamo visto in precedenza, di $A \subset \kappa$ aventi cardinalità κ ce ne sono 2^{κ}. Sia $\leq_A$ un buon ordinamento dell'ordinale κ che ha come segmento iniziale $A \subset \kappa$ (rispetto al buon ordine indotto su A da $\in$). A sottoinsiemi A distinti corrispondono buoni ordinamenti $\leq_A$ distinti. Dunque ci sono 2^{κ} buoni ordinamenti su κ.

1.16 L'assioma di regolarità o fondazione

Ricordiamo il seguente

Assioma 2. *Di Regolarità o Fondazione.*

$$\forall x\big[\exists y(y \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in x \wedge z \in y))\big] \quad .$$

Cioè ogni insieme non vuoto ha un elemento minimale rispetto a $\in$: $\forall x \neq \emptyset\, \exists\, y \in x\, (x \cap y = \emptyset)$.

Valutiamo ora le conseguenze di questo assioma.

Teorema 1.16.1 $\forall x\,(x \notin x)$.

DIMOSTRAZIONE: Se fosse $x \in x$, allora $\{x\}$ non avrebbe elemento $\in$-minimale. □

Teorema 1.16.2 *Non esiste una $\in$-catena infinita discendente; cioè se $\{x_n : n \in \omega\}$ è una successione d'insiemi, non è possibile che $\forall n \in \omega\,(x_{n+1} \in x_n)$.*

DIMOSTRAZIONE: Altrimenti $\{x_n : n \in \omega\}$ non avrebbe un elemento $\in$-minimale. □

L'affermazione del teorema suddetto, assumendo l'assioma di scelta (AS), è in effetti equivalente all'Assioma di Fondazione. Infatti, se esso vale, come si è visto, non esiste una catena infinita discendente. Si supponga poi che non valga (AF) e sia $x \neq \emptyset$ un insieme senza elemento $\in$-minimale: se $x_0 \in x$, x_0 non è $\in$-minimale; allora esiste $x_1 \in x_0 \cap x$; ma x_1 non è $\in$-minimale e dunque esiste $x_2 \in x_1 \cap x$, che non è $\in$-minimale; e così via. Se $x_n \in x$, poiché non è $\in$-minimale, esiste $x_{n+1} \in x_n \cap x$. Si trova così una successione… $x_2 \in x_1 \in x_0$ che è una $\in$-catena discendente. L'argomento qui presentato è informale, poiché non è esplicitato l'uso che si fa dell'assioma di scelta. Infatti di elementi come x_0 se ne possono trovare molti e molti $x_1 \in x_0 \cap x$, e così via. Dunque è strettamente necessario introdurre l'assioma di scelta o una sua forma debole detta delle scelte dipendenti.

Definizione 1.16.1 GERARCHIA CUMULATIVA DEGLI INSIEMI. *Definiamo*

1. *$V_0 = \emptyset$;*
2. *se α è un ordinale $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$;*
3. *se α è un ordinale limite $V_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta$.*

Lemma 1.16.3 *Ogni V_α è un insieme.*

DIMOSTRAZIONE: Infatti $V_0 = \emptyset$, che è un insieme e i successivi V_α sono costruiti o usando l'assioma di potenza, se $\alpha = \beta+1$ è un ordinale successore o l'assioma dell'unione e l'assioma di rimpiazzamento se α è un ordinale limite. Dunque, ammesso che i V_β siano insiemi per ogni $\beta < \alpha$, lo è V_α. Per induzione transfinita ogni V_α è un insieme. □

Lemma 1.16.4 *Ogni V_α è transitivo e se $\alpha < \beta$ allora $V_\alpha \subset V_\beta$.*

Dimostrazione: La dimostrazione sarà fatta per induzione transfinita.

Caso I: $\alpha = 0$. La cosa è ovvia.

Caso II: Sia α un ordinale limite, dunque $V_\alpha = \cup_{\alpha<\beta} V_\beta$. Se $x \in V_\alpha$, allora $x \in V_\beta$ per qualche $\beta < \alpha$; se $y \in x \in V_\beta$, allora $y \in V_\beta$, essendo V_β transitivo per l'ipotesi induttiva, e quindi $y \in V_\alpha$. Si osservi inoltre che, per la transitività di V_β, se $y \in V_\beta$ allora $y \subset V_\beta$, cioè $y \in \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta+1}$. Ciò significa che $V_\beta \subset V_{\beta+1}$.

Caso III: Sia $\alpha = \beta + 1$. Per ipotesi induttiva V_β è transitivo; sia $x \in V_\alpha = \mathcal{P}(V_\beta)$. Allora $x \subset V_\beta$. Se $y \in x \subset V_\beta$, allora $y \in V_\beta$ e quindi $y \subset V_\beta$ per la transitività di quest'ultimo insieme. Dunque $y \in \mathcal{P}(V_\beta) = V_\alpha$.

Si osservi infine che $V_0 = \emptyset \subset V_\alpha$ per ogni α. Se α è limite, allora, per definizione, $V_\beta \subset V_\alpha$ per ogni $\beta < \alpha$. Abbiamo poi visto che $V_\beta \subset V_{\beta+1}$. Dunque in generale si ha : $(\beta < \alpha) \rightarrow (V_\beta \subset V_\alpha)$. $\square$

Lemma 1.16.5 *Se $\alpha < \beta$ allora $V_\alpha \in V_\beta$.*

Dimostrazione: Abbiamo dimostrato in precedenza che $\alpha < \beta \rightarrow V_\alpha \subset V_\beta$. Ora se $\alpha < \beta$ evidentemente $\alpha + 1 \leq \beta$ e quindi accade ancora che $V_{\alpha+1} \subset V_\beta$. Ma $V_\alpha \in V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha) \subset V_\beta$. Dunque $V_\alpha \in V_\beta$. $\square$

In realtà, si può dimostrare di più, se assumiamo la validità dell'assioma di fondazione. Vale $\alpha < \beta \leftrightarrow V_\alpha \in V_\beta$. Si supponga $V_\alpha \in V_\beta$ e sia per assurdo $\alpha \geq \beta$. Se fosse $\alpha > \beta$ allora, per quanto dimostrato, avremmo anche $V_\beta \in V_\alpha$. Dunque l'insieme $\{V_\alpha, V_\beta\}$ non avrebbe elemento $\in$-minimale. Se fosse $\alpha = \beta$, allora $V_\alpha = V_\beta$ e quindi l'insieme $\{V_\alpha\}$ non avrebbe elemento $\in$-minimale.

Il teorema che segue afferma che, se vale (AF), tutti gli insiemi del nostro universo sono ottenuti attraverso la costruzione dei V_α. Cioè che

$$\mathbb{V} = \cup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$$

descrive l'universo di tutti gli insiemi.

Teorema 1.16.6 $\forall x \, \exists \alpha \in \mathbf{On} \, (x \in V_\alpha)$.

Dimostrazione: Si supponga per assurdo che esista $a \notin \cup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$. Ci sono due possibilità: che $a \subset \cup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$ o che ciò non valga.

Caso I: Sia $a \notin \cup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$ ma $a \subset \cup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$. Per ogni $x \in a$ si dica il *rango di x rispetto ad a* il minimo ordinale α tale che $x \subset V_\alpha$. Infatti, poiché $a \subset \cup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$, ogni $x \in a$ è anche elemento di $\cup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$, cioè $x \in V_\alpha$ e per la transitività $x \subset V_\alpha$ per qualche ordinale α. Il rango definisce una relazione funzionale tra l'insieme a e i numeri ordinali. Dunque l'immagine dell'insieme a per la funzione rango è un insieme di ordinali R (Schema d'assiomi di rimpiazzamento). Se $\beta = \sup(R) + 1$, allora $a \subset V_\beta$ e quindi $a \in V_{\beta+1}$, che è una contraddizione. Non possiamo dunque supporre che sia $a \notin \cup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$ e $a \subset \cup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$.

Caso II: Sia $a \notin \cup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$ e anche $a \not\subset \cup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$. Poiché i V_α sono transitivi, se a non è contenuto nella loro unione, la sua chiusura transitiva $TC(a)$ né può appartenere né può essere inclusa nella loro unione. Dunque potremo supporre, senza ledere la generalità, che a sia un insieme transitivo. Poiché $a \not\subset \cup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$, l'insieme $b = \{x \in a : x \notin \cup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha\} = a \setminus \cup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$ non è vuoto. Per l'assioma di regolarità, b ha un elemento $\in$-minimale y tale che $y \cap b = \emptyset$.Poiché $y \notin \cup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$, possiamo concludere che $y \neq \emptyset$. Perciò esiste $z \in y \in a$, ossia $z \in a$ per la transitività di a. Ma $z \notin y \cap b$, quindi, essendo $z \in a$, è $z \notin b$. Ciò implica $z \in \cup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$ e quindi $y \subset \cup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$; ci siamo così ricondotti al Caso I, che porta a contraddizione. $\Box$

Definizione 1.16.2 *Definiamo per ogni insieme x la nozione di* rango *dell'insieme:* rank(x).

$$\mathrm{rank}(x) = \min\{\alpha : x \subset V_\alpha\} \quad .$$

Si osservi che se $\mathrm{rank}(x) = \alpha$, allora $x \notin V_\alpha$. Infatti se $\alpha = \beta + 1$ allora $V_\alpha = \mathcal{P}(V_\beta)$ e quindi se fosse $x \in V_\alpha$ sarebbe $x \subset V_\beta$, contro la definizione del rango. Se α è limite, $x \in V_\alpha$ significherebbe $x \in V_\beta$ per $\beta < \alpha$. Per la transitività di V_β ciò significherebbe $x \subset V_\beta$, ancora contro la definizione di rango. Dunque se $\mathrm{rank}(x) = \alpha$, α è il minimo ordinale tale che $x \in V_{\alpha+1}$; questa è una definizione alternativa di $\mathrm{rank}(x)$. Si tenga dunque presente che $x \in V_\beta$ se e solo se $\mathrm{rank}(x) < \beta$. Ossia

$$V_\alpha = \{x : \mathrm{rank}(x) < \alpha\} \quad .$$

Lemma 1.16.7 *Valgono i seguenti fatti*

1. *Se $x \in y$, allora* $\mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$.

2. $\mathrm{rank}(y) = \sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 : x \in y\}$.

DIMOSTRAZIONE:

(1) Si supponga $\mathrm{rank}(y) = \beta$. Allora $y \notin V_\beta$, ma $y \subset \beta$. Se $x \in y$ è perciò $x \in V_\beta$ e quindi $\mathrm{rank}(x) < \beta = \mathrm{rank}(y)$.

(2) Come abbiamo appena mostrato $x \in y$ implica $\mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$ e quindi $\mathrm{rank}(x) + 1 \leq \mathrm{rank}(y)$. Dunque $\alpha = \sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 : x \in y\} \leq \beta = \mathrm{rank}(y)$. Sia poi $x \in y$; allora per la definizione di α è $\mathrm{rank}(x) + 1 \leq \alpha$ e dunque $\mathrm{rank}(x) < \alpha$, cioè $x \in V_\alpha$. In conclusione: $x \in y \to x \in V_\alpha$, cioè $y \subset V_\alpha$. Dunque $\mathrm{rank}(y) = \beta \leq \alpha$. $\Box$

Lemma 1.16.8 *Per ogni* $\alpha \in \mathbf{On}$ *si ha* $\mathrm{rank}(\alpha) = \alpha$.

Dimostrazione: (Per induzione transfinita). Ovviamente $\mathrm{rank}(0) = 0$ ($\emptyset \subset \emptyset$). Supponiamo che per ogni $\beta < \alpha$ sia $\mathrm{rank}(\beta) = \beta$. Se $\alpha = \delta + 1$, $\delta \subset V_\delta$ e quindi $\{\delta\} \subset \mathcal{P}(V_\delta) = V_\alpha$. Allora $\alpha = \delta \cup \{\delta\} \subset V_\alpha$ e certamente non è sottoinsieme di V_δ poiché $\{\delta\} \not\subset V_\delta$. Se α è ordinale limite abbiamo $\forall \beta \in \alpha$, $\beta \in V_{\beta+1} \subset V_\alpha$, dunque $\alpha \subset V_\alpha$, mentre $\alpha \not\subset V_\beta$, per ogni $\beta < \alpha$; infatti $\beta \in \alpha$, ma $\beta \notin V_\beta$. $\square$

Ciò si può esprimere anche con la formula $\mathbb{V} \cap \alpha = V_\alpha \cap \alpha = \alpha$.

Vale il seguente

Teorema 1.16.9 $\mathbb{V} = \cup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$ *se e solo se ogni insieme non vuoto ha un elemento* $\in$*-minimale. Cioè se e solo se vale l'assioma di regolarità.*

Dimostrazione: Il precedente Teorema 1.16.3 dà la sufficienza. Si supponga ora che $\mathbb{V} = \cup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$ e $x \in \mathbb{V}$, cioè che x sia un insieme. Sia x non vuoto e sia $a = \{\alpha : \exists y \in x(\mathrm{rank}(y) = \alpha)\}$. Sia poi $\alpha_0 = \min(a)$. Allora se $\mathrm{rank}(y) = \alpha_0$ deve essere $y \cap x = \emptyset$. Infatti se fosse $z \in y \cap x$, si avrebbe $\mathrm{rank}(z) < \mathrm{rank}(y) = \alpha_0$ contro la minimalità di y. $\square$

Si ha per esempio

Esempio 1.16.1 $V_0 = \emptyset$; $V_1 = \{\emptyset\}$; $V_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
$V_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$; ...

Esercizio 1.16.2 *Sia* $\mathrm{rank}(x) = \mathrm{rank}(y) = \alpha$. *Si dimostri che vale*

1. $\mathrm{rank}(\{x, y\}) = \alpha + 1$;
2. $\mathrm{rank}(\langle x, y\rangle) = \alpha + 2$;
3. $\mathrm{rank}(x \cup y) = \alpha$;
4. $\mathrm{rank}(\cup x) \leq \alpha$;
5. *Si dia un esempio con* $\mathrm{rank}(\cup x) < \alpha$.

1.17 L'universo costruibile di Gödel

Daremo una trattazione abbreviata e semplificata della costruzione di un modello della Teoria degli insiemi dovuta a Gödel e detta dell'*Universo costruibile*. La trattazione è necessariamente incompleta, ma si spera sia sufficiente a rendere l'idea della costruzione, che potrà essere studiata in trattati più completi quali T. Jech: "Set Theory", Academic Press (1978), K. Kunen "Set Theory: an introduction to independence proofs" North–Holland (1980) e l'articolo di K.J. Devlin "Constructibility" in Handbook of Mathematical Logic, North-Holland (1977).

Definizione 1.17.1 *Sia X un insieme e φ una formula. Denoteremo con φ^X e diremo* relativizzata a X *la formula derivata dalla φ che si ottiene sostituendo ogni evenienza in φ di $\forall x_i$ con $\forall x_i \in X$ e ogni evenienza di $\exists x_i$ con $\exists x_i \in X$.*

Definizione 1.17.2 *Sia X un insieme. Si dice che un insieme A è* definibile da X *se vi è una formula φ con parametri in X tale che*

$$A = \{x \in X : \varphi^X(x)\}.$$

L'insieme di tutti gli insiemi definibili da X si denota con $\mathrm{Def}(X)$.

Si osservi che ogni insieme X è definibile a partire da sé stesso, usando la formula $\varphi(x) \equiv (x = x)$. Infatti si ha, tautologicamente:

$$X = \{x \in X : x = x\}.$$

Esempio 1.17.1 *Si considerino i seguenti esempi basilari*

(a) L'insieme dei numeri pari è definibile da ω.

(b) Per ogni ordinale α, se $\alpha \subset X$ e X è transitivo, allora α è definibile da X.

(c) Se $a \in X$ e X è transitivo, a è definibile da X.

(d) Se $a \in X$, $\{a\}$ è definibile da X.

(e) Se $a, b \in X$, allora $\{a, b\}$ è definibile da X.

(f) Se $a \in X$ e X è transitivo, $\cup a$ è definibile da X.

DIMOSTRAZIONE:

(a) Basta considerare la formula "$\exists y(x = y + y)$" e la sua relativizzazione a ω.

(b) Se $\alpha \in X$, si consideri la formula "$x \in \alpha$". Altrimenti $\alpha = \mathbf{On} \cap X$ e si consideri la formula che esprime"x è un ordinale".

(c) Si consideri la formula "$x \in a$".

(d) Si consideri la formula "$x = a$".

(e) Si consideri la formula "$x = a \vee x = b$".

(f) Si consideri la formula "$\exists y\,(x \in y \in a)$". $\square$

Tuttavia molto resta escluso da Def(x) se x è un insieme infinito.

Teorema 1.17.1 *Per ogni insieme infinito x vi è qualche $y \subset x$ che non è definibile da x.*

DIMOSTRAZIONE: Poiché una formula è una successione finita di elementi che sono o simboli del linguaggio o parametri in x, il numero di formule atte a definire insiemi in Def(x) è : $|x| + \omega = |x|$, poiché x si suppone infinito. Dunque $|\text{Def}(x)| \leq |x| < 2^{|x|}$. Perciò la maggior parte di elementi di $\mathcal{P}(x)$ non è un elemento di Def(x). $\square$

Definiamo ora l'Universo Costruibile di Gödel che indicheremo con $\mathbb{L}$.

Definizione 1.17.3 *Definiamo una gerarchia cumulativa come segue:*

1. $L_0 = \emptyset$;

2. *Se α è un ordinale limite,* $L_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} L_\beta$;

3. *Se* $\alpha = \beta + 1$, $L_\alpha = \text{Def}(L_\beta)$.

Finalmente

$$\mathbb{L} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} L_\alpha \quad .$$

Lemma 1.17.2 *Ogni L_α è un insieme transitivo.*

DIMOSTRAZIONE: Evidentemente ogni L_α è un insieme in base alla definizione. La transitività verrà dimostrata per induzione. Ovviamente L_0 è transitivo. Se supponiamo che L_β sia transitivo per ogni $\beta < \alpha$, mostreremo che anche L_α lo è . Sia α limite. $L_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} L_\beta$. Se $x \in L_\alpha$ e $y \in x$, allora $x \in L_\beta$ per qualche $\beta < \alpha$. La transitività di L_β implica che se $y \in x$ allora $y \in L_\beta \subset L_\alpha$ e dunque $y \in L_\alpha$; cioè L_α è transitivo. Se poi $\alpha = \beta + 1$, allora $L_\alpha = \text{Def}(L_\beta)$. Se $x \in L_\alpha$, allora $x = \{y \in L_\beta \colon \varphi^{L_\beta}(y)\}$. Ma se $y \in L_\beta$, y è definibile da L_β, dunque $y \in L_\alpha$. Anche in questo caso L_α è transitivo. $\square$

Lemma 1.17.3 *$L_\beta \in L_\alpha$ se e solo se $\beta < \alpha$.*

DIMOSTRAZIONE: Se $\alpha = \beta + 1$ allora $L_\beta \in L_\alpha = \text{Def}(L_\beta)$ per costruzione. Se α è limite o comunque $\beta < \beta + 1 < \alpha$ si ha $L_\beta \in L_{\beta+1} \subset L_{\beta+2} \subset L_\alpha$, per la transitività di $L_{\beta+2}$. Si verifica facilmente l'implicazione opposta. $\square$

Lemma 1.17.4 *Per ogni ordinale α vale $\mathbb{L} \cap \alpha = L_\alpha \cap \alpha = \alpha$ e $\alpha \in L_{\alpha+1}$.*

Dimostrazione: La dimostrazione si ottiene ripetendo quasi parola per parola quella del Lemma 1.16.8. $\square$

Dunque si può concludere che **On** $\subset \mathbb{L}$, avendo esteso la notazione di inclusione alle classi proprie. Anzi gli ordinali sono gli stessi insiemi sia in $\mathbb{V}$ che in $\mathbb{L}$. Infatti per ogni ordinale α si ha $\alpha = \mathbb{V} \cap \alpha = \mathbb{L} \cap \alpha$. Si vede infine facilmente che la classe $\mathbb{L}$ è transitiva.

Teorema 1.17.5 (Gödel). *$\mathbb{L}$ è un modello di* ZF. *Cioè $\mathbb{L}$ soddisfa tutti gli assiomi della teoria degli insiemi, avendo per il momento escluso l'assioma di scelta.*

Omettiamo la dimostrazione, che però può essere fatta completamente e abbastanza facilmente utilizzando la definizione "elementare" di $\mathrm{Def}(x)$ qui presentata. Gödel ha dimostrato che $\mathbb{L}$ soddisfa anche l'assioma di scelta, ma la dimostrazione è più sofisticata e richiede l'aritmetizzazione del linguaggio che descrive $\mathbb{L}$. Con tali tecniche è stato pure dimostrato che GCH vale in $\mathbb{L}$. Attraverso il modello $\mathbb{L}$ della teoria degli insiemi, Gödel è dunque riuscito a dimostrare che l'assioma di scelta non si può negare in ZF e che GCH non si può negare in ZFC.

Abbiamo già ricordato le nozioni di cardinali debolmente e fortemente inaccessibili e che se vale GCH i cardinali debolmente inaccessibili sono anche fortemente inaccessibili. Si conclude che

Lemma 1.17.6 *Un cardinale debolmente inaccessibile in $\mathbb{L}$ è fortemente inaccessibile.*

Osserviamo ora che se λ è un cardinale di $\mathbb{L}$, cioè un ordinale iniziale in $\mathbb{L}$, allora $(\lambda^+)^{\mathbb{L}}$ è il minimo ordinale α di $\mathbb{L}$ tale che non esiste in $\mathbb{L}$ una funzione f biiettiva con $\mathrm{dom}(f) = \lambda$ e $\mathrm{im}(f) = \alpha$. Cioè $(\lambda^+)^{\mathbb{L}}$ è quello che $\mathbb{L}$ "pensa" sia λ^+. Dunque $(\lambda^+)^{\mathbb{L}} \leq \lambda^+$, se λ è un cardinale in $\mathbb{V}$; altrimenti $(\lambda^+)^{\mathbb{L}} \leq |\lambda|^+$. Si noti infine che ogni cardinale in $\mathbb{V}$ è anche un cardinale in $\mathbb{L}$, ma non viceversa. Infatti mentre la nozione di ordinale coincide in $\mathbb{L}$ e in $\mathbb{V}$, come dimostrato nel Lemma 1.17.4 la nozione di ordinale iniziale, cioè di cardinale, in $\mathbb{L}$ dipende da un minore numero di funzioni rispetto a quelle presenti in $\mathbb{V}$. Dunque è concepibile che un ordinale possa essere un cardinale in $\mathbb{L}$ senza esserlo in $\mathbb{V}$.

Lemma 1.17.7 *Se κ è debolmente inaccessibile (in $\mathbb{V}$), allora è fortemente inaccessibile in $\mathbb{L}$.*

Dimostrazione: Poiché $\mathbb{L} \subset \mathbb{V}$ se non vi è $f\colon \alpha \to \kappa$, con $\alpha < \kappa$ e f cofinale in $\mathbb{V}$, non vi è una tale funzione neppure in $\mathbb{L}$. Dunque un cardinale regolare in $\mathbb{V}$ resta tale in $\mathbb{L}$. Poiché, come si è visto, $(\lambda^+)^{\mathbb{L}} \leq \lambda^+$ un cardinale limite in $\mathbb{V}$ lo è in $\mathbb{L}$. Finalmente, un cardinale debolmente inaccessibile in $\mathbb{V}$ è debolmente e quindi fortemente inaccessibile in $\mathbb{L}$.

Si può dimostrare

Teorema 1.17.8 *Se κ è un cardinale fortemente inaccessibile, allora V_κ è un modello di* ZFC.

Tenuto conto di quanto detto sulle proprietà di $\mathbb{L}$ si ottiene allora come corollario

Corollario 1.17.9 *Se κ è debolmente inaccessibile, allora L_κ è un modello di* ZFC *e di* GCH.

Ricordando il Secondo Teorema d'incompletezza di Gödel e cioè che non si può provare la consistenza di una teoria rimanendo all'interno della teoria stessa se essa è sufficientemente forte da contenere l'aritmetica, allora si può concludere che non si può dimostrare in ZFC l'esistenza di un cardinale fortemente e neppure di uno debolmente inaccessibile. Altrimenti saremmo in grado di produrre un modello insiemistico V_κ o L_κ di ZFC, che sarebbe perciò consistente. L'esistenza di cardinali inaccessibili non discende dagli assiomi di ZFC. Può essere assunta come un ulteriore assioma da aggiungere eventualmente a quelli di ZFC. Si entra così nell'ambito delle assunzioni d'esistenza dei cosiddetti "grandi cardinali" sui quali non ci soffermeremo oltre.

Ricordiamo infine che Gödel ha provato

Teorema 1.17.10 *Ogni classe che soddisfi gli assiomi di* ZF *e contenente la classe degli ordinali, necessariamente contiene $\mathbb{L}$ come sottoclasse.*

Abbiamo ottenuto un modello $\mathbb{L}$ della teoria degli insiemi oltre al modello "naturale" $\mathbb{V}$. Possiamo supporre che valga $\mathbb{V} = \mathbb{L}$? Si tratta di un'affermazione sulla natura dell'universo degli insiemi che non può essere confutata in ZFC. Infatti essa vale ovviamente in $\mathbb{L}$ poiché in tale classe sono soddisfatti tutti gli assiomi di ZFC. Ma si può dimostrare, con metodi ai quali accenneremo in un capitolo successivo, che esistono modelli di ZFC nei quali quest'affermazione non vale. Tale è per esempio ogni modello nel quale non vale CH. Un siffatto modello è stato costruito da Cohen nel 1963, utilizzando una tecnica detta del "forcing" (in italiano "costrizione"). Dunque $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ risulta essere indipendente dagli assiomi di ZFC. Tale assunzione è nota come "assioma di costruibilità". Essa ha conseguenze importanti come la validità del "principio $\diamondsuit$", che illustreremo nel seguito. Altre assunzioni indipendenti dagli assiomi di ZFC sono la ben nota CH e il cosiddetto "assioma di Martin", che incontreremo nel seguito. Qui assioma non significa affermazione di per sé evidente e basilare. Esso indica piuttosto un'assunzione che ha importanti conseguenze riguardanti la descrizione e le proprietà matematiche della classe degli insiemi. Assunzione della quale si può dimostrare l'indipendenza dagli assiomi della Teoria degli Insiemi (ZFC, per esempio) e che completa gli assiomi stessi in modo da permettere la decisione di problemi quali ad esempio CH, altrimenti indecidibili. Esempi di nuovi assiomi in questo senso sono, oltre CH stesso e l'assioma di Martin, altri "assiomi" quali l'esistenza di un cardinale misurabile o il Massimo di Martin, ai quali accenneremo in seguito.

Capitolo 2

Combinatoria Infinita

2.1 Famiglie pressoché disgiunte e quasi disgiunte

Definizione 2.1.1 *Sia κ un cardinale infinito. Due sottoinsiemi x, y di κ sono detti* <u>*pressoché disgiunti*</u> *(almost disjoint) se $|x \cap y| < \kappa$.*

Una famiglia pressoché disgiunta (p.d.) è un insieme $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ tale che ogni $x \in \mathcal{A}$ ha cardinalità κ, e due elementi distinti di $\mathcal{A}$ sono pressoché disgiunti. Una famiglia p.d. è massimale se non esiste alcun'altra famiglia p.d. che la contenga propriamente.

Il Lemma di Zorn assicura che per ogni famiglia p.d. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ esiste una famiglia $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ p.d. massimale.

Infatti sia $\mathcal{A}$ una famiglia p.d. e consideriamo $\mathcal{F} = \{\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\kappa) : \mathcal{B} \supset \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ è p.d.$\}$. Si ordini parzialmente $\mathcal{F}$ per inclusione. Se $\mathcal{C}$ è una catena non vuota in $\mathcal{F}$ allora $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$, poiché se $x, y \in \bigcup \mathcal{C}$ si ha $x \in C'$, $y \in C''$ e, per es., $C' \subset C''$ quindi $x, y \in C''$ e pertanto $|x| = |y| = \kappa$ ma $|x \cap y| < \kappa$. Dunque $\mathcal{F}$ ha un elemento massimale $\mathcal{B}$.

Osserviamo che essere p.d. è cosa ben diversa da essere disgiunta. Infatti dimostreremo nel seguente Teorema che ogni famiglia p.d. massimale di sottoinsiemi di κ, cardinale regolare, ha cardinalità maggiore di κ; mentre non vi può essere una famiglia di sottoinsiemi di κ a due a due disgiunti che abbia cardinalità maggiore di κ. Si vede facilmente che c'è una famiglia di κ sottoinsiemi a due a due disgiunti la cui unione è κ e quindi tale famiglia è massimale. Per le famiglie p.d. vale invece il seguente

Teorema 2.1.1 *Sia κ un cardinale regolare.*

(a) *Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ è p.d. e $|\mathcal{A}| = \kappa$, allora $\mathcal{A}$ non può essere massimale.*

(b) *Vi è una famiglia p.d. massimale di cardinalità $\geq \kappa^+$.*

Dimostrazione:

(a) Sia $\mathcal{A} = \{A_\xi : \xi < \kappa\}$. Definiamo $B_\xi = A_\xi \setminus \bigcup_{\eta<\xi} A_\eta$: ovviamente è $B_\xi \neq \emptyset$ per ogni $\xi < \kappa$, poiché κ è regolare, $B_\xi = A_\xi \setminus \bigcup_{\eta<\xi}(A_\xi \cap A_\eta)$ e $|A_\xi \cap A_\eta| < \kappa$. Si prenda ora $\beta_\xi \in B_\xi$: i β_ξ sono distinti perché i B_ξ sono disgiunti a due a due. Allora $D = \{\beta_\xi : \xi < \kappa\}$ ha cardinalità κ e $D \cap A_\xi$ può contenere solo i β_η con $\eta \leq \xi$, perciò $|D \cap A_\xi| < \kappa$ e $D \notin \mathcal{A}$. Dunque $\mathcal{A}$ non può essere massimale.

(b) Poiché esiste $\mathcal{B}$ p.d. massimale, segue dal punto (a) che $|\mathcal{B}| > \kappa$ cioè $|\mathcal{B}| \geq \kappa^+$. □

Si può dire qualcosa di più preciso sulla cardinalità di una famiglia p.d. di sottoinsiemi di κ, per certi cardinali κ.

Teorema 2.1.2 *Se $\kappa \geq \omega$ e $2^{<\kappa} = \kappa$, allora esiste una famiglia p.d. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ con $|\mathcal{A}| = 2^\kappa$*

Dimostrazione: Sia $I = \{x \subset \kappa : \sup(x) < \kappa\}$. Poiché $2^{<\kappa} = \kappa$, si ha $|I| = \kappa$. Per ogni $X \subset \kappa$, poniamo $A_X = \{X \cap \alpha : \alpha < \kappa\}$; se X ha cardinalità κ anche $|A_X| = \kappa$, e se $X \neq Y$ allora $|A_X \cap A_Y| < \kappa$ perché, detto β un elemento di X che non appartiene a Y (o viceversa), abbiamo $A_X \cap A_Y \subset \{X \cap \alpha : \alpha \leq \beta\}$. Pertanto $\mathcal{A} = \{A_X : X \subset \kappa \ \wedge \ |X| = \kappa\}$ è una famiglia p.d. di sottoinsiemi di I con $|\mathcal{A}| = 2^\kappa$ e quindi, presa una qualunque applicazione biiettiva f di I in κ, si ha che $\{f[A] : A \in \mathcal{A}\}$ è una famiglia p.d. di 2^κ sottoinsiemi di κ. □

L'ipotesi $2^{<\kappa} = \kappa$ non può essere eliminata. L'esistenza di una famiglia p.d. di 2^{ω_1} sottoinsiemi di ω_1 non può essere provata né confutata dall'assunzione $2^\omega = 2^{\omega_1} = \omega_3$; inoltre se κ è un cardinale infinito tale che $2^\kappa > \kappa^+$, l'esistenza di una famiglia p.d. massimale di κ^+ sottoinsiemi di κ è indipendente dagli assiomi della teoria degli insiemi.

Introduciamo ora il concetto di Δ-sistema

Definizione 2.1.2 *Una famiglia di insiemi $\mathcal{A}$ è detta un Δ-sistema o una famiglia quasi disgiunta se esiste un insieme fisso r, detto radice, tale che $a \cap b = r$, per $a, b \in \mathcal{A}$ distinti.*

Il principale risultato per le famiglie quasi disgiunte è il cosiddetto lemma del Δ-sistema, o lemma di Šanin.

Teorema 2.1.3 *Se $\mathcal{A}$ è una famiglia più che numerabile di insiemi finiti, esiste una famiglia più che numerabile $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ che è un Δ-sistema.*

DIMOSTRAZIONE: È un caso particolare (con $\kappa = \omega$ e $\theta = \omega_1$) del prossimo teorema. Tuttavia ci sembra utile darne anche una dimostrazione diretta.

Poiché $\mathcal{A}$ è non numerabile, esistono una famiglia non numerabile $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ e un numero naturale $n > 0$ tali che $|x| = n$ per ogni $x \in \mathcal{A}'$. Se $n = 1$ allora $\mathcal{A}'$ stesso è un Δ-sistema, di radice $r = \emptyset$. Ora supponiamo il teorema vero per un certo n e mostriamo che vale per $n + 1$. Ci sono due casi.

1. Esiste un a che appartiene a un'infinità non numerabile di elementi di $\mathcal{A}'$.

   Poniamo $\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{A}' : a \in x\}$ e $\mathcal{C}^* = \{x \setminus \{a\} : x \in \mathcal{C}\}$: poiché $|y| = n$ per ogni $y \in \mathcal{C}^*$, per l'ipotesi induttiva esiste una sottofamiglia non numerabile $\mathcal{B}^*$ di $\mathcal{C}^*$, che è un Δ-sistema di radice r^*; allora $\mathcal{B} = \{x \cup \{a\} : x \in \mathcal{C}^*\}$ è contenuta in $\mathcal{C}$ (quindi in $\mathcal{A}$), è non numerabile ed è un Δ-sistema di radice $r = r^* \cup \{a\}$.

2. Ogni elemento a appartiene al più ad un'infinità numerabile di elementi di $\mathcal{A}'$.

   Costruiamo per induzione transfinita su ω_1 una famiglia $\mathcal{B} = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, in modo che x_α sia disgiunto da x_ξ per ogni $\xi < \alpha$: ciò è possibile perché gli x_ξ con $\xi < \alpha$ sono al più un'infinità numerabile e tutti i loro elementi appartengono al più ad un'infinità numerabile di $x \in \mathcal{A}'$, mentre $\mathcal{A}'$ è non numerabile. Dunque $\mathcal{B}$ è una famiglia disgiunta, cioè un Δ-sistema di radice $\emptyset$. □

Più in generale:

Teorema 2.1.4 *Sia κ un cardinale infinito, sia $\theta > \kappa$ regolare e, per ogni $\alpha < \theta$, sia $|\alpha^{<\kappa}| < \theta$. Se $|\mathcal{A}| \geq \theta$ e tutti gli elementi di $\mathcal{A}$ hanno cardinalità minore di κ, allora esiste $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ tale che $|\mathcal{B}| = \theta$ e $\mathcal{B}$ è un Δ-sistema.*

DIMOSTRAZIONE: Assumiamo, sfoltendo se necessario $\mathcal{A}$, che $|\mathcal{A}| = \theta$, cosicché $|\bigcup \mathcal{A}| \leq \theta$. Dal momento che non ci interessa la natura degli elementi di $\mathcal{A}$ possiamo addirittura supporre $\bigcup \mathcal{A} \subset \theta$, per cui ogni $x \in \mathcal{A}$ ha un tipo d'ordine minore di κ come sottoinsieme bene ordinato di θ. Poiché $\theta > \kappa$ e θ è regolare, esiste qualche $\rho < \kappa$ tale che $\mathcal{A}_1 = \{x \in \mathcal{A} : \text{tipo}(x) = \rho\}$ ha cardinalità θ; fissiamo tale ρ e lavoriamo solo con $\mathcal{A}_1$.

L'ipotesi che $|\alpha^{<\kappa}| < \theta$ per ogni $\alpha < \theta$, implica che meno di θ elementi di $\mathcal{A}_1$ sono sottoinsiemi di α; allora $\bigcup \mathcal{A}_1$ è illimitato in θ. Dati $x \in \mathcal{A}_1$ e $\xi < \rho$, sia $x(\xi)$ lo ξ-esimo elemento di x; poiché θ è regolare, vi è qualche ξ

tale che $\{x(\xi) : x \in \mathcal{A}_1\}$ è illimitato in θ: sia dunque ξ_0 il minimo di questi ξ (ξ_0 può anche essere 0). Ponendo

$$\alpha_0 = \sup\{x(\eta) + 1 : x \in \mathcal{A}_1 \ \wedge \ \eta < \xi_0\}$$

si ha $\alpha_0 < \theta$ e $x(\eta) < \alpha_0$ per tutti gli $x \in \mathcal{A}_1$ e tutti gli $\eta < \xi_0$. Ora, per ricorsione transfinita su $\mu < \theta$, si prenda $x_\mu \in \mathcal{A}_1$ tale che

$$x_\mu(\xi_0) > \max\{\alpha_0, \sup\{x_\nu(\eta) : \eta < \rho \ \wedge \ \nu < \mu\}\}.$$

Se $\mathcal{A}_2 = \{x_\mu : \mu < \theta\}$ allora $|\mathcal{A}_2| = \theta$ e $x \cap y \subset \alpha_0$ per $x, y \in \mathcal{A}_2$ distinti; essendo poi $|\alpha_0^{<\kappa}| < \theta$, esistono $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_2$ e $r \subset \alpha_0$ tali che $|\mathcal{B}| = \theta$ e, per ogni $x \in \mathcal{B}$, $x \cap \alpha_0 = r$: pertanto $\mathcal{B}$ è un Δ-sistema, di radice r. $\square$.

2.2 L'assioma di Martin

Cominciamo con alcune definizioni inerenti gli ordini parziali.

Definizione 2.2.1 *Diciamo che $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ è un quasi-ordine parziale se $\leq$ è una relazione riflessiva e transitiva. Si parla di ordine parziale quando la relazione è anche antisimmetrica. Gli elementi di $\mathbb{P}$ si dicono anche condizioni e, se $p \leq q$, diremo che p è un estensione di q.*

Una catena C in $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ è un sottoinsieme di $\mathbb{P}$ tale che $\forall p, q \in C$ $(p \leq q \ \vee \ q \leq p)$. Due elementi $p, q \in \mathbb{P}$ sono compatibili se $\exists r \in \mathbb{P}$ $(r \leq p \ \wedge \ r \leq q)$; in caso contrario li diciamo incompatibili e scriviamo $p \perp q$. Un'anticatena è un insieme $A \subset \mathbb{P}$ i cui elementi sono a due a due incompatibili; diremo che $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ è <u>ccc</u> se ogni anticatena è numerabile.

Esempio 2.2.1 *$\mathbb{P} = \omega_1$ e $\leq$ è l'ordinamento usuale. In questo caso ogni sottoinsieme non vuoto è una catena.*

Se A è un'anticatena non vuota allora $|A| = 1$. Dunque questo $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ è ccc.

Esempio 2.2.2 *Dato $X \neq \emptyset$, sia $\mathbb{P} = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ e interpretiamo $\leq$ come la relazione d'ordine d'inclusione $\subset$. Si ha $p \perp q$ se e solo se $p \cap q = \emptyset$: dunque questo $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ è ccc se e solo se X è numerabile.*

Definizione 2.2.2 *Sia $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ un quasi-ordine parziale. Un sottoinsieme D si dice denso in $\mathbb{P}$ se per ogni $p \in \mathbb{P}$ esiste $q \in \mathbb{P}$ tale che $q \leq p$ e $q \in D$. Diciamo inoltre che $G \subset \mathbb{P}$ è un filtro (in $\mathbb{P}$) se:*

(a) $\forall p, q \in G \quad \exists r \in G \quad (r \leq p \ \wedge \ r \leq q)$;

(b) $\forall p \in G \quad \forall q \in \mathbb{P} \quad (p \leq q \ \rightarrow \ q \in G)$.

Se $\mathcal{D}$ è una famiglia di insiemi densi, diciamo che un filtro G è $\mathcal{D}$-generico se ha intersezione non vuota con ogni elemento di $\mathcal{D}$.

Lemma 2.2.1 (Rasiowa–Sikorski). *Sia $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ un ordine parziale, e $\mathcal{D}$ una famiglia di sottoinsiemi densi in $\mathbb{P}$. Se $\mathcal{D}$ è numerabile allora esiste un filtro $\mathcal{D}$-generico.*

Dimostrazione: Scriviamo $\mathcal{D}$ come $\{D_i : i \in \omega\}$, e costruiamo una successione per ricorrenza come segue: sia $g_0 \in D_0$ arbitrario e, per ogni $n \in \omega$, scegliamo $g_{n+1} \in D_{n+1}$ con $g_{n+1} \leq g_n$ (ciò è possibile poiché D_{n+1} è denso). Posto $G = \{x \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega \; g_n \leq x\}$, si verifica immediatamente che G è un filtro $\mathcal{D}$-generico. $\Box$

Definizione 2.2.3 *L'assioma di Martin è la seguente affermazione:*

(MA) *Se un ordine parziale $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ è ccc allora, per ogni famiglia $\mathcal{D}$ di sottonsiemi densi in $\mathbb{P}$ con $|\mathcal{D}| < 2^\omega$, esiste un filtro $\mathcal{D}$-generico in $\mathbb{P}$.*

In generale possiamo considerare la seguente affermazione, dipendente dal cardinale κ:

(MA(κ)) *Se un ordine parziale $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ è ccc allora, per ogni famiglia $\mathcal{D}$ di sottoinsiemi densi in $\mathbb{P}$ con $|\mathcal{D}| \leq \kappa$, esiste un filtro $\mathcal{D}$-generico in $\mathbb{P}$.*

Il lemma di Rasiowa–Sikorski mostra che MA(ω) è sempre vero. Dunque MA equivale ad affermare che è vero MA(κ) per ogni κ maggiore di ω e minore di 2^ω. In particolare è ovvio che CH implica MA. D'altra parte si è dimostrato che l'assioma di Martin è anche consistente con $\neg$CH (altrimenti esso non avrebbe alcun interesse).

Lemma 2.2.2

(a) Se $\kappa' > \kappa$ allora MA(κ') implica MA(κ);

(b) MA(2^ω) *è falso.*

Dimostrazione: Il punto (a) è evidente; per dimostrare (b) si effettua la seguente costruzione, interessante di per sé. Sia $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ l'ordine parziale così definito:

$$\mathbb{P} = \{p \subset \omega \times 2 : |p| < \omega \;\wedge\; p \text{ è una funzione}\}$$

e $\leq$ è l'inclusione inversa; in altre parole gli elementi di $\mathbb{P}$ sono funzioni parziali (finite) da ω a $\{0, 1\}$ e, per $p, q \in \mathbb{P}$, si ha $p \leq q$ se e solo se la funzione p estende la funzione q. È chiaro che $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ è ccc, in quanto $|\mathbb{P}| = \omega$. Se G è un filtro in $\mathbb{P}$ allora gli elementi di G sono a due a due compatibili e perciò $\bigcup G$ è una funzione, il cui dominio è contenuto in ω (ma non necessariamente finito).

Per ogni $n \in \omega$ sia $D_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in \mathrm{dom}(p)\}$: l'insieme D_n è chiaramente denso in $\mathbb{P}$; inoltre se G è un filtro che interseca ogni D_n allora il dominio di $\bigcup G$ è tutto ω. Analogamente, per $h \in {}^{\omega}2$ poniamo $E_h = \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in \mathrm{dom}(p)\ (p(n) \neq h(n))\}$: anche E_h è denso in $\mathbb{P}$ e, se un filtro G interseca E_h, la funzione $\bigcup G$ non può coincidere con h. Sia dunque $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{E_h : h \in {}^{\omega}2\}$: è $|\mathcal{D}| = 2^{\omega}$ quindi, se fosse vero $\mathrm{MA}(2^{\omega})$, esisterebbe un filtro $\mathcal{D}$-generico in $\mathbb{P}$, diciamo F; ma allora $f = \bigcup F$ sarebbe una funzione di ω in 2 diversa da ogni funzione $h\colon \omega \to 2$, il che è impossibile. Pertanto $\mathrm{MA}(2^{\omega})$ è falso. □

Nel lemma di Rasiowa–Sikorski non si fa l'ipotesi che $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ sia ccc, quindi si potrebbe pensare di rendere più forte l'enunciato dell'assioma di Martin eliminando tale ipotesi: tuttavia così si ottiene un enunciato inconsistente, come ora dimostriamo.

Esempio 2.2.3 *Esistono un ordine parziale $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ e una famiglia $\mathcal{D}$ di sottoinsiemi densi in $\mathbb{P}$, con $|\mathcal{D}| = \omega_1$, tali che nessun filtro in $\mathbb{P}$ sia $\mathcal{D}$-generico.*

Dimostrazione: Sia $\mathbb{P}$ l'insieme delle funzioni parziali finite da ω a ω_1, e sia $\leq$ l'inclusione inversa, come nella dimostrazione del lemma precedente. Per ogni $\alpha < \omega_1$, l'insieme $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} : \alpha \in \mathrm{im}(p)\}$ è denso in $\mathbb{P}$. Infatti preso un qualunque $p \in \mathbb{P}$, sia $n \notin \mathrm{dom}(p)$; ponendo $p' = p \cup \{\langle n, \alpha \rangle\}$ si ha $p' \leq p$ e $p' \in D_\alpha$. Ora si consideri $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$: se un filtro G in $\mathbb{P}$ fosse $\mathcal{D}$-generico allora $\bigcup G$ sarebbe una funzione il cui dominio è contenuto in ω e la cui immagine è ω_1, il che è impossibile. □

Naturalmente l'ordine parziale dell'esempio precedente non è ccc: infatti $\{\{\langle 0, \alpha \rangle\} : \alpha < \omega_1\}$ è un anticatena non numerabile.

L'assioma di Martin permette di rispondere a questioni come le seguenti:

Q1. Se $\kappa < 2^{\omega}$, è $2^{\kappa} = 2^{\omega}$?

Q2. Se $\kappa < 2^{\omega}$, è vero che ogni famiglia p.d. massimale in $\mathcal{P}(\omega)$ ha cardinalità maggiore di κ?

Per decidere tali questioni, costruiamo un opportuno ordine parziale. Data una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di ω, sia $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ l'insieme delle coppie ordinate $\langle s, F \rangle$, dove s è un sottoinsieme finito di ω e F un sottoinsieme finito di $\mathcal{A}$; definiamo la relazione $\leq$ su $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ nel seguente modo:

$$\langle s', F' \rangle \leq \langle s, F \rangle \iff s \subset s' \quad \wedge \quad F \subset F' \quad \wedge \quad \forall x \in F \quad (x \cap s' \subset s);$$

in altre parole $\langle s', F' \rangle \leq \langle s, F \rangle$ significa che F' include F e che s' si ottiene da s aggiungendo eventuali elementi di ω, purché essi non si trovino elencati in qualche $x \in F$. Pertanto si ha:

Lemma 2.2.3 (Lemma fondamentale). *Due elementi $\langle s_1, F_1 \rangle$ e $\langle s_2, F_2 \rangle$ sono compatibili se e solo se*

$$\forall x \in F_1 \quad (x \cap s_2 \subset s_1) \quad \wedge \quad \forall x \in F_2 \quad (x \cap s_1 \subset s_2);$$

in tal caso $\langle s_1 \cup s_2, F_1 \cup F_2 \rangle$ è un'estensione comune. □

La precedente condizione di compatibilità si può scrivere anche

$$\forall x \in F_1 \quad \forall n \in x \setminus s_1 \quad (n \notin s_2) \quad \wedge \quad \forall x \in F_2 \quad \forall n \in x \setminus s_2 \quad (n \notin s_1).$$

Lemma 2.2.4 *$\langle \mathbb{P}_{\mathcal{A}}, \leq \rangle$ è ccc.*

Dimostrazione: Sia $\{\langle s_\xi, F_\xi \rangle : \xi < \kappa\}$ un'anticatena in $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$: per il lemma fondamentale, tutti gli s_ξ devono essere distinti e quindi, poiché l'insieme dei sottoinsiemi finiti di ω è numerabile, deve essere $\kappa \leq \omega$. □

Dato un filtro G in $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$, poniamo

$$d_G = \bigcup \{s : \exists F \ (\langle s, F \rangle \in G)\}.$$

Inoltre, per $x \in \mathcal{A}$, definiamo

$$D_x = \{\langle s, F \rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}} : x \in F\}.$$

Lemma 2.2.5

(a) Se G è un filtro in $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ e $\langle s, F \rangle \in G$ allora $\forall x \in F \ (x \cap d_G \subset s)$;

(b) Per ogni $x \in \mathcal{A}$, D_x è denso in $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$;

(c) Se G è un filtro in $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ e $G \cap D_x \neq \emptyset$ allora $|x \cap d_G| < \omega$.

Dimostrazione:

(a) Dato $x \in F$, sia $n \in x$: se $n \in d_G$, esiste $\langle s', F' \rangle \in G$ tale che $n \in s'$. Ora poiché $\langle s, F \rangle$ e $\langle s', F' \rangle$ sono compatibili, si deve avere $n \in s$. Segue, per l'arbitrarietà di n, che $x \cap d_G \subset s$.

(b) Preso comunque $\langle s, F \rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$, l'elemento $\langle s, F \cup \{x\} \rangle$ di D_x è un'estensione di $\langle s, F \rangle$.

(c) Infatti, per il punto (a), $x \cap d_G \subset s$, che è finito. □

Teorema 2.2.6 (Solovay). *Valga* MA(κ). *Siano* $\mathcal{A}, \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\omega)$, *con* $|\mathcal{A}| \leq \kappa$, $|\mathcal{C}| \leq \kappa$; *per ogni* $y \in \mathcal{C}$ *e ogni sottoinsieme finito* F *di* $\mathcal{A}$ *si abbia* $|y \setminus \bigcup F| = \omega$. *Allora esiste* $d \subset \omega$ *tale che*

$$\forall x \in \mathcal{A} \quad (|d \cap x| < \omega) \quad \wedge \quad \forall y \in \mathcal{C} \quad (|d \cap y| = \omega).$$

Dimostrazione: Per $y \in \mathcal{C}$ e $n \in \omega$, l'insieme

$$E^y_n = \{\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}} : s \cap y \not\subset n\}$$

è denso in $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$: infatti, dato un $\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$, poiché $|y \setminus \bigcup F| = \omega$, se prendiamo $m \in y \setminus \bigcup F$ con $m > n$ allora $\langle s \cup \{m\}, F\rangle$ è un'estensione di $\langle s, F\rangle$ in E^y_n.

Ora, siccome vale MA(κ), esiste un filtro G in $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ che interseca tutti gli elementi della famiglia

$$\{D_x : x \in \mathcal{A}\} \cup \{E^y_n : y \in \mathcal{C} \ \wedge \ n \in \omega\};$$

dunque $d_G \cap x$ è finito per ogni $x \in \mathcal{A}$, mentre per $y \in \mathcal{C}$ si ha che, per ogni n, $d_G \cap y \not\subset n$ e quindi $d_G \cap y$ è infinito. □

Corollario 2.2.7 *Sia* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\omega)$ *una famiglia p.d. di cardinalità* κ, *con* $\omega \leq \kappa < 2^\omega$. *Se vale* MA($\kappa$), *allora* $\mathcal{A}$ *non è massimale.*

Dimostrazione: Poniamo $\mathcal{C} = \{\omega\}$. Poiché $\mathcal{A}$ è p.d. e infinita, si ha $|\omega \setminus \bigcup F| = \omega$ per ogni sottoinsieme finito F di $\mathcal{A}$. Ciò si vede ricordando che, se $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_k\}$ e A_{k+1} è un elemento diverso da quelli in $\mathcal{F}$, allora $A_{k+1} \cap (\omega \setminus \cup\mathcal{F}) = A_{k+1} \setminus \cup_{i=1}^k (A_{k+1} \cap A_i)$ e che A_{k+1} è infinito, mentre ciascuno degli insiemi $A_{k+1} \cap A_i$ è finito. Il teorema precedente ci dà allora un $d \subset \omega$ infinito e p.d. da ogni elemento di $\mathcal{A}$. □

Ciò risolve la Questione 2.

Lemma 2.2.8 *Sia* $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\omega)$ *una famiglia p.d. di cardinaltà* κ, *con* $\omega \leq \kappa < 2^\omega$, *e sia* $\mathcal{A}$ *una sottofamiglia di* $\mathcal{B}$. *Se vale* MA(κ), *allora esiste* $d \subset \omega$ *tale che*

$$\forall x \in \mathcal{A} \quad (|d \cap x| < \omega) \quad \wedge \quad \forall x \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A} \quad (|d \cap x| = \omega).$$

Dimostrazione: Basta applicare il teorema precedente a $\mathcal{C} = \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$. □

Teorema 2.2.9 (Solovay). MA(κ) *implica che* $2^\kappa = 2^\omega$.

Dimostrazione: Poiché $2^{<\omega} = \omega$, il Teorema 2.1.2 ci dice che esiste una famiglia p.d. $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{P}(\omega)$ di cardinalità 2^ω. Fissiamo dunque $\mathcal{B} \subset \tilde{\mathcal{B}}$ con $|\mathcal{B}| = \kappa$ e definiamo

$$\Phi \colon \mathcal{P}(\omega) \to \mathcal{P}(\mathcal{B}), \qquad d \mapsto \{x \in \mathcal{B} : |d \cap x| < \omega\}.$$

Il precedente lemma ci dice che Φ è suriettiva e quindi $2^\kappa = |\mathcal{P}(\mathcal{B})| \leq |\mathcal{P}(\omega)| = 2^\omega$. Ovviamente da $\kappa \geq \omega$ segue $2^\kappa \geq 2^\omega$ e quindi $2^\kappa = 2^\omega$. $\square$

Dunque anche la Questione 1 è risolta.

Corollario 2.2.10 MA *implica che* 2^ω *è regolare.*

DIMOSTRAZIONE: Se $\kappa < 2^\omega$, è $2^\kappa = 2^\omega$ per il teorema precedente. Per il Teorema di König si ha allora $\mathrm{cf}(2^\omega) = \mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$, per ogni $\kappa < 2^\omega$. Dunque $\mathrm{cf}(2^\omega) = 2^\omega$. $\square$

Si può dimostrare che è consistente con ZFC che 2^ω sia un cardinale singolare come $\aleph_{\omega_1}$.

2.3 Un accenno al calcolo delle partizioni

Si consideri il seguente problema da salotto. Si pensi ad un ricevimento al quale partecipano almeno sei persone. Allora o tre di queste persone già si conoscevano mutuamente prima di partecipare al ricevimento o tre di queste erano mutuamente estranee. Vediamo di ragionarci un po' su. Si supponga che non ci siano tre persone che già si conoscevano in precedenza l'una l'altra. Si prenda quindi a caso uno dei partecipanti, diciamo il Sig. Rossi. Il resto dei convenuti si divide fra quelli che già conoscevano Rossi (classe C) e quelli che non lo conoscevano (classe S). Se due persone di S non si conoscono, abbiamo concluso: con Rossi fanno tre che non si conoscono l'un l'altro. Supponiamo allora che le persone in S si conoscano l'una l'altra. Ma allora possono essere al più due!

Rossi conosce tutte le persone in C. Se due di queste si conoscevano prima del ricevimento, allora ce ne sono tre che si conoscono l'un l'altro, contro l'ipotesi. Dunque due qualsiasi persone in C non si conoscevano in precedenza. Ma, poiché $|S| \leq 2$, allora $|\mathrm{C}| \geq 3$. Il fatto è provato.

Questa è una semplicissima accezione di un teorema alla Ramsey. Per enunciare teoremi di questo tipo sarà opportuno stabilire un'opportuna notazione.

Definizione 2.3.1 *(a) Diremo che* $\{P_i : i \in I\}$ *è una partizione di* Z *se gli insiemi* P_i *sono a due a due disgiunti e* $\bigcup_{i \in I} P_i = Z$*; non escluderemo che qualche* P_i *possa essere vuoto.*

(b) Sia $[X]^\rho = \{Y \subset X : |Y| = \rho\}$*. Se* $[X]^\rho$ *è ripartito negli insiemi* $\{P_i : i \in I\}$ *diremo che* $Y \subset X$ *è* omogeneo *per la partizione se esiste qualche* $i \in I$ *tale che* $[Y]^\rho \subset P_i$*.*

Il gioco che abbiamo raccontato sopra si può descrivere come segue. Se $|X| \geq 6$ e $[X]^2$ è ripartito in due classi, allora esiste un sottoinsieme $Y \subset X$ che è omogeneo per la partizione e tale che $|Y| \geq 3$. Si usa la seguente notazione "freccia" per esprimere concisamente il fatto appena detto:

$$6 \to (3)^2_2 \quad .$$

Il numero che appare in posizione di apice dice quanti sono gli elementi contenuti in ogni sottoinsieme (qui consideriamo coppie di elementi di X); il numero che compare in posizione di pedice dice quante sono le classi della partizione.

Più in generale, la notazione freccia si scrive come segue

$$\kappa \to (\lambda)^\rho_\sigma \quad ,$$

si legge "κ freccia λ ρ σ" e ha il seguente significato: Se si ripartisce $[\kappa]^\rho$ (o l'insieme dei sottoinsiemi di cardinalità ρ estratti da un qualsiasi insieme A di cardinalità κ) in σ classi, allora esiste un sottoinsieme di cardinalità λ estratto da κ (da A) che è omogeneo. Il Teorema di Ramsey per gli insiemi finiti afferma che comunque si prendano numeri interi $j, m, k < \omega$ esiste $n < \omega$ tale che

$$n \to (j)^m_k \quad .$$

Dimostreremo il seguente

Teorema 2.3.1 [Ramsey, 1930] $\forall n, m < \omega$, $\omega \to (\omega)^n_m$.

Prima di dimostrare il Teorema di Ramsey ne dedurremo alcune interessanti conseguenze

Teorema 2.3.2 *Ogni insieme parzialmente ordinato e infinito possiede o un'anticatena infinita o un sottoinsieme infinito d'elementi a due a due compatibili.*

DIMOSTRAZIONE: Sia A un sottoinsieme numerabilmente infinito di un insieme parzialmente ordinato, e sia $[A]^2 = P_1 \cup P_2$, dove $\{x, y\} \in P_1$ se e solo se x e y sono incompatibili; altrimenti $\{x, y\} \in P_2$. Sia H un insieme infinito omogeneo, sottoinsieme di A. Se $[H]^2 \subset P_1$ allora gli elementi di H formano un'anticatena. Se $[H]^2 \subset P_2$, allora $\cup H$ (cioè gli elementi di H) è un insieme infinito di elementi a due a due compatibili. $\Box$

Proposizione 2.3.3 *Siano $\kappa, \lambda, \rho, \sigma, \tau$ numeri cardinali. Supponiamo che $\kappa \to (\lambda)^\rho_\sigma$. Allora*

(a) Se $\tau > \kappa$, è $\tau \to (\lambda)^\rho_\sigma$.

(b) Se $\tau < \lambda$, è $\kappa \to (\tau)^\rho_\sigma$.

(c) Se $\tau < \sigma$, è $\kappa \to (\lambda)^\rho_\tau$.

DIMOSTRAZIONE:
(a) Data la partizione $\{P_\alpha: \alpha < \sigma\}$ di $[\tau]^\rho$, si consideri $\{P^\star_\alpha: \alpha < \sigma\}$ con $P^\star_\alpha = P_\alpha \cap [\kappa]^\rho$. Gli insiemi omogenei per $P^\star_\alpha$ lo sono per P_α.

(b) Se è dato un insieme omogeneo di cardinalità λ, basta ridurlo a uno di cardinalità τ.

(c) Ogni partizione in τ classi è anche una partizione in σ classi. Basta che gli insiemi aggiunti siano vuoti. □

Per ogni κ infinito le relazioni $\kappa \to (\kappa)^1_2$ e $\kappa \to (\kappa)^2_1$ sono ovvie. Perciò la più semplice relazione freccia non banale è $\kappa \to (\kappa)^2_2$

Proposizione 2.3.4 *Se κ è infinito e $\kappa \to (\kappa)^2_2$, allora $\kappa \to (\kappa)^2_m$ per ogni $m \geq 2$.*

DIMOSTRAZIONE: (Per induzione su m.) Supponiamo vera $\kappa \to (\kappa)^2_{m-1}$ e sia $P_1, P_2, \dots, P_m$ una partizione di $[\kappa]^2$. Definiamo $P'_1 = P_1 \cup P_2$ e, per $i > 1$, $P'_i = P_{i+1}$. Allora i P'_i sono una partizione in $m-1$ classi di $[\kappa]^2$ ed esiste un sottoinsieme Y omogeneo di cardinalità κ. Se $[Y]^2 \subset P'_i$, con $i > 1$, abbiamo finito. Se invece $[Y]^2 \subset P'_1 = P_1 \cup P_2$, poiché, per ipotesi $\kappa \to (\kappa)^2_2$, esiste un sottoinsieme omogeneo Z di Y, tale che $|Z| = \kappa$. □

Per giungere alla dimostrazione del teorema 2.3.1 di Ramsey, cominceremo a dimostrare il seguente

Teorema 2.3.5 [A]. $\omega \to (\omega)^2_2$.

DIMOSTRAZIONE: Si supponga di avere ripartito $[\omega]^2$ in due classi P_0 e P_1. Costruiramo ricorsivamente due successioni, una di numeri naturali$\{k_j: j \in \omega\}$ e una di insiemi infiniti $\{A_j: j \in \omega\}$ tali che $A_{j+1} \subset A_j, k_j \in A_j$ e per ogni j esista qualche i per il quale $A_{j+1} \subset \{m: \{k_j, m\} \in P_i\}$. Vediamo come ciò si possa fare. Poniamo $k_0 = 0$ e $A_0 = \omega$. Supposto di avere determinato k_j e A_j per $j \leq m$ in modo che sia soddisfatte le richieste precedenti, si osservi che esiste qualche indice i per il quale l'insieme $A = \{k: k > k_m, k \in A_m, \{k_m, k\} \in P_i\}$ è infinito. Poniamo allora $A_{m+1} = A$ e scegliamo $k_{m+1} \in A_{m+1}$.

Dati che siano i k_n, si definisca $f(n) = i$ se e solo se $\forall m \in A_{n+1}$ $\{k_n, m\} \in P_i$. La funzione f è così definita per ogni n; $\mathrm{im}(f) = \{0, 1\}$ ed ha valore costante i su qualche insieme infinito B. Ma se $n, m \in B$, allora $\{k_n, k_m\} \in P_i$, cosicché $\{k_n: n \in B\}$ è omogeneo. □

Dimostriamo ora il seguente

Teorema 2.3.6 [B]. *Se $\omega \to (\omega)^2_2$, allora $\omega \to (\omega)^n_m$ per ogni $n, m \in \omega$.*

DIMOSTRAZIONE: Per la precedente Proposizione 2.3.4, basta fissare m e lavorare per induzione su n. Si supponga $\omega \to (\omega)^n_m$ e sia $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ una partizione di $[\omega]^{n+1}$. Per ogni $k \in \omega$ sia $P^k_i = \{s \in [\omega]^n : s \cup \{k\} \in P_i\}$ e sia $\mathcal{P}^k = \{P^k_1, P^k_2, \ldots, P^k_m\}$. Ogni $\mathcal{P}^k$ è una partizione di $[\omega \setminus \{k\}]^n$. Come abbiamo fatto nella dimostrazione del Teorema A costruiamo ricorsivamente due successioni $\{k_j\}, \{A_j\}$ una crescente di numeri naturali e una di sottoinsiemi infiniti di ω tali che $A_{j+1} \subset A_j$, $k_j \in A_j$ e ogni insieme A_j sia omogeneo per ogni $\mathcal{P}^{k_r}$, con $r < j$. Vediamo come ciò si possa fare. Poniamo $A_0 = \omega$ e $k_o = 0$. Supposto che siano noti A_r e $k_r \in A_r$, per $r \leq j$, consideriamo le partizioni $\mathcal{P}^{k_r}$, $r = 0, \ldots, j$ e sia $B^j_0 \subset A_j$ omogeneo per $\mathcal{P}^{k_0}$, $B^j_1 \subset B^j_0$ omogeneo per $\mathcal{P}^{k_1}$, e così via. Allora B^j_j è omogeneo per tutti i $\mathcal{P}^{k_r}$, con $r \leq j$; poniamo $A_{j+1} = B^j_j$ e $k_{j+1} \in A_{j+1}$. Ripetendo l'argomento del precedente teorema, dati che siano i k_n, si definisca ora $f : \omega \to \{0, 1, \ldots, m\}$ come segue: $f(\ell) = i$ se e solo se $[A_{\ell+1}]^n \subset P^{k_\ell}_i$. (La funzione è ben definita perché $A_{\ell+1}$ è omogeneo per $\mathcal{P}^{k_\ell}$). Esiste allora qualche i per il quale l'insieme $B = \{\ell : f(\ell) = i\}$ è infinito; si riconosce infine che $\{k_\ell : \ell \in B\}$ è omogeneo per la partizione originale $\mathcal{P}$. □

Poiché la validità dei Teoremi A e B implica quella del teorema di Ramsey 2.3.1, la dimostrazione del teorema stesso è così completata. □

Mostriamo ora che $\kappa \to (\kappa)^2_2$ è una proprietà di *grande cardinale*; in particolare, che κ è fortemente inaccessibile se non è numerabile.

Teorema 2.3.7 *Se $\kappa \to (\kappa)^2_2$, allora κ è regolare.*

DIMOSTRAZIONE: Sia κ_α, $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$, una successione crescente di cardinali cofinale in κ. Per ogni $\beta < \kappa$, sia $f(\beta) =$ minimo α tale che $\beta < \kappa_\alpha$ e diciamo $\beta \sim \gamma$ se $f(\beta) = f(\gamma)$. La relazione $\sim$ è una relazione d'equivalenza che divide $[\kappa]^2$ in due classi: P_1 contiene tutte le coppie che stanno in relazione $\sim$; P_2 quelle che non stanno in relazione $\sim$. Poiché ogni $\kappa_\alpha < \kappa$, nessun insieme Y di cardinalità κ può essere tale che $[Y]^2 \subset P_1$. Dunque un insieme omogeneo di cardinalità κ contiene al più un elemento in ogni classe d'equivalenza di $\sim$, cioè al più un elemento tra κ_α e $\kappa_{\alpha+1}$. Perciò $f''\kappa = \kappa$. □

Teorema 2.3.8 *L'ordine lessicografico su ${}^\lambda 2$ non possiede né catene crescenti di tipo λ^+, né decrescenti inversamente ordinate in tipo λ^+.*

DIMOSTRAZIONE: Per assurdo sia $F = \{f_\alpha : \alpha < \lambda^+\}$, $f_\alpha \in F$ e $\alpha < \beta \to f_\alpha <_L f_\beta$, dove $<_L$ è l'ordine lessicografico. Per ogni assegnato $f \in F$

sia $d(f)$ il minimo $\gamma < \lambda$ tale che per qualche $g \in F$, sia $f(\gamma) < g(\gamma)$ e $f \restriction \gamma = g \restriction \gamma$. Per ogni f è tautologicamente $f(d(f)) = 0$. Sia $F_\gamma = \{f \in F \colon d(f) = \gamma\}$. Se $f \in F_\gamma$, $g \in F$ è un "testimone" per f se $f \restriction \gamma = g \restriction \gamma$ e $f(\gamma) < g(\gamma)$. Si osservi che $g \notin F_\gamma$. Notiamo ora il seguente

Fatto 2.3.1 *Siano $f \in F_\gamma$, g testimone per f. Allora $h <_L g$ per ogni $h \in F_\gamma$.*

DIMOSTRAZIONE: Si supponga di no. Allora esiste qualche $h \in F_\gamma$ tale che $h >_L g$ e quindi $h >_L f$. Cosa fa $h(\gamma)$? Se $h(\gamma) = 0$, allora $h <_L g$, contro l'ipotesi; se $h(\gamma) = 1$, allora $h \notin F_\gamma$, ancora una contraddizione. L'affermazione è provata. □

Dal fatto precedente segue che ogni $F_\gamma \subset \{f_\alpha \colon \alpha < \delta\}$ per qualche $\delta < \lambda^+$, dove f_δ è un testimone per qualche $f \in F_\gamma$. Dunque ogni F_γ ha cardinalità $|F_\gamma| \leq \lambda$ e poiché $F = \cup_{\gamma<\lambda} F_\gamma$, $|F| = \lambda$, ma ciò è una contraddizione.

Analogamente si dimostra che non esiste $\{f_\alpha \colon \alpha < \lambda^+\}$, con $f_\alpha \in {}^\lambda 2$ e $\alpha < \beta \to f_\alpha >_L f_\beta$. □

Teorema 2.3.9 *Per ogni cardinale infinito λ, vale $2^\lambda \not\to (\lambda^+)^2_2$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\{f_\alpha \colon \alpha < 2^\lambda\}$ l'elenco degli elementi di ${}^\lambda 2$ e $<_L$ l'ordine lessicografico. Si ripartisca $[{}^\lambda 2]^2$ in due classi: $P_1 = \{\{\alpha, \beta\} \colon \alpha < \beta \text{ e } f_\alpha <_L f_\beta\}$ e $P_2 = \{\{\alpha, \beta\} \colon \alpha < \beta \text{ e } f_\alpha >_L f_\beta\}$. Un insieme omogeneo sarebbe una catena bene ordinata crescente oppure decrescente. Ma queste catene, come abbiamo dimostrato nel precedente Teorema 2.3.8, non possono esistere.

Tuttavia si può provare

Teorema 2.3.10 [Erdős - Rado] $(2^\lambda)^+ \to (\lambda^+)^2_2$.

DIMOSTRAZIONE: Omessa. □

Vale infine

Teorema 2.3.11 *Se $\kappa \to (\kappa)^2_2$, allora κ è fortemente limite.*

DIMOSTRAZIONE: Per assurdo sia $\lambda < \kappa$ tale che $2^\lambda \geq \kappa$. Allora $\kappa \to (\kappa)^2_2$ implicherebbe $\kappa \to (\lambda^+)^2_2$, essendo $\lambda+ \leq \kappa$, e quindi $2^\lambda \to (\lambda^+)^2_2$, contro il risultato precedentemente dimostrato nel Teorema 2.3.9. □

Tenuto conto dei risultati dei Teoremi 2.3.7 e 2.3.11 si conclude che se $\kappa \to (\kappa)^2_2$, allora κ è fortemente inaccessibile.

Definizione 2.3.2 *Un cardinale non numerabile κ si dice* debolmente compatto *se $\kappa \to (\kappa)^2_2$.*

2.4 Insiemi stazionari e $\diamondsuit$

Il principio $\diamondsuit$ vale in $\mathbb{L}$ ed è stato formulato da Jensen come una cristallizzazione della dimostrazione che in $\mathbb{L}$ esistono alberi di Suslin. Prima di esplicitarlo ci serviranno alcune ulteriori nozioni che definiremo ed illustreremo brevemente.

Definizione 2.4.1 *(a) Un sottoinsieme A di κ è chiuso se è chiuso nella topologia dell'ordine; cioè se per ogni insieme $B \subset A$ se B non è cofinale in κ si ha* $\sup B \in A$.

(b) Un insieme $A \subset \kappa$ è detto club *o* cub *(dall'inglese "closed and unbounded") se è chiuso e cofinale in κ.*

Osserviamo che tutti i sottoinsiemi di ω sono chiusi, che tutti i sottoinsiemi illimitati di ω sono club. Se κ è più che numerabile allora $\{\alpha < \kappa \colon \alpha$ è ordinale limite$\}$ è club, poiché gli ordinali limite sono cofinali in κ e ogni estremo superiore di ordinali limite è un ordinale limite.

Definizione 2.4.2 *Sia κ un cardinale. Un sottoinsieme $A \subset \kappa$ è detto* stazionario (in κ) *se $\forall C$ che sia club in κ si ha $A \cap C \neq \emptyset$.*

Esercizio 2.4.1 *Si dimostri che se* $\mathrm{cf}\,(\kappa) > \omega$*, allora* $\{\alpha < \kappa \colon \mathrm{cf}\,(\alpha) = \omega\}$ *è un insieme stazionario e che ogni insieme club è stazionario. (Dimostreremo più avanti che, in questo caso, l'intersezione di due club è un club).*

La divisione degli insiemi tra stazionari e non stazionari è importante come verrà messo in evidenza nel seguito (vedi il Teorema di Fodor 2.4.4 detto anche Lemma di Compressione – "Pressing down Lemma").

Definizione 2.4.3 *Data una famiglia d'insiemi $\{A_\alpha \colon \alpha < \lambda\}$ con $A_\alpha \subset \lambda$, λ cardinale, diremo* intersezione diagonale *della famiglia $\{A_\alpha \colon \alpha < \lambda\}$ l'insieme*

$$\begin{aligned} A = \Delta\{A_\alpha \colon \alpha < \lambda\} &:= \{\beta < \lambda \colon \forall \alpha < \beta\, (\beta \in A_\alpha)\} \\ &= \{\beta < \lambda \colon \beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} A_\alpha\} \quad . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Lemma 2.4.1 *Sia μ un cardinale avente* $\mathrm{cf}\,(\mu) > \omega$*. Allora l'intersezione di due club in μ è un club.*

Dimostrazione: Siano E, D due club in μ. Naturalmente $E \cap D$ è chiuso in μ. Mostriamo che è pure illimitato, cioè che per ogni $\alpha < \mu$ esiste un elemento di $E \cap D$ che lo supera. Dato α, sia $\alpha_0 \in E$, $\alpha_0 > \alpha$ (esiste perché

E è illimitato); sia poi $\alpha_1 \in D$, $\alpha_1 > \alpha_0$ (anche D è illimitato, dunque α_1 c'è). Scegliamo dunque gli α_n in E se n è pari e in D se n è dispari in modo che $\alpha_n > \alpha_{n-1}$. Allora $\alpha_\omega = \sup \alpha_n$ è elemento di $D \cap E$ dal momento che D ed E sono chiusi ed è $\alpha < \alpha_\omega < \mu$, essendo cf $(\mu) > \omega$. Dunque $E \cap D$ è un club. $\Box$

Un'immediata conseguenza del precedente lemma 2.4.1 è che se S è stazionario e C è club, anche $S \cap C$ è stazionario. Infatti se B è un club $(S \cap C) \cap B = S \cap (C \cap B) \neq \emptyset$, poiché $C \cap B$ è un club.

Definizione 2.4.4 *Se* cf $(\mu) > \omega$ *definiamo il* filtro dei club su μ *come segue*

$$\mathrm{Club}(\mu) = \{X \subset \mu \colon \exists C \subset X (C \text{ è club in } \mu)\} \quad . \tag{2.2}$$

Abbiamo ora la seguente importante generalizzazione del lemma 2.4.1. Il seguente lemma 2.4.2 permette di riconoscere che Club(μ) è effettivamente un filtro. Ricordiamo che un filtro $\mathcal{F}$ si dice λ-completo se $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ e $|\mathcal{A}| < \lambda$ implica $\cap\mathcal{A} \in \mathcal{F}$.

Lemma 2.4.2 *Sia* cf $(\mu) > \omega$. *Allora*

a) L'intersezione di ogni famiglia di meno di cf (μ) *insiemi club in* μ *è un club.*

b) Club(μ) *è* cf (μ)*-completo.*

Dimostrazione: a) Siano C_α, $\alpha < \lambda$, $\lambda <$ cf (μ) insiemi club e sia $D = \cap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$. Allora D è un insieme chiuso.

Per verificare che D è illimitato, dato $\xi < \mu$, si dica $f_\alpha(\xi) = \min\{\eta \in C_\alpha \colon \eta > \xi\}$. Si ha $f_\alpha \colon \mu \to \mu$. Sia poi $g(\xi) = \sup\{f_\alpha(\xi) \colon \alpha < \lambda\}$. Allora è certamente $\xi < g(\xi) < \mu$, poiché $\lambda <$ cf (μ). Definiamo induttivamente $g^0(\xi) = \xi$ e $g^{n+1}(\xi) = g(g^n(\xi))$; sia infine $g^\omega(\xi) = \sup\{g^n(\xi) \colon n \in \omega\}$. Allora si ha ancora $\xi < g^\omega(\xi) < \mu$, poiché cf $(\mu) > \omega$. Per ogni α, C_α è illimitato in $g^\omega(\xi)$, dunque $g^\omega(\xi) \in C_\alpha$, per ogni α. Perciò $g^\omega(\xi) \in \cap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$. Abbiamo verificato che, per ogni ξ, $g^\omega(\xi)$ è un elemento di D che supera ξ. Dunque D è illimitato.

b) Dobbiamo verificare che se $\mathcal{A} \subset$ Club(μ) e $|\mathcal{A}| <$ cf (μ) allora $\cap\mathcal{A} \in$ Club(μ). Siano X_α, $\alpha < \lambda$ tali che $\forall\alpha$ esistono $C_\alpha \subset X_\alpha$, con C_α insiemi club. Ma per la parte a) $\cap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$ è un club e quindi $\cap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in$ Club(μ). $\Box$

Si noti che se cf $(\mu) = \omega$, l'insieme Club(μ) non sarebbe un filtro. Infatti in questo caso esisterebbero ω-successioni disgiunte cofinali in μ.

Lemma 2.4.3 *Sia μ un cardinale regolare non numerabile e siano dati per ogni $\alpha < \mu$ gli insiemi club $C_\alpha \subset \mu$. Allora la loro intersezione diagonale $\Delta_{\alpha<\mu} C_\alpha$ è un club.*

DIMOSTRAZIONE: $\Delta_{\alpha<\mu} C_\alpha$ è chiuso. Per verificare ciò mostreremo che ogni punto d'accumulazione per $C = \Delta_{\alpha<\mu} C_\alpha$ è un punto di C. L'essere ξ d'accumulazione per C significa che ogni suo intorno $(\eta, \xi]$ contiene punti di C. Consideriamo $X = \{\nu \in C : \eta < \nu < \xi\}$. Poiché $\nu \in C$ si ha $\nu \in C_\eta \forall \eta < \nu$. Allora $X \subset C_\eta$ e C_η è un insieme chiuso. Dunque $\xi = \sup X$ è un elemento di C_η, che è chiuso. Perciò $\forall \eta < \xi$ abbiamo $\xi \in C_\eta$ se ξ è aderente a C. Ma, per la definizione di C, ciò significa che $\xi \in C$. Dunque ogni punto d'accumulazione per C è in C. C è chiuso.

Mostriamo ora che C è illimitato. Sia $\alpha < \mu$. Poiché C_0 è club, si prenda $\beta_1 \in C_0$, $\beta_1 > \alpha$. Poiché i C_β sono illimitati (e chiusi), per ogni $n \in \omega$, si prenda un $\beta_{n+1} > \beta_n$ e tale che $\beta_{n+1} \in \cap_{\eta \leq \beta_n} C_\eta$. Ciò si può fare, in vista della validità del Lemma 2.4.2. Sia poi $\beta = \sup \beta_n$. Sia $\eta < \beta$. Esiste $n \in \omega$ tale che $\eta \leq \beta_n < \beta_{n+1} (\leq \beta)$. Ogni β_{n+1} sta in C_η per $\eta \leq \beta_n$. Per costruzione c'è qualche $\xi \in C_\eta, \forall \eta \leq \beta_n$, con $\beta_n < \xi < \beta_{n+1}$. In definitiva $\beta \in \overline{C_\eta}, \forall \eta < \beta$. Ma essendo C_η chiuso, $\beta \in C_\eta, \forall \eta < \beta$ e perciò $\beta \in C$ e $\beta > \alpha$. Conviene osservare che se $C = \Delta_{\alpha<\mu} C_\alpha$, si può sempre supporre $C_0 \supset C_1 \supset \ldots \supset C_\alpha \supset \ldots$. Infatti $C'_\alpha = \bigcap_{\eta<\alpha} C_\eta$ è tale da soddisfare la condizione considerata e $C = \Delta_{\alpha<\mu} C_\alpha = \Delta_{\alpha<\mu} C'_\alpha$. Il fatto che i C'_α sono ancora club, segue dal lemma 2.4.2 già ricordato. $\square$

Possiamo finalmente dimostrare l'annunciato Lemma di Compressione

Teorema 2.4.4 [Fodor]. *Sia κ un cardinale regolare non numerabile. Se $f : S \to \kappa$, con S stazionario in κ, è tale che $f(\alpha) < \alpha \ \forall \alpha < \kappa, \alpha \neq 0$ (una funzione siffatta si dice* regressiva*), allora esiste un insieme stazionario $S' \subset S$, sul quale f è costante.*

DIMOSTRAZIONE: Sia f regressiva su S stazionario in κ regolare e non numerabile. Se la tesi fosse falsa, per ogni $\alpha < \kappa$, $f^{-1}(\alpha)$ non sarebbe stazionario e quindi esisterebbe un club C_α tale che $f^{-1}(\alpha) \cap C_\alpha = \emptyset$. Ossia $f(\beta) \neq \alpha \ \forall \beta \in C_\alpha \cap S$. Si consideri $C = \Delta_{\alpha<\mu} C_\alpha$. C è un club. Perciò $C \cap S \neq \emptyset$, anzi è stazionario. Sia $\gamma \in C \cap S$. Osserviamo che $\gamma \in C_\alpha$ per ogni $\alpha < \gamma$. Ma, su C_α, f ha valori diversi da α ! Dunque $f(\gamma) \neq \alpha$, per ogni $\alpha < \gamma$ e quindi dovrebbe essere $f(\gamma) \geq \gamma$, contro l'ipotesi che f sia regressiva. $\square$

Enunciamo infine il pincipio "diamante"

Definizione 2.4.5

($\diamondsuit$) *Esiste una successione* $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ *tale che* $A_\alpha \subset \alpha$ *e tale che per ogni* $A \subset \omega_1$, $\{\alpha : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ *è stazionario.*

Si noti che il principio di Jensen $\diamondsuit$ implica l'ipotesi del continuo CH.

Lemma 2.4.5 $\diamondsuit \to$ CH.

Dimostrazione: Infatti, se $A \subset \omega$ è un insieme numerabile, poiché $\{\alpha : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ è stazionario in ω_1, e quindi, in particolare, non è vuoto. Esiste dunque $\alpha < \omega_1$ per il quale $A \cap \alpha = A_\alpha$. Ma allora l'insieme dei sottoinsiemi di ω ha cardinalità esattamente ω_1: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$: $\{A_\alpha : A_\alpha \subset \omega\} = \mathcal{P}(\omega) \subset \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. $\square$

È stato dimostrato da Jensen che CH non implica $\diamondsuit$.

2.5 Alberi

Definizione 2.5.1 *Un* albero *è un insieme parzialmente ordinato* $\langle T, \leq \rangle$ *tale che* $\forall x \in T$, $\{y \in T : y \leq x\}$ *è bene ordinato da* $\leq$.

Sia $\langle T, \leq \rangle$ un albero

Definizione 2.5.2 .

(a) L'altezza di $x \in T$ *è il numero ordinale*

$$h(x, T) = \text{tipo}(\{y \in T : y < x\}) .$$

(b) Per ogni ordinale α, l'α-esimo livello di T *è l'insieme*

$$\text{Liv}_\alpha(T) = \{x \in T : h(x, T) = \alpha\} .$$

(c) L'altezza di T, $h(T)$, *è il minimo ordinale* α *tale che* $\text{Liv}_\alpha(T) = \emptyset$.

(d) Un sottoalbero *di* T *è un sottoinsieme* $T' \subset T$ *tale che*

$$\forall x \in T', \forall y \in T\, (y < x \to y \in T') .$$

Esempi banali di alberi sono l'insieme vuoto e ogni ordinale δ con l'ordine naturale. Si trova facilmente che se $\alpha \in \delta$, $h(\alpha, \delta) = \alpha$ e $h(\delta) = \delta$.

Esercizio 2.5.1 *Si verifichi che* $h(T) = \sup\{h(x, T) + 1 : x \in T\}$.

Esercizio 2.5.2 *Si verifichi che se* T' *è un sottoalbero di* T*, allora per* $x \in T'$, $h(x, T') = h(x, T)$.

Un esempio più utile e interessante è , per $I \neq \emptyset$, ${}^{<\delta}I = \cup\{{}^{<\alpha}I\colon \alpha < \delta\}$. Quest'albero è detto *l'albero I-ario completo* di altezza δ. In quest'albero, dati $s, t \in {}^{<\delta}I$, è $s \leq t$ se $s \subset t$, cioè se la successione t estende la successione s.

Se $\alpha < \delta$ allora $\mathrm{Liv}_\alpha({}^{<\delta}I) = {}^{\alpha}I$ e $h({}^{<\delta}I) = \delta$.

Se $I = 2 = \{0, 1\}$, ${}^{<\delta}2$ si dice *l'albero binario completo* di altezza δ.

Definizione 2.5.3 *Sia $\langle T, \leq\rangle$ un albero. Una* catena *$C \subset T$ è un insieme totalmente ordinato da $<$. Un'* anticatena *è un insieme $A \subset T$ tale che per ogni $x, y \in A$, $x \neq y \to (x \not\leq y \wedge y \not\leq x)$.*

Osservazione 2.5.1 *Osserviamo che se $\mathbb{P} = \langle T, \geq\rangle$ (cioè T con l'ordine opposto) le definizioni appena date coincidono con quelle già presentate in 2.2.1. x e y sono compatibili in $\mathbb{P}$ se esiste $z \in \mathbb{P}(z \geq x \wedge z \geq y)$, ma questo accade se e solo se x e y sono confrontabili $(x \leq y \vee y \leq x)$, poiché i predecessori di z in un albero T sono bene ordinati e quindi totalmente ordinati.*

Definizione 2.5.4 *Per ogni cardinale infinito κ, diremo che un albero T è un* κ-albero di Suslin *se $|T| = \kappa$ ma ogni catena ed ogni anticatena di T hanno cardinalità $< \kappa$.*

Djuro Kurepa mostrò nel 1936 che esiste un ω_1-albero di Suslin se e solo se c'è una retta di Suslin (si veda più avanti la Sezione 4.3.5). Ci interesserà in particolare il caso in cui κ sia regolare.

Definizione 2.5.5 *Per ogni κ regolare diremo κ-albero un albero T avente altezza κ ma tale che $\forall\alpha < \kappa(|\mathrm{Liv}_\alpha(T)| < \kappa)$.*

Lemma 2.5.1 *Per ogni κ regolare, ogni albero κ-Suslin è un κ-albero.*

Dimostrazione: Si vede subito che $\mathrm{Liv}_\kappa(T) = \emptyset$, perché se $x \in \mathrm{Liv}_\kappa(T)$, allora $\{y \in T\colon y < x\}$ sarebbe una catena di cardinalità κ. Allora $h(T) \leq \kappa$. Poiché ogni $\mathrm{Liv}_\alpha(T)$ è un'anticatena, $|\mathrm{Liv}_\alpha(T)| < \kappa$. Infine, poiché $|T| = \kappa$ e $T = \cup\{\mathrm{Liv}_\alpha(T)\colon \alpha < \kappa\}$, la regolarità di κ implica che $h(T) = \kappa$. $\Box$

Non esistono ω-alberi che siano di Suslin. Infatti vale

Lemma 2.5.2 [König] *Se T è un ω-albero, allora T ha una catena infinita.*

Dimostrazione: Si prenda $x_0 \in \mathrm{Liv}_0(T)$ tale che $\{y \in T\colon y \geq x_0\}$ è infinito. Ciò è possibile dal momento che $\mathrm{Liv}_0(T)$ è finito, T è infinito e ogni elemento di T segue qualche elemento di $\mathrm{Liv}_0(T)$. Usando un argomento simile, si possono prendere induttivamente $x_n \in \mathrm{Liv}_n(T)$ in modo che esista $x_{n+1} > x_n$ e $\{y \in T\colon y \geq x_{n+1}\}$ sia infinito. Allora $\{x_n\colon n \in \omega\}$ è una catena infinita in T. $\Box$

Definizione 2.5.6 *Per ogni cardinale regolare κ diremo* albero κ-Aronszajn *un κ-albero T tale che ogni catena in T abbia cardinalità minore di κ.*

Ovviamente ogni albero κ-Suslin è un albero κ-Aronszajn. Il precedente Lemma di König mostra che non esistono alberi ω-Aronszajn. La situazione è diversa per ω_1. Ricorderemo, senza dimostrazione, i seguenti risultati

Teorema 2.5.3 *Esiste in ZFC un albero ω_1-Aronszajn.*

Per gli alberi ω_1-Suslin la situazione è differente. Come già abbiamo ricordato vale

Teorema 2.5.4 [Kurepa] *Esiste un albero ω_1-Suslin se e solo se esiste una retta di Suslin.*

Allora, da quanto verrà dimostrato in 4.3.19 si può concludere che

Corollario 2.5.5 MA(ω_1) *implica che non esistono alberi ω_1-Suslin.*

Tuttavia si può dimostrare

Teorema 2.5.6 $\diamondsuit$ *implica che esista un albero ω_1-Suslin.*

Dunque si può concludere che l'esistenza di alberi ω_1-Suslin è indipendente da ZFC.

Capitolo 3

Complementi di topologia

3.1 Spazi compatti e localmente compatti

Definizione 3.1.1 *Uno spazio topologico si dice* compatto *se è di Hausdorff e ogni ricoprimento aperto ha un sottoricoprimento finito.*

Esempio 3.1.1 *Sia X un insieme infinito dotato della topologia cofinita. Si vede facilmente che ogni ricoprimento aperto di X ha un sottoricoprimento finito, ma X non è T_2.*

Osserviamo che un sottospazio di Hausdorff Y di uno spazio X è compatto se e solo se ogni famiglia $\mathcal{U}$ di aperti di X che ricopre Y (cioè tale che $\bigcup \mathcal{U} \supset \mathcal{Y}$) ha una sottofamiglia finita $\mathcal{V}$ che ricopre Y.

Esercizio 3.1.2 *Mostrare che se Y è una unione finita di sottospazi compatti di uno spazio topologico X allora Y è compatto.*

Proposizione 3.1.1 *Uno spazio di Hausdorff X è compatto se e solo se ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.*

Dimostrazione: Per ogni $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ poniamo $\mathcal{F}^* = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$. Allora $\mathcal{F}$ è una famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita se e solo se $\mathcal{F}^*$ è una famiglia di aperti di cui nessuna sottofamiglia finita ricopre X, e $\mathcal{F}$ ha intersezione vuota se e solo se $\mathcal{F}^*$ è un ricoprimento di X. $\square$

Corollario 3.1.2 *Ogni sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto.* $\square$

Esercizio 3.1.3 *Dimostrare che nessun sottoinsieme illimitato di $\mathbb{R}$ è compatto.*

Teorema 3.1.3 (Heine–Borel) *Ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset \mathbb{R}$ è compatto.*

Dimostrazione: Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di $[a, b]$. Posto

$$S = \{x \in [a, b] : \exists \mathcal{U}' \subset \mathcal{U} \ (|\mathcal{U}'| < \omega \ \wedge \ \bigcup \mathcal{U}' \supset [a, x])\},$$

dobbiamo dimostrare che $b \in S$, il che in effetti equivale a dire che $b = \max S$.

Indichiamo con s l'estremo superiore di S, e sia $U \in \mathcal{U}$ tale che $s \in U$; poiché evidentemente $s > a$, esiste $\delta > 0$ tale che $]s - \delta, s] \subset U$. Essendo $s = \sup S$ esisterà un $x \in S$ maggiore di $s - \delta$; detta allora $\mathcal{U}'$ una sottofamiglia finita di $\mathcal{U}$ la cui unione contiene $[a, x]$, è chiaro che l'unione di $\mathcal{U}' \cup \{U\}$ contiene $[a, s]$, e quindi $s \in S$. Se poi fosse $s \neq b$, l'aperto U conterrebbe un intervallo della forma $[s, t]$ con $t > s$, e si avrebbe $t \in S$: assurdo. □

Lemma 3.1.4 *Sia H un sottoinsieme compatto di uno spazio topologico X, e sia $F \subset X$ disgiunto da H. Supponiamo che, per ogni $x \in H$, esistano due aperti disgiunti U_x e V_x tali che $x \in U_x$ e $F \subset V_x$. Allora esistono due aperti disgiunti U e V tali che $H \subset U$ e $F \subset V$.*

Dimostrazione: Infatti la famglia di aperti $\{U_x : x \in H\}$ ricopre H, quindi esistono $x_0, \ldots, x_{n-1} \in H$ tali che l'aperto $U = \bigcup_{i \in n} U_{x_i}$ contiene H; chiaramente l'insieme $V = \bigcap_{i \in n} V_{x_i}$ è un aperto di X contenente F e disgiunto da U □

Corollario 3.1.5 *Se K è un sottospazio compatto di uno spazio di Hausdorff X allora K è chiuso.*

Dimostrazione: Per ogni $x \notin K$, si applichi il lemma precedente con $H = K$ e $F = \{x\}$. □

Proposizione 3.1.6 *Se K' e K'' sono sottospazi compatti disgiunti di uno spazio di Hausdorff X allora esistono due aperti disgiunti U' e U'' tali che $K' \subset U'$ e $K'' \subset U''$.*

Dimostrazione: Per ogni $a \in A$ si applichi il lemma precedente con $H = B$ e $F = \{a\}$. Si riapplichi poi il lemma con $H = A$ e $F = B$. □

Corollario 3.1.7 *Ogni spazio compatto è normale.* □

Proposizione 3.1.8 *Se f è una funzione continua da uno spazio compatto X in uno spazio di Hausdorff Y, allora $f[X]$ è compatto.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathcal{V}$ un ricoprimento aperto di $f[X]$: allora

$$\mathcal{U} = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{V}\}$$

è un ricoprimento aperto di X, e quindi ha un sottoricoprimento finito della forma $\{f^{-1}(V_i) : i \in n\}$ con $V_0, \ldots, V_{n-1} \in \mathcal{V}$. Dunque $\{V_0, \ldots, V_{n-1}\}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{V}$. $\Box$

Corollario 3.1.9 *Ogni funzione continua e biiettiva da uno spazio compatto X su uno spazio di Hausdorff Y è un omeomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE: Infatti, per la proposizione precedente e i Corollari 3.1.2 e 3.1.5, l'immagine di ogni chiuso di X è un chiuso di Y. $\Box$

Esercizio 3.1.4 *Sia X uno spazio compatto. Mostrare che ogni funzione continua di X in $\mathbb{R}$ ha massimo e minimo.*
SUGGERIMENTO: Usare l'Esercizio 3.1.3.

Definizione 3.1.2 *Si dice che un punto x di uno spazio topologico X è* punto di completa accumulazione *per un sottoinsieme A di X se, per ogni intorno U di x, si ha $|U \cap A| = |A|$.*

Teorema 3.1.10 *Uno spazio di Hausdorff X è compatto se solo se ogni sottoinsieme infinito di X ha almeno un punto di completa accumulazione.*

DIMOSTRAZIONE: Sia X compatto. Supponiamo che ci sia un insieme infinito $A \subset X$ per il quale non esistono punti di completa accumulazione, cioè ogni $x \in X$ abbia un intorno aperto U_x tale che l'insieme $A_x = A \cap U_x$ ha cardinalità minore di $|A|$. Per la compattezza di X, esistono $x_0, \ldots, x_{n-1} \in X$ tali che $X = \bigcup_{i \in n} U_{x_i}$. Quindi $A = \bigcup_{i \in n} A_{x_i}$, ma quest'ultimo insieme ha cardinalità minore di $|A|$: assurdo.

Viceversa, supponiamo che X non sia compatto. Scegliamo un ricoprimento aperto $\mathcal{V}$ di X che non ha sottoricoprimenti finiti, in modo tale che $\mathcal{V}$ abbia la minima cardinalità possibile, e indichiamo questa cardinalità con μ. Osserviamo che se $\mathcal{U}$ è una sottofamiglia di $\mathcal{V}$ con $|\mathcal{U}| = \kappa < \mu$, allora la cardinalità λ dell'insieme $R_{\mathcal{U}} = X \setminus \bigcup \mathcal{U}$ è maggiore o uguale a μ: infatti, se per ogni $x \in R_{\mathcal{U}}$ scegliamo un $W_x \in \mathcal{V}$ che contiene x, allora $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cup \{W_x : x \in R_{\mathcal{U}}\}$ è un ricoprimento di cardinalità $\nu \leq \kappa + \lambda$ che non ha sottoricoprimenti finiti, e quindi $\mu \leq \nu$ da cui segue $\lambda \geq \mu$.

Se ora rappresentiamo $\mathcal{V}$ come $\{V_\alpha : \alpha \in \mu\}$, possiamo costruire per induzione transfinita un insieme $S = \{x_\alpha : \alpha \in \mu\}$ scegliendo per ogni

$\alpha \in \mu$ l'elemento x_α nell'insieme $X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta \setminus \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ che è non vuoto per quanto osservato sopra. Notiamo che $|S| = \mu$, dunque S è infinito, ma nessun punto di X è di completa accumulazione per S, perché per ogni $x \in X$ esiste $\gamma \in \mu$ tale che $x \in V_\gamma$, e si ha $|V_\gamma \cap S| \leq |\{x_\alpha : \alpha \leq \gamma\}| < \mu$. □

Esercizio 3.1.5 *Sia $\mathcal{B}$ una base di uno spazio di Hausdorff X. Verificare che se ogni ricoprimento di X con elementi di $\mathcal{B}$ ha un sottoricoprimento finito allora X è compatto.*

Lemma 3.1.11 *Sia $\mathcal{U}$ una famiglia di aperti di uno spazio topologico X. Se nessuna sottofamiglia finita di $\mathcal{U}$ ricopre X, esiste una famiglia di aperti $\mathcal{M}$ tale che:*

(a) $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$;

(b) nessuna sottofamiglia finita di $\mathcal{M}$ ricopre X;

(c) se $M \in \mathcal{M}$ e $A \subset M$ è aperto allora $A \in \mathcal{M}$;

(d) se $\bigcap_{i\in n} A_i \in \mathcal{M}$ esiste $i \in n$ tale che $A_i \in \mathcal{M}$.

Dimostrazione: Si vede facilmente, applicando il lemma di Zorn, che l'insieme di tutte le famiglie di aperti $\mathcal{F}$ tali che nessuna sottofamiglia finita di $\mathcal{F}$ ricopre X e $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$ ha un elemento massimale (rispetto all'ordinamento per inclusione); indichiamo tale famiglia massimale con $\mathcal{M}$.

È evidente che la famiglia $\mathcal{M}$ verifica (a) e (b). Sia poi $M \in \mathcal{M}$, e sia $A \subset M$ aperto; se $A \notin \mathcal{M}$ allora la famiglia $\mathcal{M} \cup \{A\}$ contraddirebbe la massimalità di $\mathcal{M}$: ciò dimostra la (c).

Resta da dimostrare che vale la (d), dove possiamo ovviamente assumere $n = 2$. Sia dunque $A = A_0 \cap A_1 \in \mathcal{M}$, e supponiamo che $A_i \notin \mathcal{M}$ per ogni $i \in 2$. Essendo $\mathcal{M}$ massimale, per ogni $i \in 2$ la famiglia $\mathcal{M} \cup \{A_i\}$ deve avere una sottofamiglia finita $\mathcal{V}_i$ che ricopre X (e sarà $\mathcal{V}_i = \mathcal{U}_i \cup \{A_i\}$, con $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{M}$). Sia ora $\mathcal{V} = \{V_0 \cap V_1 : V_0 \in \mathcal{V}_0 \ \wedge \ V_1 \in \mathcal{V}_1\}$; poiché $A \in \mathcal{M}$ per l'ipotesi fatta, e ogni altro elemento di $\mathcal{V}$ appartiene a $\mathcal{M}$ in virtù della (c), si ha che $\mathcal{V}$ è una sottofamiglia finita di $\mathcal{M}$. Ma evidentemente $\bigcup \mathcal{V} = X$, e abbiamo una contraddizione. □

Teorema 3.1.12 (Alexander) *Sia X uno spazio di Hausdorff, e sia $\mathcal{S}$ una sottobase di X; supponiamo che ogni ricoprimento di X con elementi di $\mathcal{S}$ abbia un sottoricoprimento finito. Allora X è compatto.*

Dimostrazione: Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X. Supponiamo che $\mathcal{U}$ non abbia nessun sottoricoprimento finito. Per il lemma precedente esiste una famiglia $\mathcal{M}$ che verifica (a), (b), (c) e (d). In particolare, la (b) e l'ipotesi fatta sulla sottobase $\mathcal{S}$ implicano che la famiglia $\mathcal{N} = \mathcal{M} \cap \mathcal{S}$ non è un ricoprimento di X, mentre per la (a) si ha $\bigcup \mathcal{M} = X$. Sia dunque $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{N}$, e sia $M \in \mathcal{M}$ tale che $x \in M$. Poiché $\mathcal{S}$ è una sottobase, esistono $A_0, \ldots, A_{n-1} \in \mathcal{S}$ tali che $x \in A = \bigcap_{i \in n} A_i \subset M$. Segue da (c) e (d) che, per un certo $i \in n$, l'aperto A_i (che contiene x) appartiene a $\mathcal{M}$ e quindi a $\mathcal{N}$. Ciò è impossibile perché si era scelto $x \notin \bigcup \mathcal{N}$. $\square$

Teorema 3.1.13 (Tychonoff) *Sia X il prodotto topologico di una famiglia $\{X_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ di spazi di Hausdorff (non vuoti). Allora X è compatto se e solo se X_α è compatto per ogni $\alpha \in \lambda$.*

Dimostrazione: La necessità segue immediatamente dalla Prop. 3.1.8. Supponiamo dunque che per ogni $\alpha \in \lambda$ lo spazio X_α sia compatto, e indichiamo con p_α la proiezione di X su X_α. Siano x e y punti distinti di X; esiste $\beta \in \lambda$ tale che $p_\beta(x) \neq p_\beta(y)$. Se dunque A e B sono aperti disgiunti di X_β, con $p_\beta(x) \in A$ e $p_\beta(y) \in B$, allora $p_\beta^{-1}(A)$ e $p_\beta^{-1}(B)$ sono intorni aperti in X di x e y, rispettivamente. Ciò mostra che X è T_2.

Per ogni $\alpha \in \lambda$, poniamo $\mathcal{S}_\alpha = \{p_\alpha^{-1}(V) : V \text{ aperto in } X_\alpha\}$, e sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento di X costituito da elementi di $\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in \lambda} \mathcal{S}_\alpha$. Poiché $\mathcal{S}$ è una sottobase di X, per il teorema di Alexander basterà mostrare che $\mathcal{U}$ ha un sottoricoprimento finito.

Ora, per ogni $\alpha \in \lambda$, sia $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U} \cap \mathcal{S}_\alpha$, indichiamo con $F(\alpha)$ l'unione di $\mathcal{U}_\alpha$ e supponiamo che esista $z(\alpha) \in X \setminus F(\alpha)$; se φ è definita da $\alpha \mapsto p_\alpha(z(\alpha))$ allora $\varphi \in X \setminus \bigcup_{\alpha \in \lambda} F(\alpha)$, il che è impossibile. Dunque esiste $\gamma \in \lambda$ tale che $X = F(\gamma) = \bigcup \mathcal{U}_\gamma$, e da ciò segue che la famiglia $\mathcal{V} = \{V \subset X_\gamma : p_\gamma^{-1}(V) \in \mathcal{U}_\gamma\}$ è un ricoprimento aperto di X_γ, e perciò ha un sottoricoprimento finito $\mathcal{G}$; è chiaro che $\{p_\gamma^{-1}(G) : G \in \mathcal{G}\}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}_\gamma$, e quindi di $\mathcal{U}$. $\square$

Esercizio 3.1.6 *Mostrare che un sottoiniseme di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*
Suggerimento: Usare l'Esercizio 3.1.3.

Definizione 3.1.3 *Uno spazio topologico si dice* localmente compatto *se è T_2 e ogni punto ha un intorno compatto.*

In particolare ogni spazio compatto è localmente compatto. La retta reale è un esempio di spazio localmente compatto ma non compatto; un altro esempio è uno spazio discreto di cardinalità infinita.

Esercizio 3.1.7 *Dare un esempio di un sottospazio non localmente compatto di $\mathbb{R}$.*

Teorema 3.1.14 *Ogni spazio localmente compatto è regolare.*

DIMOSTRAZIONE: Sia X uno spazio localmente compatto. Consideriamo un sottoinsieme chiuso C di X, e un punto x non appartenente a C. Sia K un intorno compatto di x in X; indichiamo con U l'interno di K (in X). L'insieme $H = C \cap K$, essendo chiuso in K, è compatto, quindi per la proosizione 3.1.6 esistono V e W, aperti in X e disgiunti, tali che $x \in V$ e $H \subset W$. Allora $V' = V \cap U$ e $W' = W \cup (X \setminus K)$ sono aperti disgiunti di X tali che $x \in V'$ e $C \subset W'$. □

Corollario 3.1.15 *In uno spazio localmente compatto ogni punto ha una base di intorni compatti.* □

Esercizio 3.1.8 *Verificare che un sottospazio chiuso di uno spazio localmente compatto è anch'esso localmente compatto.*

Proposizione 3.1.16 *Per ogni sottospazio compatto A di uno spazio localmente compatto X e ogni aperto V contenente A esiste un aperto U tale che $A \subset U \subset \overline{U} \subset V$ e $\overline{U}$ è compatto.*

DIMOSTRAZIONE: In virtù del Teorema 3.1.14, ogni $x \in A$ ha un intorno aperto V_x la cui chiusura è contenuta in V; sia poi W_x un intorno aperto di x avente chiusura compatta: posto $U_x = V_x \cap W_x$ si ottiene un intorno aperto di x la cui chiusura è compatta (essendo un sottoinsieme chiuso del compatto $\overline{W_x}$) e contenuta in V. Per la compattezza di A, esistono $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in A$ tali che $A \subset U = \bigcup_{i \in n} U_{x_i}$ ed è evidente che $\overline{U}$ è compatto e contenuto in V. □

Corollario 3.1.17 *Un sottospazio aperto V di uno spazio localmente compatto X è anch'esso localmente compatto.*

DIMOSTRAZIONE: Per ogni $x \in V$, si applichi la proposizione precedente con $A = \{x\}$. □

Definizione 3.1.4 *Chiamiamo* compattificazione *di uno spazio topologico X ogni spazio compatto Y tale che X è (omeomorfo a) un sottospazio denso di Y.*

Poiché vi sono spazi di Hausdorff non regolari, segue dal Teorema 3.1.14 che non tutti gli spazi T_2 possiedono una compattificazione. Mostreremo che invece uno spazio localmente compatto (non compatto) ha sempre una compattificazione.

Teorema 3.1.18 *Sia X uno spazio localmente compatto e non compatto, e sia $Y = X \cup \{y_0\}$, con $y_0 \notin X$. Detta $\mathcal{T}$ la famiglia degli aperti di X, poniamo $\mathcal{S} = \mathcal{T} \cup \{Y \setminus K : K \subset X,\ K \text{ compatto}\}$. Allora $\mathcal{S}$ è una topologia su Y, e lo spazio così costruito è una compattificazione di X.*

Dimostrazione: È immediato verificare che $\mathcal{S}$ è una topologia, e che X è un sottospazio aperto e denso dello spazio Y. Per provare che Y è T_2 prendiamo due punti distinti x e y; è chiaro che dobbiamo considerare solo il caso in cui $y = y_0$. Se dunque K è un intorno compatto di x in X, sia U l'interno di K e poniamo $V = Y \setminus K$: allora U e V sono intorni aperti in Y di x e y_0 rispettivamente. Infine, sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di Y; detto U_0 un elemento di $\mathcal{U}$ tale che $y_0 \in U_0$, poiché $Y \setminus U_0$ è compatto esistono $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ tali che $\bigcup_{i=1}^n U_i \supset Y \setminus U_0$, e quindi $\bigcup_{i=0}^n U_i = Y$. □

La compattificazione di X costruita nel teorema precedente si chiama *compattificazione di Alexandroff*. Essa è caratteristica degli spazi localmente compatti: infatti se X è (omeomorfo a) $Y \setminus \{y_0\}$ con Y compatto, allora X è localmente compatto in virtù del corollario 3.1.17.

Esempio 3.1.9 *Siano X e Y le compattificazioni di Alexandroff di due spazi discreti infiniti, con $|X| < |Y|$. Se x_0 e y_0 sono gli unici punti di accumulazione di X e Y rispettivamente, lo spazio $Z = X \times Y \setminus \{\langle x_0, y_0\rangle\}$ è localmente compatto ma non normale.*

Dimostrazione: Siano infatti $A = (X \setminus \{x_0\}) \times \{y_0\}$ e $B = \{x_0\} \times (Y \setminus \{y_0\})$: è evidente che si tratta di due chiusi disgiunti. Supponiamo ora che U e V siano due aperti di Z tali che $A \subset U$ e $B \subset V$. Per ogni $x \in X \setminus \{x_0\}$, essendo $\langle x, y_0\rangle \in U$, esiste un insieme finito $F(x) \subset Y \setminus \{y_0\}$ tale che $\{x\} \times (Y \setminus F(x)) \subset U$. Ora, poiché la cardinalità di $C = \bigcup\{F(x) : x \in X \setminus \{x_0\}\}$ non supera quella di X, esisterà un $y \in Y \setminus (C \cup \{y_0\})$, e chiaramente $(X \setminus \{x_0\}) \times \{y\} \subset U$. Il punto $\langle x_0, y\rangle \in B$ appartiene sia alla chiusura di $(X \setminus \{x_0\}) \times \{y\}$ sia a V, quindi $U \cap V \neq \emptyset$. □

3.2 Spazi di Tychonoff

Nel seguito indicheremo con $\mathbb{I}$ l'intervallo [0,1] della retta reale (con la topologia usuale).

Definizione 3.2.1 *Uno spazio topologico X è detto* spazio di Tychonoff *o* completamente regolare, *o anche* spazio $\mathrm{T}_{3,5}$, *se è T_1 e, per ogni chiuso $C \neq \emptyset$ e ogni $x \notin C$, esiste una funzione continua $f\colon X \to \mathbb{I}$ tale che $f(x) = 0$ e $f[C] = \{1\}$.*

Se f è una funzione continua della spazio topologico X in $\mathbb{I}$ tale che $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$ per ogni $y \in C$, dove x è un punto di X e C è un chiuso che non contiene x, diciamo anche che f *separa x da C*.

Esercizio 3.2.1 *Dare un esempio di spazio di Tychonoff non localmente compatto.*

Proposizione 3.2.1 *Uno spazio di Tychonoff è regolare.*

DIMOSTRAZIONE: Infatti se $f\colon X \to \mathbb{I}$ separa il punto x dal chiuso C allora $U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}[)$ e $V = f^{-1}(]\frac{1}{2}, 1])$ sono aperti disgiunti contenenti $\{x\}$ e C, rispettivamente. $\square$

D'altra parte non tutti gli spazi regolari sono di Tychonoff.

Esempio 3.2.2 *Sia M_0 l'insieme dei punti del piano aventi ordinata non negativa, e poniamo $M = M_0 \cup \{z_0\}$, dove z_0 è il punto di coordinate $\langle 0, -1\rangle$. Indichiamo con L l'asse delle ascisse e con L_i, per ogni $i \in \omega$, il segmento costituito dai punti $\langle x, 0\rangle \in L$ con $i - 1 \leq x \leq i$. Per ogni $z = \langle x, 0\rangle \in L$ poniamo $A_1(z) = \{\langle x, y\rangle \in M_0 : 0 \leq y \leq 2\}$ e $A_2(z) = \{\langle x + y, y\rangle \in M_0 : 0 \leq y \leq 2\}$, e sia $\mathcal{B}(z)$ la famiglia di tutti gli insiemi della forma $A_1(z) \cup A_2(z) \setminus B$ dove B è un insieme finito non contenente z. Inoltre, per $z \in M \setminus L$, poniamo $\mathcal{B}(z) = \{\{z\}\}$. Infine sia $\mathcal{B}(z_0) = \{U_i(z_0) : i \in \omega\}$ dove, per ogni $i \in \omega$, è $U_i(z_0) = \{z_0\} \cup \{\langle x, y\rangle \in M_0 : x \geq i\}$. L'insieme M dotato della topologia generata dal sistema di intorni $\{\mathcal{B}(z) : z \in M\}$, è uno spazio T_3 ma non uno spazio di Tychonoff.*

DIMOSTRAZIONE: Il fatto che lo spazio M sia T_2 si verifica immediatamente. Mostriamo dunque che M è regolare. Poiché per ogni $z \in M_0$ la famiglia $\mathcal{B}(z)$ è formata da sottoinsiemi aperti e chiusi di M, basterà mostrare che per ogni chiuso F di M tale che $z_0 \notin F$ esistono V_0 e V_1, aperti e disgiunti, con $z_0 \in V_0$ e $F \subset V_1$. Sia dunque $j \in \omega$ tale che $U_j(z_0) \cap F = \emptyset$: si vede facilmente che $V_0 = U_{j+2}(z_0)$ e $V_1 = M \setminus (V_0 \cup L_j \cup L_{j+1})$ hanno le proprietà volute.

Sia ora $f\colon M \to \mathbb{I}$ una funzione continua con $f[L_0] = \{1\}$: facciamo vedere che anche $f(z_0) = 1$, cosicché M non può essere uno spazio di Tychonoff. Poiché f è continua, è sufficiente dimostrare che per ogni $i \in \omega$ l'insieme $K_i = \{z \in L_i : f(z) = 1\}$ è infinito. Procediamo per induzione. Anzitutto K_0 è infinito perché coincide con L_0. Supponiamo ora che K_n sia infinito per un certo $n \in \omega$ e dimostriamo che K_{n+1} è anch'esso infinito.

Sia K'_n un sottoinsieme numerabile di K_n. Per ogni $z \in K'_n$ e ogni $m \in \omega$, sia $B_m(z)$ un insieme finito tale che $A_1(z) \cup A_2(z) \setminus B_m(z) \subset f^{-1}(]1 - 2^{-m}, 1])$; l'insieme $C(z) = A_2(z) \cap \bigcup_{m\in\omega} B_m$ è numerabile, e chiaramente $f[A_2(z) \setminus C(z)] = \{1\}$. Ora, la proiezione A dell'insieme $\bigcup\{C(z) : z \in K'_n\}$ sulla retta L è numerabile, e quindi $L'_{n+1} = L_{n+1} \setminus A$ è un insieme infinito. Sia dunque $t \in L'_{n+1}$: poiché f è continua e $A_1(t)$ interseca $A_2(z) \setminus C(z)$ per ogni $z \in K'_n$, si deve avere $f(t) = 1$. Si conclude che $L'_{n+1} \subset K_{n+1}$, quindi K_{n+1} è infinito. □

Non è difficile dimostrare che la retta reale è uno spazio di Tychonoff. In realtà ogni spazio normale è di Tychonoff, ma questo fatto è tutt'altro che ovvio.

Teorema 3.2.2 (Lemma di Uryshon) *Siano A e B chiusi non vuoti e disgiunti di uno spazio normale X. Esiste $f \colon X \to \mathbb{I}$ tale che $f[A] = \{0\}$ e $f[B] = \{1\}$.*

Dimostrazione: Consideriamo l'insieme $D = \mathbb{I} \cap \mathbb{Q}$ di tutti i razionali compresi fra 0 e 1. Per ogni $r \in D$ costruiremo un aperto V_r, in modo che siano verificate le seguenti condizioni:

(0) $A \subset V_0$;

(1) $B \subset X \setminus V_1$;

(2) se $r < r'$ allora $\overline{V_r} \subset V_{r'}$.

Procediamo per induzione. Rappresentiamo D come $\{q_i : i \in \omega\}$, dove $q_0 = 0$ e $q_1 = 1$; per ogni $n \in \omega$ poniamo $D_n = \{q_i : i \in n\}$. Sia V_0 un aperto contenente A e la cui chiusura è disgiunta da B (ciò è possibile perche X è T_4), e prendiamo $X \setminus B$ come V_1. In tal modo la (0) e la (1) sono verficate, mentre la (2) vale per $r, r' \in D_2$. Sia ora n un numero naturale maggiore di 1, e supponiamo di aver costruito V_r in modo che la (2) valga per $r, r' \in D_n$: dobbiamo costruire l'aperto V_{q_n} in modo che la (2) valga per $r, r' \in D_{n+1}$. Posto $s = \max\{r \in D_n : r < q_n\}$ e $t = \min\{r \in D_n : r > q_n\}$, basterà prendere come V_{q_n} un aperto contenente $\overline{V_s}$ la cui chiusura sia contenuta in V_t.

Definiamo $f \colon X \to \mathbb{I}$ al seguente modo:

$$x \mapsto \begin{cases} \inf\{r \in D : x \in V_r\}, & \text{se } x \in V_1, \\ 1, & \text{se } x \notin V_1; \end{cases}$$

è chiaro che $f[A] = \{0\}$ e $f[B] = \{1\}$. Resta da provare che f è continua, il che equivale a dire che, per ogni $\varepsilon \in]0,1[$, l'insieme $G_\varepsilon = f^{-1}([0,\varepsilon[)$ è aperto e l'insieme $H_\varepsilon = f^{-1}([0,\varepsilon])$ è chiuso. Sia dunque $\varepsilon \in]0,1[$: poiché evidentemente è $f(x) < \varepsilon$ se e solo se esiste $r \in D$ con $r < \varepsilon$ tale che $x \in V_r$, abbiamo $G_\varepsilon = \bigcup\{V_r : r \in D,\ r < \varepsilon\}$; analogamente, non è difficile rendersi conto che si ha $f(x) \leq \varepsilon$ se e solo se $x \in \overline{V_r}$ per tutti gli $r \in D$ con $r > \varepsilon$, cosicché risulta $H_\varepsilon = \bigcap\{\overline{V_r} : r \in D,\ r > \varepsilon\}$. □

Corollario 3.2.3 *Ogni spazio normale è completamente regolare.* □

Proposizione 3.2.4 *Se X è uno spazio di Tychonoff e Y è un sottospazio di X allora anche Y è di Tychonoff.*

DIMOSTRAZIONE: Siano y un punto di Y e F un chiuso di Y non contenente y. Detto C un chiuso di X tale che $Y \cap C = F$, se $f\colon X \to \mathbb{I}$ è una funzione continua che separa y da C allora la restrizione di f a Y separa y da F. □

Corollario 3.2.5 *Ogni spazio localmente compatto è di Tychonoff.*

DIMOSTRAZIONE: Infatti uno spazio localmente compatto può essere pensato come sottospazio della propria compattificazione di Alexandroff. □

L'Esempio 3.1.9 mostra dunque che esistono spazi di Tychonoff non normali.

Proposizione 3.2.6 *Sia $\mathcal{S}$ una sottobase dello spazio topologico X. Condizione necessaria e sufficiente affinché X sia di Tychonoff è che per ogni $S \in \mathcal{S}$ e ogni $x \in S$ esista una funzione continua di X in $\mathbb{I}$ che separa x da $X \setminus S$.*

DIMOSTRAZIONE: Basta ovviamente dimostrare che la condizione è sufficiente. Sia dunque C un chiuso di X, e sia x_0 un punto di X non appartenente a C. Poiché $\mathcal{S}$ è una sottobase, esistono $S_0, \ldots, S_{n-1} \in \mathcal{S}$ contenenti x_0 e tali che l'aperto $B = \bigcap_{i \in n} S_i$ è disgiunto da C. Se per ogni $i \in n$ indichiamo con f_i una funzione continua di X in $\mathbb{I}$ che separa x_0 da $X \setminus S_i$, allora la funzione $f\colon X \to \mathbb{I}$ definita da $x \mapsto \max\{f_i(x) : i \in n\}$ è continua e separa x_0 da $X \setminus B$, quindi da C. □

Teorema 3.2.7 *Se X è il prodotto di una famiglia $\{X_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ di spazi di Tychonoff, allora X è di Tychonoff.*

DIMOSTRAZIONE: Per ogni $\alpha \in \lambda$, indichiamo con p_α la proiezione di X su X_α. Anzitutto osserviamo che X è T_1. Ora, poiché la famiglia

$$\{p_\alpha^{-1}(W) : W \text{ aperto in } X_\alpha,\ \alpha \in \lambda\}$$

è una sottobase di X, basterà considerare un $x_0 \in X$, un $\alpha \in \lambda$ e un aperto W di X_α tali che $x_0 \in p_\alpha^{-1}(W)$, e dimostrare che esiste una funzione continua $f\colon X \to \mathbb{I}$ che separa x_0 dal complementare in X di $p_\alpha^{-1}(W)$, cioè da $p_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus W)$. Sia dunque $g\colon X_\alpha \to \mathbb{I}$ una funzione continua che separa $p(x_0)$ da $X_\alpha \setminus W$; è facile verificare che la funzione composta $g \circ p_\alpha$ ha le caratteristiche volute. □

Esercizio 3.2.3 *Dimostrare che se* $\prod_{\alpha\in\lambda} X_\alpha$ *è uno spazio di Tychonoff non vuoto allora* X_α *è di Tychonoff per ogni* $\alpha \in \lambda$.

Definizione 3.2.2 *Una funzione* f *di uno spazio topologico* X *in uno spazio topologico* Y *si chiama* immersione *se è un omeomorfismo tra* X *e la sua immagine* $f[X]$. *Se esiste un immersione* $f\colon X \to Y$ *diremo anche che* X è immergibile in Y.

Lemma 3.2.8 *Dato uno spazio topologico* X*, sia* $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ *una famiglia di funzioni continue (dove* f_α *ha valori in uno spazio* Y_α*, per ogni* $\alpha \in \lambda$*) con le seguenti proprietà:*

(a) se x' *e* x'' *sono punti distinti di* X*, esiste* $f \in \mathcal{F}$ *tale che* $f(x') \neq f(x'')$*;*

(b) se $x \in X$ *e* $C \subset X$ *è chiuso e non contiene* x*, esiste* $f \in \mathcal{F}$ *tale che* $f(x) \notin \overline{f[C]}$.

Allora la funzione $\Phi\colon X \to \prod_{\alpha\in\lambda} Y_\alpha$*, che ad ogni* $x \in X$ *fa corrispondere l'elemento* $\hat{x}$ *definito da* $\hat{x}(\alpha) = f_\alpha(x)$ *per ogni* $\alpha \in \lambda$*, è un'immersione.*

Dimostrazione: Indichiamo con Y il prodotto $\prod_{\alpha\in\lambda} Y_\alpha$; detta p_α la proiezione di Y su Y_α, per ogni $\alpha \in \lambda$ risulta $p_\alpha \circ \Phi = f_\alpha$, quindi se W è aperto in Y_α si ha $\Phi^{-1}(p_\alpha^{-1}(W)) = f^{-1}(W)$ che è aperto in X: ciò prova che Φ è continua. Siano poi x' e x'' punti distinti di X; per la (a), esiste $\alpha \in \lambda$ tale che $f_\alpha(x') \neq f_\alpha(x'')$, e pertanto $\Phi(x') \neq \Phi(x'')$: dunque Φ è anche iniettiva. Resta solo da dimostrare che l'immagine tramite Φ di ogni chiuso di X è un chiuso di $\Phi[X]$.

Sia C un chiuso di X: mostriamo che si ha $\Phi[C] = \Phi[X] \cap \overline{\Phi[C]}$ (dove la barra indica la chiusura in Y). Supponiamo al contrario che esista $y \in \Phi[X] \cap \overline{\Phi[C]} \setminus \Phi[C]$. Sia $x \in X$ tale che $y = \hat{x}$; per ogni $\alpha \in \lambda$, la continuità della proiezione p_α assicura che l'elemento $p_\alpha(y) = \hat{x}(\alpha) = f_\alpha(x)$ appartiene alla chiusura in Y_α dell'insieme $p_\alpha[\Phi[C]] = f_\alpha[C]$. D'altra parte, avendo supposto che $y \notin \Phi[C]$, si ha $x \notin C$; così per la (b), esiste $\alpha \in \lambda$ tale che $f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha[C]}$, e abbiamo una contraddizione. □

Il prodotto $\prod_{\alpha\in\lambda} Y_\alpha$, dove $Y_\alpha = \mathbb{I}$ per ogni $\alpha \in \lambda$, sarà indicato con $\mathbb{I}^\lambda$ e chiamato "cubo di Tychonoff".

Teorema 3.2.9 *Ogni spazio di Tychonoff è immergibile in un cubo di Tychonoff.*

Dimostrazione: Infatti se X è uno spazio di Tychonoff allora la famiglia $\mathcal{F}$ di tutte le funzioni continue di X in $\mathbb{I}$ verifica le proprietà (a) e (b) del lemma precedente. □

Corollario 3.2.10 *Per uno spazio topologico X le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) X è completamente regolare;

(b) X possiede una compattificazione;

(c) X è immergibile in uno spazio compatto;

(d) X è immergibile in uno spazio normale.

DIMOSTRAZIONE: Basta dimostrare che (a) implica (b). Sia dunque $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte le funzioni continue di X in $\mathbb{I}$; per il teorema precedente, esiste un'immersione Φ di X nel cubo di Tychonoff $\mathbb{I}^{|\mathcal{F}|}$. È evidente che la chiusura di $\Phi[X]$ in $\mathbb{I}^{|\mathcal{F}|}$ è una compattificazione di X. $\square$

La compattificazione di X costruita nella precedente dimostrazione si indica con ßX e si chiama *compattificazione di Čech–Stone* di X.

Capitolo 4

Funzioni cardinali in topologia

4.1 Generalità e motivazioni

Il problema fondamentale della topologia è riconoscere quando due spazi topologici sono omeomorfi. Costruire esplicitamente un omeomorfismo tra due spazi topologici è spesso un compito estremamente difficile, ma mostrare che tra due spazi topologici non esiste alcun omeorfismo può apparire talvolta un compito ancora più formidabile.

Il metodo delle funzioni cardinali che introdurremo in questo capitolo costituisce un approccio a questa problematica generale. Infatti una funzione cardinale associa ad ogni spazio topologico un determinato numero cardinale che è invariante per omeomorfismi. Se dunque f è una certa funzione cardinale e $f(X) \neq f(Y)$, si può concludere che gli spazi X e Y <u>non</u> sono omeomorfi.

L'introduzione di tali invarianti cardinali ebbe inizio negli anni '20 ad opera della scuola russa di topologia (Luzin, Suslin, Alexandroff, Urysohn, ecc.) e tuttavia si è affermata completamente solo alla fine degli anni '60, dopo che erano state "digerite" dai matematici (o da alcuni di essi) una teoria assiomatica degli insiemi come ZFC e il metodo dei modelli (come la teoria del *forcing*) per lavorare in maniera efficace e sofisticata con gli insiemi stessi e con i numeri cardinali e ordinali.

D'altra parte, sia negli anni precedenti il 1920 sia nel periodo 1930–'60, il problema di riconoscere che due spazi topologici <u>non</u> sono omeomorfi era già stato affrontato in modo da ricondurlo a metodi algebrici. Più precisamente, si trattava di associare ad uno spazio topologico X un gruppo

$G(X)$ in modo che a spazi omeomorfi fossero associati gruppi isomorfi. Perciò dal non isomorfismo dei gruppi $G(X)$ e $G(Y)$ si poteva dedurre il non omeomorfismo degli spazi topologici X e Y.

I due metodi, quello degli invarianti cardinali e quello algebrico, sono complementari. Il secondo è applicabile a spazi topologici, come i poliedri, per i quali il primo non potrebbe dare alcun risultato, almeno nel modo in cui è stato sviluppato finora. Viceversa il primo è spesso utile in situazioni, anche "patologiche", molto lontane da interpretazioni geometriche e alle quali il metodo algebrico sarebbe difficilmente applicabile.

Nel seguito introdurremo gli elementi della teoria delle funzioni cardinali. Come abbiamo accennato sopra, una *funzione cardinale* è, per definizione, un'applicazione f (f è una classe propria, non un insieme!) che ad ogni spazio topologico X associa un numero cardinale in modo tale che se X è omeomorfo a Y allora $f(X) = f(Y)$.

Diciamo che la funzione cardinale f è *ereditaria* (o monotòna) se per ogni spazio topologico X e ogni $Y \subset X$ si ha $f(Y) \leq f(X)$. In ogni caso possiamo considerare la "versione ereditaria" di f, definita da $hf(X) = \sup\{f(Y) : Y \subset X\}$; ovviamente $hf(X) \geq f(X)$, e le due funzioni coincidono se e solo se f è ereditaria.

Un semplice ma importante esempio di funzione cardinale (ereditaria) è la cardinalità. Essa è spesso usata come pietra di paragone per le altre funzioni cardinali. I risultati che troveremo saranno in generale espressi come disuguaglianze tra funzioni cardinali. Inoltre mireremo alla valutazione di queste funzioni cardinali su spazi particolari.

Per motivi di praticità, sommeremo ω alla definizione "naturale" di ogni funzione cardinale f, in modo tale che il minimo valore che può assumere $f(X)$ sia appunto ω. Per dirla alla maniera dei topologi: "non ci sono cardinali finiti in topologia generale".

4.2 Funzioni cardinali "locali"

In questo paragrafo considereremo alcune importanti funzioni cardinali che si costruiscono al seguente modo: dapprima si definisce $f(x, X)$ per ogni spazio X e ogni punto x di X, poi si pone $f(X) = \sup\{f(x, X) : x \in X\}$.

4.2.1 Il carattere

Il *carattere di un punto x* dello spazio topologico X è

$$\chi(x, X) = \min\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \text{ è una base di intorni di } x \text{ in } X\} + \omega$$

dove la somma, qui come in seguito, è ovviamente quella cardinale. In altre parole, $\chi(x, X)$ è il minimo cardinale infinito κ tale che X ha una base locale in x di cardinalità non superiore a κ. Il *carattere dello spazio* X è $\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\}$; se $\chi(X) = \omega$ diciamo che X soddisfa il primo assioma di numerabilità, o anche che X è "primo-numerabile". Un esempio di spazio primo-numerabile è la retta reale (come qualunque spazio metrizzable).

Se x è un punto isolato di X si ha ovviamente $\chi(x, X) = \omega$: ciò mostra che uno spazio X di carattere fissato può avere cardinalità arbitrariamente grande.

Esercizio 4.2.1 *Mostrare che il carattere è una funzione ereditaria.*

Esempio 4.2.2 La "retta di Sorgenfrey"
Si tratta dello spazio topologico S i cui punti sono i numeri reali e i cui aperti sono unioni di intervalli della forma $[a, b[$. La topologia di S è più fine della usuale topologia sui reali, per cui S è uno spazio di Hausdorff; in effetti S è T_3, poiché gli intervalli $[a, b[$ sono anche chiusi in S.

Essendo $\{[x, x + 2^{-n}[\, : n \in \omega\}$ una base di intorni di x, si ha $\chi(x, S) = \omega$ per ogni $x \in S$, quindi $\chi(S) = \omega$.

Esercizio 4.2.3 *Sia κ un cardinale infinito. Dimostrare che per il prodotto $X = \prod_{\alpha\in\lambda} X_\alpha$, con $\lambda \leq \kappa$, si ha $\chi(X) \leq \kappa$ se e solo se $\chi(X_\alpha) \leq \kappa$ per ogni $\alpha \in \lambda$.*

Esempio 4.2.4 *Sia κ un cardinale infinito. Consideriamo il prodotto topologico $\prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$, dove per ogni α lo spazio X_α è l'ordinale $2 = \{0, 1\}$ dotato della topologia discreta. Allora X non ha punti isolati e, per ogni $x \in X$, si ha $\chi(x, X) = \kappa$.*

DIMOSTRAZIONE: Sappiamo, per l'esercizio precedente, che $\chi(X) \leq \kappa$. Fissato $x \in X$, sia $\mathcal{U}$ una famiglia di intorni di x avente cardinalità $\nu < \kappa$. Ogni $U \in \mathcal{U}$ contiene un intorno della forma $W^{(U)} = \prod_{\alpha\in\kappa} W_\alpha^{(U)}$, con $W_\alpha^{(U)} \neq 2$ solo per gli α appartenenti a un opportuno insieme finito $F(U) \subset \kappa$. Ora, poiché evidentemente $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} F(U) \neq \kappa$, possiamo considerare un $\gamma < \kappa$ tale che $\gamma \notin F(U)$ per ogni $U \in \mathcal{U}$. Se indichiamo con p_γ la proiezione di X su X_γ, l'insieme $V = p_\gamma^{-1}(p_\gamma(x))$ è un intorno (aperto) di x che per ogni $U \in \mathcal{U}$ non contiene $W^{(U)}$, e tantomeno U. Pertanto $\mathcal{U}$ non può essere una base di intorni di x. $\Box$

Lo spazio X dell'esempio precedente sarà indicato col simbolo 2^κ (quando ciò non dia luogo a confusione) e chiamato "cubo di Cantor di peso κ". (Si veda in proposito l'Esercizio 4.3.4). Nel caso $\kappa = \omega$ si parla più propriamente di "insieme di Cantor".

Esempio 4.2.5 *Definiamo uno spazio topologico come segue: $X = \omega^2 \cup \{\omega\}$; tutti i punti di ω^2 sono isolati, e un sottoinsieme U di X con $\omega \in U$ è intorno di ω se e solo se esiste $\varphi \in {}^{\omega}\omega$ tale che $\langle h, k\rangle \in U$ per ogni $k \geq \varphi(h)$.*

Allora X è uno spazio di Hausdorff numerabile, ma $\chi(X) > \omega$.

DIMOSTRAZIONE: È chiaro che X è numerabile, come pure che è uno spazio topologico T_2 (in realtà X è addirittura T_6). Mostriamo ora che $\chi(\omega, X) > \omega$. Sia $\mathcal{U} = \{U_i : i \in \omega\}$ una famiglia numerabile di intorni di ω; per ogni $i \in \omega$, sia $\varphi_i \in {}^{\omega}\omega$ tale che $\langle h, k\rangle \in U_i$ per ogni $k \geq \varphi_i(h)$. Ora, per ogni $n \in \omega$, sia $f(n) = \max\{\varphi_i(n) : i \leq n\} + 1$; poiché $f \in {}^{\omega}\omega$, l'insieme $V = \{\omega\} \cup \{\langle h, k\rangle : k \geq f(h)\}$ è un intorno di ω in X, ma per ogni $n \in \omega$ si ha $\langle n, \varphi_n(n)\rangle \in U_n \setminus V$ e quindi $\mathcal{U}$ non può essere una base di intorni di ω in X. □

È talvolta utile considerare anche il *carattere di un sottoinsieme S* dello spazio topologico X, indicato con $\chi(S, X)$. Se chiamiamo base di intorni di S in X una famiglia $\mathcal{U}$ di aperti di X contenenti S tale che per ogni aperto $G \supset S$ esista $U \in \mathcal{U}$ con $U \subset G$, possiamo definire $\chi(S, X)$ come il minimo cardinale infinito κ per il quale esiste una base di intorni di S in X avente cardinalità non superiore a κ. Osserviamo che, se U è aperto in X e contiene S, si ha $\chi(S, U) = \chi(S, X)$.

Teorema 4.2.1 *Se X è uno spazio T_2, per ogni coppia di sottoinsiemi compatti K_1, K_2 con $K_1 \subset K_2$, si ha*[1] $\chi(K_1, X) \leq \chi(K_1, K_2)\chi(K_2, X)$.

DIMOSTRAZIONE: Posto $\kappa = \chi(K_1, K_2)$ e $\lambda = \chi(K_2, X)$, siano $\{V_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ e $\{W_\beta : \beta \in \lambda\}$ basi di intorni rispettivamente di K_1 in K_2 e di K_2 in X. Per ogni $\alpha < \kappa$, essendo K_1 e $K_2 \setminus V_\alpha$ compatti disgiunti, esistono G_α e H_α aperti in X, disgiunti e tali che $K_1 \subset G_\alpha$ e $K_2 \setminus V_\alpha \subset H_\alpha$, cioè $K_2 \subset V_\alpha \cup H_\alpha$. La tesi sarà provata mostrando che

$$\{G_\alpha \cap W_\beta : \langle \alpha, \beta\rangle \in \kappa \times \lambda\}$$

è una base di intorni di K_1 in X.

Sia dunque U aperto in X contenente K_1. Allora $U \cap K_2$ è un aperto di K_2 che contiene K_1 e quindi conterrà anche V_α per un certo $\alpha < \kappa$; ne segue che $K_2 \subset V_\alpha \cup H_\alpha \subset (U \cap K_2) \cup H_\alpha \subset U \cup H_\alpha$ e, poiché quest'ultimo insieme è aperto in X, per un opportuno $\beta < \lambda$ si ha $W_\beta \subset U \cup H_\alpha$ da cui, infine,

$$G_\alpha \cap W_\beta \subset G_\alpha \cap (U \cup H_\alpha) = (G_\alpha \cap U) \cup (G_\alpha \cap H_\alpha) = G_\alpha \cap U \subset U. \quad \square$$

[1] D'ora in avanti scriveremo sempre $\kappa\lambda$ per indicare il prodotto (cardinale) di due numeri cardinali κ e λ.

Teorema 4.2.2 *Sia X uno spazio di Hausdorff, e sia $\mathcal{F}$ una famiglia finita di sottoinsiemi chiusi di X, almeno uno dei quali compatto. Allora $\chi(\bigcap \mathcal{F}, X) \leq \prod_{F\in\mathcal{F}} \chi(F, X)$.*

DIMOSTRAZIONE: In virtù del principio di induzione possiamo limitarci al caso in cui $\mathcal{F}$ contenga due elementi F e K, con K compatto; indichiamo l'intersezione con H. Per il teorema precedente si ha $\chi(H, X) \leq \chi(H, K)\chi(K, X)$; dimostriamo dunque che $\chi(H, K) \leq \chi(F, X)$.

Sia $\kappa = \chi(F, X)$, e consideriamo una base $\mathcal{V}$ di intorni di F in X, con $|\mathcal{V}| \leq \kappa$. Posto $\mathcal{U} = \{K \cap V : V \in \mathcal{V}\}$, si ha $|\mathcal{U}| \leq \kappa$, e resta da dimostrare che $\mathcal{U}$ è una base di intorni di H in K.

Preso G aperto in K contenente H, esiste W aperto in X tale che $G = K \cap W$; ora $A = W \cup (X \setminus K)$ è aperto in X e contiene F, quindi esisterà $V \in \mathcal{V}$ contenuto in A. Pertanto

$$U = K \cap V \subset K \cap (W \cup (X \setminus K)) = (K \cap W) \cup (K \cap (X \setminus K)) = K \cap W = G.$$

□

4.2.2 Lo pseudocarattere

Se X è uno spazio T_1, si definisce *pseudocarattere di un punto* x di X il minimo cardinale infinito κ tale che $\{x\}$ sia l'intersezione di una famiglia di intorni di x avente cardinalità non superiore a κ; esso verrà indicato con $\psi(x, X)$. Lo *pseudocarattere dello spazio* X è $\psi(X) = \sup\{\psi(x, X) : x \in X\}$. In uno spazio T_1, una base $\mathcal{U}$ di intorni di un punto x ha sempre la proprietà che $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$: pertanto si ha $\psi(x, X) \leq \chi(x, X)$ per ogni $x \in X$, e quindi $\psi(X) \leq \chi(X)$; inoltre il fatto che $\{x\} = \bigcap\{X \setminus \{y\} : y \neq x\}$, mostra che $\psi(X) \leq |X|$. Notiamo anche che per la retta reale si ha ovviamente $\psi(\mathbb{R}) = \omega < |\mathbb{R}| = 2^\omega$.

Se X è lo spazio dell'Esempio 4.2.5, si ha $\psi(X) < \chi(X)$.

Esercizio 4.2.6 *Mostrare che lo pseudocarattere è una funzione ereditaria.*

Lemma 4.2.3 *In uno spazio di Hausdorff X, sia $\mathcal{K}$ una famiglia di sottospazi compatti chiusa per intersezioni finite. Se U è un aperto di X tale che $\bigcap \mathcal{K} \subset U$, allora esiste un $K \in \mathcal{K}$ tale che $K \subset U$.*

DIMOSTRAZIONE: Fissiamo $K_0 \in \mathcal{K}$, e sia $Y = K_0 \setminus U$. La famiglia $\{Y \setminus K : K \in \mathcal{K}\}$ è un ricoprimento aperto dello spazio compatto Y: infatti $\bigcup\{Y \setminus K : K \in \mathcal{K}\} = Y \setminus \bigcap \mathcal{K} \supset Y \setminus U = Y$. Esistono dunque $H_0, H_1, \ldots, H_{n-1} \in \mathcal{K}$ tali che $Y = \bigcup_{i\in n} Y \setminus H_i = Y \setminus \bigcap_{i\in n} H_i$. Poiché $\mathcal{K}$ è chiusa per intersezioni finite, il compatto $H = \bigcap_{i\in n} H_i$ appartiene a $\mathcal{K}$; ora, come abbiamo visto, $Y \setminus H = Y$, cioè $Y \subset X \setminus H$, e quindi $H \subset X \setminus Y = (X \setminus K_0) \cup U$. Pertanto $K_0 \cap H$ è un elemento di $\mathcal{K}$ contenuto in U. $\square$

Teorema 4.2.4 *Se X è localmente compatto (in particolare compatto), si ha $\psi(x, X) = \chi(x, X)$ per ogni $x \in X$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia x un punto di X, e sia $\mathcal{G}$ una famiglia di intorni di x tale che $\bigcap \mathcal{G} = \{x\}$ e $|\mathcal{G}| \leq \kappa$, dove $\kappa = \psi(x, X)$: mostriamo che c'è una base di intorni di x avente cardinalità non superiore a κ.

Per ogni $G \in \mathcal{G}$, sia K_G un intorno compatto di x contenuto in G; se indichiamo con $\mathcal{V}$ la famiglia delle intersezioni finite degli elementi di $\{K_G : G \in \mathcal{G}\}$, allora chiaramente $|\mathcal{V}| \leq \kappa$ e ogni $V \in \mathcal{V}$ è un intorno compatto di x.

Sia ora U un qualunque intorno aperto di x. Poiché $\bigcap \mathcal{V} = \{x\} \subset U$, per il lemma precedente esiste $V \in \mathcal{V}$ tale che $V \subset U$. Essendo U arbitrario, si conclude che $\mathcal{V}$ è una base locale in x. $\square$

Introduciamo ora una funzione ausiliaria h che chiameremo il "tipo puntuale" dello spazio. Se X è uno spazio topologico, $h(X)$ è per definizione il minimo cardinale (infinito) κ tale che per ogni $x \in X$ esiste un sottospazio compatto K contentente x, con $\chi(K, X) \leq \kappa$. Ovviamente $h(X) \leq \chi(X)$, e $h(X) = \omega$ se X è compatto. Se X è lo spazio dell'Esempio 4.2.5, si ha $h(X) > \omega$ (ciò si può facilmente verificare applicando il successivo Teorema 4.2.6) e quindi una compattificazione di X mostra che h non è ereditaria.

Lemma 4.2.5 *Se X è uno spazio T_2, per ogni aperto $A \subset X$ si ha $h(A) \leq h(X)$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia p un punto di A, e $K \subset X$ un compatto tale che $\chi(K, X) \leq h(X)$. Per il Lemma di Urysohn, esiste $f\colon K \to [0, 1]$ continua e tale che $f(p) = 0$ e $f[K \setminus A] = \{1\}$. Poniamo $Q = f^{-1}(\{0\})$ e, per ogni $n \in \omega$, sia $V_n = f^{-1}([0, 2^{-n}[)$; è chiaro che Q è un sottoinsieme chiuso di K, quindi è compatto, e che V_n è un aperto di K contenente Q per ogni $n \in \omega$. Mostriamo ora che $\{V_n : n \in \omega\}$ è una base di intorni di Q in K.

Sia W un aperto di K contenente Q: allora $F = K \setminus W$ è chiuso in K, quindi compatto, e disgiunto da Q. Per la compattezza di F esiste $\varepsilon = \min f[F]$, e deve essere $\varepsilon > 0$ perché $F \cap Q = \emptyset$. Se ora $n \geq -\log_2 \varepsilon$, si ha $2^{-n} \leq \varepsilon$, e quindi V_n è disgiunto da F, cioè contenuto in W.

Tenendo conto del Teorema 4.2.1, si ha dunque

$$\chi(Q, A) = \chi(Q, X) \leq \chi(Q, K)\chi(K, X) \leq \omega \cdot h(X) = h(X)$$

e, per l'arbitrarietà di p, si conclude che $h(A) \leq h(X)$. $\square$

Teorema 4.2.6 *Se X è uno spazio T_2 allora $\chi(X) = \psi(X)h(X)$.*

DIMOSTRAZIONE: Fissato $x \in X$, sia K compatto contenente x e tale che $\chi(K, X) \leq h(X)$. Applicando i Teoremi 4.2.1 e 4.2.4, si ha

$$\chi(x, X) \leq \chi(x, K)\chi(K, X) = \psi(x, K)\chi(K, X) \leq \psi(x, X)h(X).$$

Pertanto $\chi(X) \leq \psi(X)h(X)$; la disuguaglianza opposta è ovvia. $\square$

4.2.3 La strettezza (tightness)

La *strettezza in un punto* x dello spazio topologico X è il minimo cardinale infinito κ tale che, per ogni $A \subset X$, se $x \in \overline{A}$ allora esiste $B \subset A$ con $|B| \leq \kappa$ e $x \in \overline{B}$; essa si indica con $t(x, X)$. La *strettezza dello spazio* X è $t(X) = \sup\{t(x, X) : x \in X\}$. È evidente che si tratta di una funzione cardinale ereditaria.

In generale si ha $t(X) \leq |X|$, ma $t(\mathbb{R}) = \omega < |\mathbb{R}|$; inoltre è sempre $t(X) \leq \chi(X)$, e può essere $t(X) < \chi(X)$ come mostra l'Esempio 4.2.5.

Teorema 4.2.7 *Sia X uno spazio topologico di strettezza κ, e sia $\{F_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ una successione crescente di chiusi, e sia $\mathrm{cf}(\lambda) > \kappa$ (ad es. $\lambda = \kappa^+$). Allora $F = \bigcup_{\alpha\in\lambda} F_\alpha$ è chiuso.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $p \in \overline{F}$; poiché $t(X) = \kappa$, esiste $H \subset F$, con $|H| \leq \kappa$, tale che $p \in \overline{H}$. Per ogni $x \in H$, sia $\alpha_x < \lambda$ tale che $x \in F_{\alpha_x}$. L'insieme $A = \{\alpha_x : x \in H\}$ è limitato in λ perché $|A| \leq \kappa < \mathrm{cf}(\lambda)$; ponendo dunque $\gamma = \sup A$, si ha $\gamma \in \lambda$ e $H \subset F_\gamma$, in quanto la successione è crescente. Ora F_γ è chiuso, per cui abbiamo $p \in F_\gamma \subset F$. Segue la tesi, per l'arbitrarietà di p. $\square$

Sia A un sottoinsieme di uno spazio topologico X, e κ un cardinale infinito; definiamo

$$[A]_\kappa = \bigcup\{\overline{B} : B \subset A,\ |B| \leq \kappa\}. \tag{4.1}$$

Esercizio 4.2.7 *Mostrare che per ogni spazio topologico X si ha*

$$t(X) = \min\{\kappa : \forall A \subset X\ ([A]_\kappa = \overline{A})\}. \tag{4.2}$$

Teorema 4.2.8 *Per ogni spazio topologico X, la strettezza $t(X)$ è il minimo cardinale κ tale che per ogni sottoinsieme non chiuso A di X si ha $[A]_\kappa \neq A$.*

Dimostrazione: Sia $\mu = \min\{\kappa : \forall A \subset X\ (\overline{A} \neq A \Rightarrow [A]_\kappa \neq A)\}$; il fatto che $\mu \leq t(X)$ segue immediatamente dalla (4.2). Resta da provare che $t(X) \leq \mu$ e, a tale scopo, sempre tenendo conto della (4.2), basterà far vedere che per ogni $A \subset X$ si ha $[A]_\mu = \overline{A}$.

Supponiamo, al contrario, che esista A tale che $[A]_\mu \neq \overline{A}$; ciò significa, essendo $A \subset [A]_\mu \subset \overline{A}$, che $[A]_\mu$ non è chiuso e quindi, per la definizione di μ, abbiamo $[[A]_\mu]_\mu \neq [A]_\mu$, cioè esiste $D \subset [A]_\mu$ con $|D| \leq \mu$ e $\overline{D} \not\subset [A]_\mu$. Rappresentiamo D come $\{z_\alpha : \alpha \in \mu\}$, e per ogni $\alpha \in \mu$ sia $B_\alpha \subset A$ tale che $|B_\alpha| \leq \mu$ e $z_\alpha \in \overline{B_\alpha}$. Posto $B = \bigcup_{\alpha\in\mu} B_\alpha$, poiché $B \subset A$ e $|B| \leq \mu$, deve essere $\overline{B} \subset [A]_\mu$, ma questo è impossibile in quanto $\overline{D} \subset \overline{B}$. □

Analogamente a quanto fatto per il carattere, possiamo considerare anche la *strettezza di un sottoinsieme* S dello spazio topologico X, indicata con $t(S,X)$ e definita come il minimo cardinale infinito κ tale che, per ogni $A \subset X$, se $S \cap \overline{A} \neq \emptyset$ allora esiste $B \subset A$ con $|B| \leq \kappa$ e $S \cap \overline{B} \neq \emptyset$ (in altre parole $S \cap [A]_\kappa \neq \emptyset$). È ovvio che $t(S,X) \leq \chi(S,X)$ per ogni spazio topologico X e ogni $S \subset X$.

Teorema 4.2.9 *Se X è uno spazio T_2, per ogni coppia di sottoinsiemi compatti K_1, K_2 con $K_1 \subset K_2$, si ha $t(K_1,X) \leq t(K_1,K_2)t(K_2,X)$.*

Dimostrazione: Sia $\kappa = t(K_1,K_2)t(K_2,X)$. Supponiamo che $t(K_1,X) > \kappa$, cioè che esista $A \subset X$ tale che $K_1 \cap [A]_\kappa = \emptyset$ ma $K_1 \cap \overline{A} \neq \emptyset$, e fissiamo $p \in K_1 \cap \overline{A}$. Essendo $K_1 \cap (K_2 \cap [A]_\kappa) = \emptyset$ e $t(K_1, K2) \leq \kappa$, si ha $K_1 \cap (\overline{K_2 \cap A}) = \emptyset$ e, in particolare, $K_1 \cap \overline{K_2 \cap [A]_\kappa} = \emptyset$.

Ora, poiché K_1 è compatto, esiste un aperto U contenente K_1 e tale che $K_2 \cap [A]_\kappa \cap \overline{U} = \emptyset$. D'altra parte, essendo $p \in K_2 \cap \overline{U \cap A}$ e $t(K_2,X) \leq \kappa$, deve esistere $B \subset U \cap A$, con $|B| \leq \kappa$, tale che $K_2 \cap \overline{B} \neq \emptyset$: questo è impossibile perché $\overline{B} \subset [A]_\kappa \cap \overline{U}$. □

4.3 Funzioni cardinali "globali"

4.3.1 Il peso e il peso di rete

Il *peso* di uno spazio topologico è così definito:

$$w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ è una base per } X\} + \omega.$$

È immediato verificare che il peso è una funzione ereditaria. Se $w(X) = \omega$ diciamo che X soddisfa il secondo assioma di numerabilità, o anche che X è "secondo-numerabile".

La retta reale è un esempio di spazio topologico la cui cardinalità è maggiore del peso. Poiché ovviamente $\chi(X) \leq w(X)$, l'Esempio 4.2.5 mostra che ci sono anche spazi in cui il peso è maggiore della cardinalità. In ogni caso è chiaro che $w(X)$ non può superare $2^{|X|}$.

Esercizio 4.3.1 *Sia κ un cardinale infinito, e $\mathcal{S}$ una famiglia di sottoinsiemi di un insieme X, con $|\mathcal{S}| \leq \kappa$. Verificare che la topologia generata da $\mathcal{S}$ su X ha peso non superiore a κ.*

Chiaramente $w(X) \leq |X|\chi(X)$ per ogni spazio topologico X.

Esercizio 4.3.2 *Sia S la retta di Sorgenfrey (Esempio 4.2.2). Dimostrare che $w(S) = |S|\chi(S) = 2^\omega$.*
SUGGERIMENTO: Se $\mathcal{B}$ è una base di S allora, per ogni $x \in S$, esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $\min B = x$.

Teorema 4.3.1 *Se X è T_0 allora $|X| \leq 2^{w(X)}$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathcal{B}$ una base di X tale che $|\mathcal{B}| \leq w(X)$. Per ogni $x \in X$, poniamo $\mathcal{B}(x) = \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$. Poiché X è T_0, se $x \neq y$ allora $\mathcal{B}(x) \neq \mathcal{B}(y)$. Ma vi sono al più $2^{w(X)}$ sottofamiglie distinte di $\mathcal{B}$, dunque $|X| \leq 2^{w(X)}$. $\square$

Esercizio 4.3.3 *Sia κ un cardinale infinito. Dimostrare che per il prodotto $X = \prod_{\alpha\in\lambda} X_\alpha$, con $\lambda \leq \kappa$, si ha $w(X) \leq \kappa$ se e solo se $w(X_\alpha) \leq \kappa$ per ogni $\alpha \in \lambda$.*

Esercizio 4.3.4 *Sia κ un cardinale infinito. Usando il risultato precedente e l'Esempio 4.2.4, verificare che il cubo di Cantor 2^κ ha effettivamente peso κ.*

Chiamiamo *rete* di uno spazio topologico X una famiglia $\mathcal{N}$ di sottoinsiemi (non necessariamente aperti) di X tali che ogni aperto si può scrivere come unione di una sottofamiglia di $\mathcal{N}$; equivalentemente: per ogni $x \in X$ e ogni intorno U di X esiste un $N \in \mathcal{N}$ tale che $x \in N \subset U$. Il minimo cardinale infinito κ tale che X ha una rete di cardinalità non superiore a κ verrà chiamato *peso di rete* di X, e indicato con $nw(X)$. Notiamo che si tratta di una funzione ereditaria.

Poiché $\{\{x\} : x \in X\}$ è una rete di X, si ha $nw(X) \leq |X|$; la retta reale mostra che non vale l'uguaglianza. Inoltre ogni base di X è una rete, e pertanto $nw(X) \leq w(X)$; anche quest'ultima disuguaglianza può essere stretta, come mostra l'Esempio 4.2.5.

Lemma 4.3.2 *Per ogni spazio di Hausdorff X esiste un'applicazione continua e biiettiva di X su uno spazio di Hausdorff Y tale che $w(Y) \leq nw(X)$.*

Dimostrazione: Sia $\mathcal{S}$ la famiglia degli aperti di X, e sia $\mathcal{N}$ una rete di X con $|\mathcal{N}| \leq \kappa$, dove $\kappa = nw(X)$. Si considerino le coppie $\langle N_1, N_2 \rangle$ di elementi di $\mathcal{N}$ per le quali esistano aperti disgiunti $U_1, U_2 \in \mathcal{S}$, con $U_1 \supset N_1$ e $U_2 \supset N_2$, e per ogni coppia $\langle N_1, N_2 \rangle$ si scelga una coppia di aperti $\langle U_1, U_2 \rangle$; indichiamo con $\mathcal{U}$ la famiglia degli aperti così determinati: la famiglia $\mathcal{B}$ delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{U}$ è base di una topologia $\mathcal{T}$, meno fine di $\mathcal{S}$. Ora, indicando con Y lo spazio che ha lo stesso insieme sostegno di X ma dotato della topologia $\mathcal{T}$, si ha che l'identità è un'applicazione continua e biiettiva di X su Y, e $w(Y) \leq \kappa$.

Resta da dimostrare che Y è T_2. Siano dunque x_1 e x_2 due punti distinti: esistono G_1 e G_2, aperti in X e disgiunti, tali che $x_1 \in G_1$ e $x_2 \in G_2$. Poiché $\mathcal{N}$ è una rete di X, esistono $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ tali che $x_1 \in N_1 \subset G_1$ e $x_2 \in N_2 \subset G_2$: dunque esistono $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ disgiunti con $U_1 \supset N_1$ e $U_2 \supset N_2$. Chiaramente U_1 e U_2 sono intorni in Y di x_1 e x_2, rispettivamente. $\square$

Teorema 4.3.3 *Se X è uno spazio compatto allora $nw(X) = w(X)$.*

Dimostrazione: Basta dimostrare che $w(X) \leq nw(X)$: ciò segue immediatamente dal lemma precedente, tenendo conto del fatto che un'applicazione continua e biiettiva di uno spazio compatto X su uno spazio di Hausdorff Y è un omeomorfismo. $\square$

Teorema 4.3.4 *Se X è localmente compatto allora $nw(X) = w(X)$.*

Dimostrazione: Sia $\mathcal{N}$ una rete di X con $|\mathcal{N}| \leq \kappa$, dove $\kappa = nw(X)$. La famiglia $\mathcal{M}$ degli elementi di $\mathcal{N}$ aventi chiusura compatta è un ricoprimento di X, in quanto X è localmente compatto. Per ogni $M \in \mathcal{M}$, sia U_M un aperto tale che $\overline{M} \subset U_M$ e $\overline{U_M}$ è compatto; poiché $nw(\overline{U_M}) \leq nw(X) = \kappa$, segue dal Teorema 4.3.3 che $w(U_M) \leq \kappa$, cioè che esiste una base $\mathcal{B}_M$ di cardinalità non superiore a κ per il sottospazio U_M di X. Si vede facilmente che $\mathcal{B} = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \mathcal{B}_M$ è una base di X, con $|\mathcal{B}| \leq \kappa$, e si conclude che $w(X) \leq \kappa$. $\square$

4.3.2 Numero di Lindelöf, estensione e diffusione

Il *numero di Lindelöf* di uno spazio topologico X è il minimo cardinale infinito κ tale che ogni ricoprimento aperto di X ha un sottoricoprimento di cardinalità non superiore a κ; esso si indica con $L(X)$. Se $L(X) = \omega$, diciamo che X è uno spazio di Lindelöf.

Per ogni X si ha $L(X) \leq |X|$ e, ancora una una volta, la retta reale mostra che non vale l'uguaglianza. Inoltre è ovvio che $L(X) \leq w(X)$; in particolare ogni spazio secondo-numerabile è di Lindelöf. Poiché ogni spazio compatto è di Lindelöf, la compattificazione di Alexandroff di uno spazio discreto di cardinalità non numerabile mostra che si può avere $L(X) < w(X)$. Quest'ultimo esempio mostra inoltre che L non è ereditaria; d'altra parte $L(Y) \leq L(X)$ per ogni Y chiuso in X, come facilmente si verifica.

Teorema 4.3.5 *Ogni spazio regolare di Lindelöf è normale.*

DIMOSTRAZIONE: Sia X uno spazio regolare di Lindelöf, e siano A, B sottonsiemi chiusi disgiunti di X. Per ogni $a \in A$ siano W_a, Z_a aperti disgiunti tali che $a \in W_a$ e $B \subset Z_a$. Poiché $\{W_a : a \in A\}$ è un ricoprimento aperto di A, esso avrà un sottoricoprimento della forma $\{U_i : i \in \omega\}$, cioè A è contenuto nell'unione di una famiglia numerabile di aperti le cui chiusure non intersecano B. Analogamente, scambiando i ruoli di A e B, possiamo costruire una famiglia $\{V_i : i \in \omega\}$ di aperti tali che

$$\forall i \in \omega \ A \cap \overline{V_i} = \emptyset \quad B \subset \bigcup_{i \in \omega} V_i. \tag{4.3}$$

Per ogni $i \in \omega$, poniamo

$$G_i = U_i \setminus \bigcup_{j \leq i} \overline{V_j}, \quad H_i = V_i \setminus \bigcup_{j \leq i} \overline{U_j} : \tag{4.4}$$

gli insiemi G_i e H_i sono aperti; inoltre dalla (4.3) segue che l'aperto $H = \bigcup_{i \in \omega} H_i$ contiene B, e analogamente si vede che l'aperto $G = \bigcup_{i \in \omega} G_i$ contiene A. Ora, poiché la (4.4) implica che $G_i \cap V_j = \emptyset$ per $j \leq i$, abbiamo $G_i \cap H_j = \emptyset$ per $j \leq i$; similmente $H_j \cap U_i = \emptyset$ per $i \leq j$, e quindi $G_i \cap H_j = \emptyset$ per $i \leq j$: dunque $G_i \cap H_j = \emptyset$ per ogni scelta di i e j, cosicché $G \cap H = \emptyset$. □

Definiamo il *numero di Lindelöf ereditario* come

$$hL(X) = \sup\{L(Y) : Y \subset X\}.$$

Se $hL(X) = \omega$ diremo che lo spazio X è *ereditariamente di Lindelöf.*

Poiché il peso è una funzione ereditaria si ha subito $hL(X) \leq w(X)$. In realtà vale il seguente più forte risultato.

Teorema 4.3.6 *Per ogni spazio topologico X si ha $hL(X) \leq nw(X)$.*

DIMOSTRAZIONE: Essendo il peso di rete una funzione ereditaria, è sufficiente dimostrare che $L(X) \leq nw(X)$. Sia dunque $\mathcal{N}$ una rete di X con $|\mathcal{N}| \leq \kappa$, dove $\kappa = nw(X)$. Se $\mathcal{V}$ è un ricoprimento aperto di X, sia $\mathcal{N}_0 = \{N \in \mathcal{N} : \exists V \in \mathcal{V}\ (N \subset V)\}$ e, per ogni $N \in \mathcal{N}_0$, scegliamo $V_N \in \mathcal{V}$ tale che $N \subset V_N$: poiché $\bigcup \mathcal{N}_0 = X$, anche $\mathcal{U} = \{V_N : N \in \mathcal{N}\}$ è un ricoprimento di X, e chiaramente $|\mathcal{U}| \leq \kappa$. □

Osserviamo che in realtà $hL(X) = \sup\{L(Y) : Y \subset X,\ Y \text{ aperto}\}$. In effetti $hL(X)$ è il minimo cardinale infinito κ tale che ogni famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi aperti (chiusi) di X contiene una sottofamiglia $\mathcal{G}$, con $|\mathcal{G}| \leq \kappa$, tale che $\bigcup \mathcal{G} = \bigcup \mathcal{F}$ (risp. $\bigcap \mathcal{G} = \bigcap \mathcal{F}$).

Esercizio 4.3.5 *Dimostrare che $hL(X)$ è il minimo cardinale infinito κ tale che ogni successione crescente di aperti $\{U_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ è definitivamente costante, cioè esiste un $\gamma \in \kappa^+$ tale che $U_\alpha = U_\gamma$ per ogni $\alpha \geq \gamma$.*

Teorema 4.3.7 *Per ogni spazio di Hausdorff X si ha $\psi(X) \leq hL(X)$.*

Dimostrazione: Sia $\kappa = hL(X)$. Fissato $x \in X$, indichiamo con $\mathcal{F}$ la famiglia degli intorni chiusi di x; poiché X è T_2, si ha $\bigcap \mathcal{F} = \{x\}$. Ora, per quanto sopra osservato, esiste $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ tale che $|\mathcal{G}| \leq \kappa$ e $\bigcap \mathcal{G} = \bigcap \mathcal{F} = \{x\}$. Dunque $\psi(x, X) \leq \kappa$, e la tesi segue per l'arbitrarietà di x. □

Sappiamo che per ogni X si ha $\chi(X)hL(X) \leq w(X)$. Mostriamo ora che in generale non si ha l'uguaglianza.

Esempio 4.3.6 *La retta di Sorgenfrey S è uno spazio ereditariamente di Lindelöf.*

Dimostrazione: Sia T un sottospazio di S, e sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di T. Per ogni $U \in \mathcal{U}$, sia I_U l'interno di U rispetto all'usuale topologia della retta reale. Dimostriamo anzitutto che $M = T \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{U}} I_U$ è numerabile.

Infatti, per ogni $x \in M$, esistono $U_x \in \mathcal{U}$ e $\varepsilon_x > 0$ tali che $B_x = [x, x + \varepsilon_x[\ \subset U_x$; indichiamo ora con $\varphi(x)$ un numero razionale appartenente a B_x. L'applicazione $\varphi\colon M \to \mathbb{Q}$ è iniettiva poiché $x \neq y$ implica $B_x \cap B_y = \emptyset$.

Ora la retta reale, essendo secondo-numerabile, è ereditariamente di Lindelöf, quindi esiste una sottofamiglia numerabile $\mathcal{V}$ di $\mathcal{U}$ tale che $\bigcup_{U \in \mathcal{V}} I_U = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} I_U$. Dunque la sottofamiglia $\mathcal{V} \cup \{U_x : x \in M\}$ di $\mathcal{U}$ è numerabile e ricopre T. □

L'*estensione (extent)* di uno spazio topologico X, indicata con $e(X)$, è il minimo cardinale infinito κ tale che, per ogni sottospazio chiuso e discreto C di X, si ha $|C| \leq \kappa$. Si verifica immediatamente che $e(X) \leq L(X)$ per ogni X. Inoltre la compattificazione di Alexandroff di uno spazio discreto di cardinalità non numerabile mostra che l'estensione non è ereditaria.

Esercizio 4.3.7 *Sia S la retta di Sorgenfrey (Esempio 4.2.2). Mostrare che $e(S \times S) = 2^\omega > e(S) = \omega$.*
Suggerimento: Si consideri l'insieme $C = \{\langle x, -x \rangle : x \in S\}$.

La *diffusione (spread)* di uno spazio topologico X, indicata con $s(X)$, è il minimo cardinale infinito κ tale che, per ogni sottospazio discreto D di X, si ha $|D| \le \kappa$. È ovvio che $e(X) \le s(X)$ per ogni X.

Esercizio 4.3.8 *Mostrare che s non è altro che la versione ereditaria di e, cioè che, per ogni spazio topologico X, si ha $s(X) = \sup\{e(Y) : Y \subset X\}$.*

4.3.3 La densità

Sia X uno spazio topologico. La *densità* di X, indicata con $d(X)$, è il minimo cardinale infinito κ tale che X ha un sottoinsieme denso D con $|D| \le \kappa$. Se $d(X) = \omega$ diremo che X è *separabile*.

Per ogni spazio X si ha $d(X) \le nw(X)$, e la disuguaglianza può essere stretta (si veda più avanti il Teorema 4.3.12 e l'Esempio 4.3.12).

Esercizio 4.3.9 *Mostrare che se X è T_3 allora $|X| \le 2^{d(X)\psi(X)}$.*
Suggerimento: Sia A denso in X; per ogni $B \subset A$, sia U_B l'interno della chiusura di B: poiché X è T_3, la famiglia $\{U_B : B \subset A\}$ è una base, e quindi $w(X) \le 2^{d(X)}$. Inoltre si ha $|X| \le nw(X)^{\psi(X)}$ per ogni spazio T_1.

Teorema 4.3.8 (Pospíšil). *Se X è uno spazio T_2 allora $|X| \le 2^{2^{d(X)}}$.*

Dimostrazione: Sia $d(X) = \kappa$, e fissiamo un sottoinsieme denso D di X, con $|D| \le \kappa$. Se x e y sono punti distinti di X, esiste un intorno aperto U di x la cui chiusura non contiene y; quindi $A = U \cap D$ è un sottoinsieme di D tale che $x \in \overline{A}$ e $y \notin \overline{A}$. Ne segue che la funzione $\varphi: X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(D))$ definita da $x \mapsto \{A \subset D : x \in \overline{A}\}$ è iniettiva, e pertanto $|X| \le |\mathcal{P}(\mathcal{P}(D))| \le 2^{2^\kappa}$. □

Teorema 4.3.9 (Jones). *Se X è uno spazio normale, per ogni sottoinsieme chiuso e discreto C di X si ha $2^{|C|} \le 2^{d(X)}$.*

Dimostrazione: Sia D un sottoinsieme denso di X, con $|D| \le d(X)$. Per ogni sottoinsieme S di C, poiché X è normale, esiste un aperto U_S tale che $S \subset U_S$ e $\overline{U_S} \cap C \setminus S = \emptyset$. Poniamo $V_S = D \cap U_S$, e osserviamo che $\overline{V_S} = \overline{U_S}$. Dunque la funzione $\varphi: \mathcal{P}(C) \to \mathcal{P}(D)$ definita da $S \mapsto V_S$ è iniettiva, cosicché $2^{|C|} \le 2^{|D|} \le 2^{d(X)}$. □

Corollario 4.3.10 *Se vale* GCH, *allora $e(X) \le d(X)$ per ogni spazio T_4.*

Dimostrazione: Infatti $2^\kappa \le 2^\lambda$ se e solo se $\kappa \le \lambda$. □

Esercizio 4.3.10 *Mostrare che un prodotto di spazi T_4 può non essere T_4.*
Suggerimento: Si applichi il Teorema 4.3.9 per dimostrare $S \times S$ non è normale, dove S è la retta di Sorgenfrey.

Teorema 4.3.11 (Hewitt-Marczewski-Pondiczery). *Sia κ un cardinale infinito, e sia $X = \prod_{\alpha\in\lambda} X_\alpha$. Se $\lambda \leq 2^\kappa$ e $d(X) \leq \kappa$ per ogni $\alpha \in \lambda$ allora anche $d(X) \leq \kappa$.*

Dimostrazione: Possiamo ovviamente supporre che $X_\alpha \neq \emptyset$ per ogni $\alpha \in \lambda$, e che $\lambda = 2^\kappa$.

Per ogni $\alpha \in 2^\kappa$, fissiamo Z_α denso in X_α, con $|Z_\alpha| \leq \kappa$; sia Y_α lo spazio discreto di cardinalità κ e consideriamo un'applicazione suriettiva $f_\alpha : Y_\alpha \to Z_\alpha$. Allora $f = \prod_{\alpha\in 2^\kappa} f_\alpha$ è un funzione continua di $Y = \prod_{\alpha\in 2^\kappa} Y_\alpha$ sul sottospazio denso $Z = \prod_{\alpha\in 2^\kappa} Z_\alpha$ di X. Ora se D è denso in Y, per la continuità di f si ha

$$Z = f[Y] = f\left[\,\overline{D}\,\right] \subset \overline{f[D]};$$

ne segue che $E = f[D]$ è denso in Z, e quindi in X. Poiché $|E| \leq D$, basterà costruire D in modo che la sua cardinalità non superi κ.

Nel seguito consideriamo κ come spazio topologico dotato della topologia discreta (cosicché $Y_\alpha = \kappa$ per ogni $\alpha \in 2^\kappa$) e 2^κ come cubo di Cantor (vedere Esempio 4.2.4). Sappiamo (Esercizio 4.3.4) che $w(2^\kappa) = \kappa$, quindi possiamo considerare una base $\mathcal{B}$ di 2^κ con $|\mathcal{B}| = \kappa$; indichiamo con $\mathcal{U}$ l'insieme di tutte le sottofamiglie finite di $\mathcal{B}$ i cui elementi siano a due a due disgiunti: chiaramente $|\mathcal{U}| = \kappa$. Ora, gli elementi di Y sono tutte le funzioni di 2^κ in κ. Sia dunque D il sottoinsieme di Y costituito da tutte le $\varphi : 2^\kappa \to \kappa$ con la proprietà che esiste $\{U_0, U_1, \dots, U_{n-1}\} \in \mathcal{U}$ tale che φ è costante sia sull'insieme $2^\kappa \setminus \bigcup_{i\in n} U_i$ sia sugli insiemi U_i, per ogni $i \in n$: è evidente che $|D| = \kappa$.

Resta da dimostrare che D è denso in Y e cioè che per ogni aperto non vuoto $V \subset Y$ si ha $D \cap V \neq \emptyset$. L'aperto V contiene un aperto della forma $\bigcap_{i\in n} p_{\alpha_i}^{-1}(\gamma_i)$, dove $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1} \in \kappa$, $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ sono punti distinti di 2^κ e, per ogni $i \in n$, si è indicata con p_{α_i} la proiezione di Y su Y_{α_i}. Essendo 2^κ uno spazio T_2, esiste una famiglia $\{U_0, U_1, \dots, U_{n-1}\} \in \mathcal{U}$ tale che $\alpha_i \in U_i$ per ogni $i \in n$. La funzione $\varphi : 2^\kappa \to \kappa$ definita da

$$\varphi(\alpha) = \begin{cases} \gamma_i & \text{se } \alpha \in U_i \text{ per un } i \in n, \\ \gamma_0 & \text{se } \alpha \in 2^\kappa \setminus \bigcup_{i\in n} U_i, \end{cases}$$

appartiene sia a D che a V, quindi $D \cap V \neq \emptyset$. $\square$

Sia S la retta di Sorgenfrey: il prodotto $S\times S$ è separabile ma contiene un sottoinsieme C (chiuso e) discreto la cui cardinalità è 2^ω (Esercizio 4.3.7): ciò mostra che la densità non è una funzione ereditaria. D'altra parte è facile vedere che $d(Y) \leq d(X)$ per ogni Y aperto in X.

Definiamo dunque la *densità ereditaria* come $hd(X) = \sup\{d(Y) : Y \subset X\}$. Chiaramente $s(X) \leq hd(X)$, e così pure $t(X) \leq hd(X)$. Se $hd(X) = \omega$, diremo che X è *ereditariamente separabile.*

Esercizio 4.3.11 *Dimostrare che per ogni spazio topologico X si ha*

$$hd(X) = t(X) \cdot \sup\{d(Y) : Y \subset X,\ Y \text{ chiuso}\}.$$

Teorema 4.3.12 *Per ogni spazio topologico X si ha $hd(X) \leq nw(X)$.*

DIMOSTRAZIONE: Essendo il peso di rete una funzione ereditaria, è sufficiente dimostrare che $d(X) \leq nw(X)$. Sia dunque $\mathcal{N}$ una rete di X con $|\mathcal{N}| \leq \kappa$, dove $\kappa = nw(X)$. Se scegliamo un $x_N \in N$ per ogni $N \in \mathcal{N}$, l'insieme $D = \{x_N : N \in \mathcal{N}\}$ è chiaramente denso, e $|D| \leq \kappa$. $\square$

Esempio 4.3.12 *Sia S la retta di Sorgenfrey. Si ha $hd(S) = \omega < nw(S) = 2^\omega$.*

DIMOSTRAZIONE: Il fatto che $nw(S) = 2^\omega$ si verifica facilmente, ragionando come nell'Esercizio 4.3.2. Mostriamo ora che S è ereditariamente separabile.

Sia T un sottospazio di S. Poiché $\mathbb{R}$ è ereditariamente separabile, esiste un $E \subset T$ numerabile e denso in T rispetto alla usuale topologia dei reali. Sia ora $M = T \setminus \overline{E}$: per ogni $x \in M$ esiste $\varepsilon_x > 0$ tale che $B_x = [x, x + \varepsilon_x[$ è disgiunto da E. Se indichiamo con $\varphi(x)$ un numero razionale appartenente a B_x, l'applicazione $\varphi\colon M \to \mathbb{Q}$ è iniettiva poiché $x \neq y$ implica $B_x \cap B_y = \emptyset$; dunque $|M| \leq \omega$. Si conclude che $D = E \cup M$ è un sottoinsieme numerabile denso in T. $\square$

Esercizio 4.3.13 *Dimostrare che $hd(X)$ è il minimo cardinale infinito κ tale che ogni successione crescente di chiusi $\{F_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ è definitivamente costante, cioè esiste un $\gamma \in \kappa^+$ tale che $F_\alpha = F_\gamma$ per ogni $\alpha \geq \gamma$.*

4.3.4 La cellularità

La *cellularità* (o numero di Suslin) di uno spazio topologico X è il minimo cardinale infinito κ tale che per ogni famiglia $\mathcal{U}$ di aperti non vuoti di X a due a due disgiunti si ha $|\mathcal{U}| \leq \kappa$; essa si indica con $c(X)$.

È chiaro che si ha $c(X) \leq d(X)$, come pure $c(X) \leq s(X)$. D'altra parte se $X = S \times S$, dove S è la retta di Sorgenfrey, e $Y = \{\langle x, -x\rangle : x \in S\} \subset X$ si ha (vedere Esercizio 4.3.7) $c(Y) = 2^\omega > c(X) = \omega$: pertanto la cellularità non è ereditaria. Quest'ultimo esempio mostra anche che si può avere $c(X) < s(X)$; vedremo più avanti (Esempio 4.3.16) che ci sono anche spazi X per i quali $c(X) < d(X)$.

Esercizio 4.3.14 *Verificare che per ogni spazio topologico X si ha $hc(X) = s(X)$.*

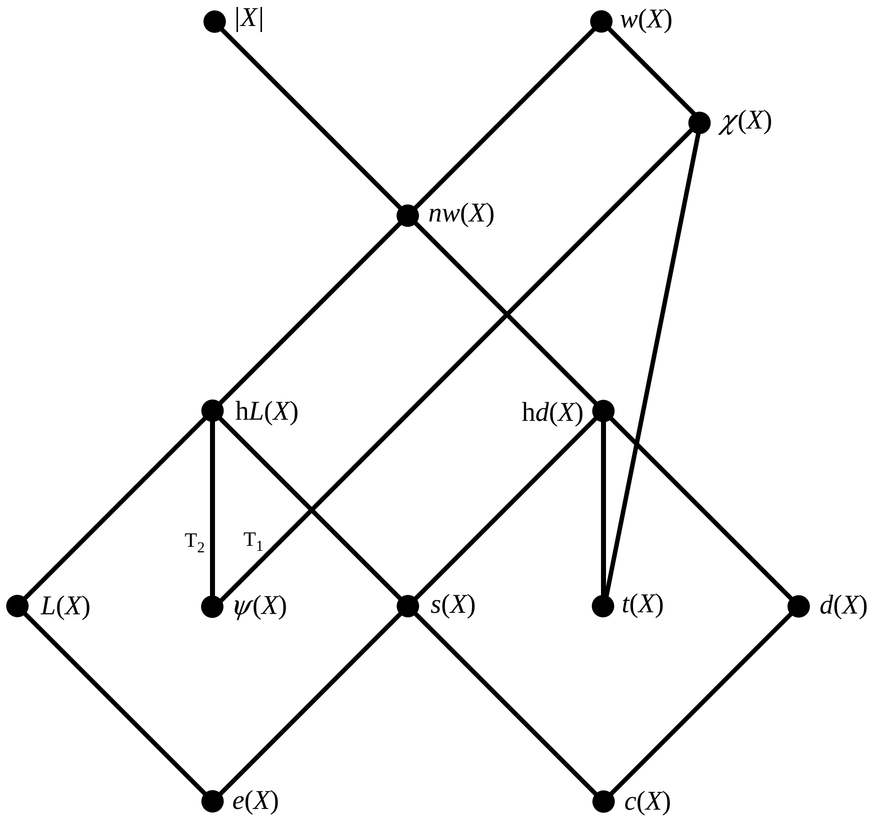

Figura 4.1: Relazioni fra le varie funzioni cardinali

Nella Figura 4.1 sono riportate schematicamente le disuguaglianze tra le funzioni cardinali che abbiamo definito.

Esercizio 4.3.15 *Dimostrare che* $c(X)$ *è il minimo cardinale infinito* κ *tale che per ogni successione decrescente di aperti* $\{V_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ *esiste* $\gamma \in \kappa^+$ *tale che* $\overline{V_\alpha} = \overline{V_\gamma}$ *per ogni* $\alpha \geq \gamma$.

Se $c(X) = \omega$ diremo che X è uno *spazio ccc*. In effetti si verifica immediatamente che $c(X) = \omega$ se e solo se la famiglia degli aperti non vuoti di X ordinata per inclusione è ccc nel senso della Definizione 2.2.1.

Dunque non è sorprendente che l'Assioma di Martin abbia dirette conseguenze topologiche. Ora ne vedremo due.

Teorema 4.3.13 *Valga* $\mathrm{MA}(\kappa)$. *Se* X *è uno spazio ccc compatto (e non vuoto), ogni famiglia* $\{U_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ *di aperti densi in* X *ha intersezione non vuota.*

Dimostrazione: Sia $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ la famiglia degli aperti non vuoti di X, ordinata per inclusione. Per ipotesi $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ è ccc. Se poi $\mathcal{G}$ è un filtro in $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ allora ha la proprietà dell'intersezione finita, dunque $\bigcap_{G \in \mathcal{G}} \overline{G} \neq \emptyset$ per la compattezza di X.

Per ogni $\alpha \in \kappa$, sia D_α l'insieme degli aperti non vuoti la cui chiusura è contenuta in U_α: poiché X è regolare e U_α è denso in X, abbiamo che D_α è denso in $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ (nel senso della Definizione 2.2.2). Posto $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha \in \kappa\}$, per $\mathrm{MA}(\kappa)$ esiste un filtro $\mathcal{D}$-generico $\mathcal{G}$. L'insieme $\bigcap_{G \in \mathcal{G}} \overline{G}$ è non vuoto e contenuto in $\bigcap_{\alpha \in \kappa} U_\alpha$. $\square$

Si può dimostrare che la tesi del teorema precedente è in realtà equivalente a $\mathrm{MA}(\kappa)$.

Lemma 4.3.14 *Valga* $\mathrm{MA}(\omega_1)$. *Sia* X *uno spazio ccc e* $\{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ *una famiglia di aperti non vuoti di* X*: esiste* $I \subset \omega_1$ *non numerabile tale che la sottofamiglia* $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ *ha la proprietà dell'intersezione finita.*

Dimostrazione: Poniamo $V_\alpha = \bigcup_{\beta > \alpha} U_\beta$ per ogni $\alpha \in \omega_1$: essendo X uno spazio ccc, sappiamo (Esercizio 4.3.15) che esiste un certo $\gamma \in \omega_1$ tale che $\overline{V_\alpha} = \overline{V_\gamma}$ per ogni $\alpha \geq \gamma$. Se $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ è la famiglia dei sottoinsiemi aperti non vuoti di V_γ, ordinata per inclusione, allora $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ è ccc.

Per ogni $\alpha \in \omega_1$, sia $D_\alpha = \{P \in \mathbb{P} : \exists \beta > \alpha\ (P \subset U_\beta)\}$; mostriamo che D_α è denso in $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$. Infatti, poiché $\overline{V_\gamma} \subset \overline{V_\alpha}$, per ogni $A \in \mathbb{P}$ si ha $A \cap V_\alpha \neq \emptyset$, quindi per qualche $\beta > \alpha$ l'aperto $P = A \cap U_\beta$ è non vuoto ed è perciò un estensione in D_α di A.

Sia $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$; per MA($\omega_1$) esiste un filtro $\mathcal{D}$-generico $\mathcal{G}$ e, ponendo $I = \{\alpha \in \omega_1 : \exists G \in \mathcal{G}\ (G \subset U_\alpha)\}$, la sottofamiglia $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ ha la proprietà dell'intersezione finita.

Resta da provare che I non è numerabile. A tale scopo osserviamo che I è illimitato in ω_1. Infatti per ogni $\alpha \in \omega_1$, essendo $\mathcal{G} \cap D_\alpha$ non vuoto, l'insieme I contiene un $\beta > \alpha$. $\square$

Teorema 4.3.15 MA(ω_1) *implica che il prodotto di una famiglia finita di spazi ccc è uno spazio ccc.*

Dimostrazione: Basta dimostrare che se X e Y sono spazi ccc allora $X \times Y$ è uno spazio ccc. Supponiamo al contrario che ci sia una famiglia $\{W_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ di aperti non vuoti e disgiunti di $X \times Y$. Per ogni $\alpha \in \omega_1$, esisteranno U_α aperto in X e V_α aperto in Y tali che $U_\alpha \times V_\alpha \subset W_\alpha$. Per il precedente lemma, una sottofamiglia non numerabile $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ ha la proprietà dell'intersezione finita. Ora, se $\alpha, \beta \in I$, abbiamo $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ma $(U_\alpha \times V_\alpha) \cap (U_\beta \times V_\beta) = \emptyset$, e quindi deve essere $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$: ciò è impossibile perché Y è uno spazio ccc. $\square$

In relazione a quanto appena visto, accenniamo al fatto che è consistente che esistano due spazi ccc X e Y tali che $X \times Y$ non è uno spazio ccc. (In effetti è possibile costruire X e Y usando l'ipotesi del continuo.)

Teorema 4.3.16 *Sia X il prodotto di una famiglia di spazi topologici $\{X_\beta : \beta \in \lambda\}$; se il prodotto di ogni sottofamiglia finita è ccc allora anche X è ccc.*

Dimostrazione: Supponiamo che X non sia ccc, e fissiamo una famiglia $\{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ di aperti non vuoti e disgiunti di X. Non è restrittivo suppore che per ogni $\alpha \in \omega_1$ l'aperto U_α sia della forma $\prod_{\beta \in \lambda} W_\beta^{(\alpha)}$, con $W_\beta^{(\alpha)}$ aperto in X_β per ogni $\beta \in \omega_1$ e $W_\beta^{(\alpha)} = X_\beta$ per ogni $\beta \in \omega_1 \setminus F(\alpha)$, dove $F(\alpha)$ è un sottoinsieme finito di λ. Per il Lemma di Šanin, esiste $I \subset \omega_1$ non numerabile tale che $\{F(\alpha) : \alpha \in I\}$ è un Δ-sistema, di radice R. Poiché $F(\alpha') \cap F(\alpha'') = \emptyset$ implica $U_{\alpha'} \cap U_{\alpha''} \neq \emptyset$, l'insieme R non può essere vuoto. Se dunque indichiamo con π la proiezione di X sul prodotto $Y = \prod_{\beta \in R} X_\beta$, la famiglia di aperti non vuoti e disgiunti $\{\pi(U_\alpha) : \alpha \in I\}$ mostra che Y non è uno spazio ccc. $\square$

Corollario 4.3.17 MA(ω_1) *implica che ogni prodotto di spazi ccc è uno spazio ccc.*

Dimostrazione: Segue immediatamente dal Teorema 4.3.15 e dal teorema precedente. $\square$

Corollario 4.3.18 *Ogni prodotto di spazi separabili è uno spazio ccc.*

DIMOSTRAZIONE: Per il Teorema 4.3.11, ogni prodotto finito di spazi separabili è separabile, quindi è ccc, e possiamo applicare il teorema precedente. □

Esempio 4.3.16 *Se $\kappa \geq 2^{2^\omega}$, il cubo di Cantor $X = 2^\kappa$ è uno spazio ccc non separabile.*

DIMOSTRAZIONE: Per il corollario precedente, ogni cubo di Cantor è uno spazio ccc. Se poi X fosse separabile, per il Teorema 4.3.8 si avrebbe $2^\kappa = |X| \leq 2^{2^\omega} \leq \kappa$, il che è impossibile. □

4.3.5 Problema e linea di Suslin

Una *linea* o *retta di Suslin* è un insieme totalmente ordinato $\langle X, < \rangle$ tale che nella topologia dedotta dall'ordine X sia uno spazio ccc, ma **non** separabile.

È noto che ogni insieme totalmente ordinato $\langle X, < \rangle$ che soddisfa

a) X non ha né primo né ultimo elemento,

b) X è completo per l'ordine,

c) X è separabile nella topologia dell'ordine,

è isomorfo a $\langle \mathbb{R}, < \rangle$. Dicendo che l'ordine è completo si intende che l'ordine è denso in sé e che ogni insieme superiormente limitato ha estremo superiore (cioè minima limitazione superiore). In questo caso vale anche

c′) X è ccc.

Suslin si chiese se un insieme totalmente ordinato $\langle X, < \rangle$ nel quale valgono a), b), c′) è isomorfo a $\langle \mathbb{R}, < \rangle$. L'ipotesi di Suslin (SH) è che a), b), c′) caratterizzi $\langle \mathbb{R}, < \rangle$; una linea di Suslin è invece un insieme totalmente ordinato tale che valgano a), b), c′) ma non c).

Si noti che una linea di Suslin può avere una struttura piuttosto complicata. Infatti se $\langle \mathbb{S}_1, <_1 \rangle$, è una linea di Suslin con il suo ordine, $\langle \{p_2\}, <_2 \rangle$ è un insieme ordinato ridotto a un punto, con l'unico ordine possibile, e $\langle \mathbb{R}_3, <_3 \rangle$ la somma disgiunta dei tre insiemi ordinati $\mathbb{S}_2 = \mathbb{S}_1 \oplus \{p_2\} \oplus \mathbb{R}_3$ è ancora una linea di Suslin. È chiaro che l'operazione si può iterare $\aleph_0$ volte in modo da ottenere ancora una linea di Suslin. La topologia della nuova linea di Suslin $\mathbb{S}_2$ è quella per cui $\mathbb{S}_1$ e $\mathbb{R}_3$ conservano la loro topologia, mentre il punto p_2 è isolato nella nuova linea. Dunque ci possono essere punti isolati in una linea di Suslin.

Teorema 4.3.19 $\mathrm{MA}(\omega_1) \to \mathrm{SH}$.

$\mathrm{MA}(\omega_1)$ implica che il prodotto di spazi ccc è ccc. Perciò il teorema è una conseguenza immediata del seguente Lemma.

Lemma 4.3.20 *Se X è una linea di Suslin, X^2 non ha la proprietà ccc.*

Dimostrazione: Se $a, b \in X$ e $a < b$, definiamo $(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$. L'intervallo (a, b) potrebbe essere vuoto se non ci fossero elementi tra a e b, cioè se a e b fossero *adiacenti*. Tuttavia nel caso ipotizzato ciò non può verificarsi poiché se $x < y$ in X, allora esiste $z \in X$ tale che $x < z < y$. Per induzione su $\alpha < \omega_1$, troveremo $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha \in X$ tali che

(1) $a_\alpha < b_\alpha < c_\alpha$;

(2) $(a_\alpha, b_\alpha) \neq \emptyset, (b_\alpha, c_\alpha) \neq \emptyset$;

(3) $(a_\alpha, c_\alpha) \cap \{b_\xi : \xi < \alpha\} = \emptyset$.

Ammesso che si possa dimostrare ciò, sia $U_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha) \times (b_\alpha, c_\alpha)$. Allora, per (2), $U_\alpha \neq \emptyset$. Se $\xi < \alpha$, $U_\xi \cap U_\alpha = \emptyset$, poiché, per (3), o $b_\xi \leq a_\alpha$ o $b_\xi \geq c_\alpha$ e quindi $(b_\alpha, c_\alpha) \cap (b_\xi, c_\xi) = \emptyset$. Dunque la famiglia $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ contraddice la proprietà ccc per X.

Per trovare $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha$ con le proprietà (1), (2), (3), sia W l'insieme dei punti isolati di X. Poiché i punti isolati sono aperti e X ha la proprietà ccc, è $|W| \leq \aleph_0$. Si supponga di avere trovato $a_\xi, b_\xi, c_\xi, \xi < \alpha (< \omega_1)$. Poiché X non è separabile

$$X \setminus \overline{(W \cup \{b_\xi : \xi < \alpha\})}$$

è un aperto non vuoto e quindi contiene un intervallo aperto (a_α, c_α). Poiché l'ordine è denso, (a_α, c_α) è infinito e quindi esiste b_α (con $a_\alpha < b_\alpha < c_\alpha$) tale che $(a_\alpha, b_\alpha) \neq \emptyset$ e $(b_\alpha, c_\alpha) \neq \emptyset$. □

4.4 Stime della cardinalità

In questo paragrafo esporremo alcuni teoremi che mostrano come la cardinalità di uno spazio topologico X si possa utilmente maggiorare, una volta che si conoscano i valori di opportune funzioni cardinali (di cui almeno una "globale"). Lo spazio X sarà in genere supposto T_2.

Abbiamo già incontrato tre stime di cardinalità nel precedente paragrafo: precisamente, per gli spazi T_0, $|X| \leq 2^{w(X)}$ (Teorema 4.3.1), per gli spazi T_3, $|X| \leq 2^{d(X)\psi(X)}$ (Esercizio 4.3.9) e, per gli spazi T_2, $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$ (Teorema 4.3.8).

L'insieme di tutti i sottoinsiemi di un insieme E aventi cardinalità non superiore a κ si indica con $[E]^{\leq\kappa}$. È immediato verificare che $|[E]^{\leq\kappa}| \leq |E|^\kappa$.

Lemma 4.4.1 *Siano κ e λ cardinali infiniti. Supponiamo che lo spazio (di Hausdorff) X abbia le seguenti proprietà:*

(1) per ogni $p \in X$ esiste una famiglia $\mathcal{V}_p$ di intorni aperti di p, con $|\mathcal{V}_p| \leq \kappa$, tale che $\bigcap\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_p\} = \{p\}$;

(2) esiste un sottoinsieme (denso) S di X, con $|S| \leq \lambda$, tale che $X = \bigcup\{\overline{A} : A \in [S]^{\leq\kappa}\}$.

Allora $|X| \leq \lambda^\kappa$.

Dimostrazione: Per ogni $p \in X$, scegliamo $A_p \in [S]^{\leq\kappa}$ tale che $p \in \overline{A_p}$, e osserviamo che per ogni intorno aperto V di p si ha $A_p \cap V \in [S]^{\leq\kappa}$ e $p \in \overline{A_p \cap V}$. Sia $\Phi\colon X \to [[S]^{\leq\kappa}]^{\leq\kappa}$ definita da $p \mapsto \{A_p \cap V : V \in \mathcal{V}_p\}$; poiché $\bigcap\overline{\Phi(p)} = \{p\}$ per ogni $p \in X$, la funzione Φ è iniettiva, e quindi $|X| \leq |[[S]^{\leq\kappa}]^{\leq\kappa}| \leq (|S|^\kappa)^\kappa = |S|^\kappa \leq \lambda^\kappa$. Qui con $\bigcap\overline{\Phi(p)}$ si è indicato $\bigcap\{\overline{A_p \cap V} : A_p \cap V \in \Phi(p)\}$. $\square$

Corollario 4.4.2 (Pospíšil). *Se X è* T_2 *si ha $|X| \leq d(X)^{\chi(X)}$.*

Dimostrazione: Si applichi il lemma precedente, con $\kappa = \chi(X)$ e $\lambda = d(X)$. $\square$

Lemma 4.4.3 *Se X è* T_2 *si ha $|X| \leq d(X)^{L(X)\psi(X)t(X)}$.*

Dimostrazione: Sia $\kappa = L(X)\psi(X)t(X)$ e $\lambda = d(X)$; mostriamo che sono soddisfatte le ipotesi del lemma precedente. Poiché la (2) è immediata, basterà dimostrare che vale la (1).

Fissato $p \in X$, sia $\mathcal{U}_p$ la famiglia degli intorni aperti di p; essendo $\psi(p, X) \leq \kappa$ esisterà $\mathcal{G}_p \in [\mathcal{U}_p]^{\leq\kappa}$ tale che $\bigcap\mathcal{G}_p = \{p\}$. Ora poiché X è T_2, si ha $\bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{U}_p\} = \{p\}$, quindi per ogni $G \in \mathcal{G}_p$ la famiglia di aperti $\{G\} \cup \{X \setminus \overline{U} : U \in \mathcal{U}_p\}$ ricopre X e pertanto esiste $\mathcal{V}(G) \in [\mathcal{U}_p]^{\leq\kappa}$ tale che $X = G \cup \bigcup\{X \setminus \overline{V} : V \in \mathcal{V}(G)\}$, cioè $\bigcap\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}(G)\} \subset G$. Ponendo allora $\mathcal{V}_p = \bigcup_{G\in\mathcal{G}_p} \mathcal{V}(G)$, si ha $\mathcal{V}_p \in [\mathcal{U}_p]^{\leq\kappa}$ e $\bigcap\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_p\} = \{p\}$. $\square$

Teorema 4.4.4 *Se X è uno spazio* T_2 *allora $|X| \leq 2^{L(X)\psi(X)t(X)}$.*

Dimostrazione: Sia $\kappa = L(X)\psi(X)t(X)$ e, per ogni $p \in X$, sia $\mathcal{U}_p$ una famiglia di intorni aperti di p, con $|\mathcal{U}_p| \leq \kappa$, tale che $\bigcap\mathcal{U}_p = \{p\}$. Costruiamo, per induzione transfinita, una successione crescente $\{H_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ di chiusi e una successione $\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ di famiglie di aperti tali che, per ogni $\alpha \in \kappa^+$:

(1) $|H_\alpha| \leq 2^\kappa$;

(2) $\mathcal{V}_\alpha = \bigcup\{\mathcal{U}_p : p \in \bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta\}$;

(3) per ogni $\mathcal{G} \in [\mathcal{V}_\alpha]^{\leq\kappa}$ che non ricopre X si ha $H_\alpha \setminus \bigcup\mathcal{G} \neq \emptyset$.

Supponiamo di aver costruito H_β e $\mathcal{V}_\beta$ per ogni $\beta < \alpha$. Notiamo che $\mathcal{V}_\alpha$ è definita dalla (2) e che ha cardinalità non superiore a 2^κ per la (1) e l'ipotesi induttiva. Sia Γ_α l'insieme di tutte le sottofamiglie in $[\mathcal{V}_\alpha]^{\leq\kappa}$ che non ricoprono X e, per ogni $\mathcal{G} \in \Gamma_\alpha$, scegliamo $x_\mathcal{G} \notin \bigcup\mathcal{G}$; definiamo come H_α la chiusura dell'insieme $S_\alpha = \{x_\mathcal{G} : \mathcal{G} \in \Gamma_\alpha\} \cup \bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta$: il fatto che $|H_\alpha| \leq 2^\kappa$ segue dal lemma precedente.

Ora poniamo $H = \bigcup_{\alpha\in\kappa^+} H_\alpha$: se $H = X$ la tesi è provata. Supponiamo al contrario che esista un punto $q \in X \setminus H$; per ogni $p \in H$ fissiamo un $U_p \in \mathcal{U}_p$ che non contenga q, cosicché la famiglia $\mathcal{W} = \{U_p : p \in H\}$ ricopre H. Per il Teorema 4.2.7, H è chiuso, quindi $L(H) \leq L(X) \leq \kappa$ ed esiste un $A \in [H]^{\leq\kappa}$ tale che $\mathcal{G} = \{U_p : p \in A\}$ ricopre ancora H. Essendo κ^+ regolare, esisterà un $\bar\alpha \in \kappa^+$ tale che $A \subset \bigcup_{\beta<\bar\alpha} H_\beta$; osserviamo che $\mathcal{G}$ appartiene a $[\mathcal{V}_{\bar\alpha}]^{\leq\kappa}$ e non ricopre X: ciò implica, per la (3), che $H_{\bar\alpha} \not\subset \bigcup\mathcal{G}$, e abbiamo una contraddizione. □

Come caso particolare, si ha il seguente importante risultato.

Teorema 4.4.5 (Arhangel'skiĭ). *Se X è T_2 allora $|X| \leq 2^{L(X)\chi(X)}$.* □

Lemma 4.4.6 *Sia X uno spazio topologico, con $c(X) \leq \kappa$. Per ogni famiglia di aperti $\mathcal{W}$, esiste $\mathcal{G} \in [\mathcal{W}]^{\leq\kappa}$ tale che $\overline{\bigcup\mathcal{G}} \supset \bigcup\mathcal{W}$.*

Dimostrazione: Per il Lemma di Zorn, esiste una famiglia $\mathcal{M}$ massimale (rispetto all'inclusione) di aperti a due a due disgiunti ciascuno dei quali è sottoinsieme di un elemento di $\mathcal{W}$; ovviamente sarà $|\mathcal{M}| \leq \kappa$. Mostriamo che $\overline{\bigcup\mathcal{M}} \supset \bigcup\mathcal{W}$. Sia infatti $x \in \bigcup\mathcal{W}$; se x non appartenesse alla chiusura di $\bigcup\mathcal{M}$, esisterebbe un intorno aperto U di x disgiunto da ogni elemento di $\mathcal{M}$ e quindi, detto W un elemento di $\mathcal{W}$ contenente x, la famiglia $\mathcal{M} \cup \{U \cap W\}$ contraddirebbe la massimalità di $\mathcal{M}$. Ora basta scegliere, per ogni $M \in \mathcal{M}$, un $U_M \in \mathcal{W}$ che contenga M; la sottofamiglia $\mathcal{G} = \{U_M : M \in \mathcal{M}\}$ di $\mathcal{W}$ così ottenuta ha cardinalità non superiore a κ, e si ha $\overline{\bigcup\mathcal{G}} \supset \overline{\bigcup\mathcal{M}} \supset \bigcup\mathcal{W}$. □

Esercizio 4.4.1 *Sia κ un cardinale infinito. Dimostrare che è vero il viceversa di quanto affermato nel lemma precendente, e cioè che se in uno spazio topologico X per ogni famiglia di aperti $\mathcal{W}$ esiste $\mathcal{G} \in [\mathcal{W}]^{\leq\kappa}$ tale che $\overline{\bigcup\mathcal{G}} \supset \bigcup\mathcal{W}$, allora $c(X) \leq \kappa$.*

Teorema 4.4.7 (Hajnal–Juhász). *Se X è T_2 allora $|X| \leq 2^{c(X)\chi(X)}$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\kappa = c(X)\chi(X)$ e, per ogni $p \in X$, sia $\mathcal{U}_p$ una base di intorni aperti di p, con $|\mathcal{U}_p| \leq \kappa$. Costruiamo, per induzione transfinita, una successione crescente $\{A_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ di sottoinsiemi di X e una successione $\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ di famiglie di aperti tali che, per ogni $\alpha \in \kappa^+$:

(1) $|A_\alpha| \leq 2^\kappa$;

(2) $\mathcal{V}_\alpha = \bigcup\{\mathcal{U}_p : p \in \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\}$;

(3) per ogni $\Gamma \in [[\mathcal{V}_\alpha]^{\leq\kappa}]^{\leq\kappa}$ tale che la famiglia $\{\overline{\bigcup\mathcal{G}} : \mathcal{G} \in \Gamma\}$ non ricopre X si ha $A_\alpha \setminus \bigcup_{\mathcal{G}\in\Gamma} \overline{\bigcup\mathcal{G}} \neq \emptyset$.

Supponiamo di aver costruito A_β e $\mathcal{V}_\beta$ per ogni $\beta < \alpha$. Notiamo che $\mathcal{V}_\alpha$ è definita dalla (2) e che ha cardinalità non superiore a 2^κ per la (1) e l'ipotesi induttiva. Per ogni $\Gamma \in [[\mathcal{V}_\alpha]^{\leq\kappa}]^{\leq\kappa}$ tale che la famiglia $\{\overline{\bigcup\mathcal{G}} : \mathcal{G} \in \Gamma\}$ non ricopre X, scegliamo $x_\Gamma \notin \bigcup_{\mathcal{G}\in\Gamma} \overline{\bigcup\mathcal{G}}$, e sia S_α l'insieme di tutti i punti così scelti; è $|S_\alpha| \leq 2^\kappa$, per cui possiamo definire A_α come $S_\alpha \cup \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$: ciò completa la costruzione delle successioni $\{A_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ e $\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$.

Poniamo $A = \bigcup_{\alpha\in\kappa^+} A_\alpha$: se $A = X$ la tesi è provata. Supponiamo al contrario che esista un punto $q \in X \setminus A$; scriviamo $\mathcal{U}_q$ come $\{B_\sigma : \sigma \in \kappa\}$ e, per ogni $\sigma \in \kappa$, sia $\mathcal{W}_\sigma$ l'insieme di tutti i $V \in \bigcup_{p\in A} \mathcal{U}_p$ che non intersecano B_σ; per il lemma precedente, esiste $\mathcal{G}_\sigma \in [\mathcal{W}_\sigma]^{\leq\kappa}$ tale che $\overline{\bigcup\mathcal{G}_\sigma} \supset \bigcup\mathcal{W}_\sigma$. Poiché X è T_2, per ogni $p \in A$ esiste $\sigma \in \kappa$ tale che $p \in \bigcup\mathcal{W}_\sigma$, e quindi $A \subset \bigcup_{\sigma\in\kappa} \overline{\bigcup\mathcal{G}_\sigma}$. Ora, per ogni $\sigma \in \kappa$, la famiglia $\mathcal{G}_\sigma$ ha non più di κ elementi: essendo κ^+ regolare, esisterà un $\alpha_\sigma \in \kappa^+$ tale che $\mathcal{G}_\sigma \subset \mathcal{V}_{\alpha_\sigma}$; posto $\bar\alpha = \sup\{\alpha_\sigma : \sigma \in \kappa\}$, si ha $\bar\alpha \in \kappa^+$ per la regolarità, e $\{\mathcal{G}_\sigma : \sigma \in \kappa\} \subset [\mathcal{V}_{\bar\alpha}]^{\leq\kappa}$. Ma $q \notin \bigcup_{\sigma\in\kappa} \overline{\bigcup\mathcal{G}_\sigma}$, dunque per la (3) dovremmo avere $A_{\bar\alpha} \not\subset \bigcup_{\sigma\in\kappa} \overline{\bigcup\mathcal{G}_\sigma}$, il che è assurdo. □

Lemma 4.4.8 (Šapirovskiĭ). *Sia $\mathcal{V}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X, con $s(X) \leq \kappa$. Esistono $Y \in [X]^{\leq\kappa}$ e $\mathcal{W} \in [\mathcal{V}]^{\leq\kappa}$ tali che $X = \overline{Y} \cup \bigcup\mathcal{W}$.*

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo al contrario che si abbia $\overline{Y} \cup \bigcup\mathcal{W} \neq X$ per ogni $Y \in [X]^{\leq\kappa}$ e ogni $\mathcal{W} \in [\mathcal{V}]^{\leq\kappa}$. Allora possiamo costruire per induzione transfinita una successione $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ di punti di X e una successione $\{V_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ di elementi di $\mathcal{V}$ tali che $x_\alpha \in V_\alpha \setminus \left(\overline{\{x_\beta : \beta \in \alpha\}} \cup \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta\right)$ per ogni $\alpha \in \kappa^+$. In tal modo l'insieme $D = \{x_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ risulta discreto (infatti per ogni $\alpha \in \kappa^+$ l'insieme $U_\alpha = V_\alpha \setminus \overline{\{x_\beta : \beta \in \alpha\}}$ è aperto e $U_\alpha \cap D = \{x_\alpha\}$) quindi deve essere $s(X) > \kappa$. □

Teorema 4.4.9 (Hajnal–Juhász). *Se X è T_1 allora $|X| \leq 2^{s(X)\psi(X)}$.*

Dimostrazione: Sia $\kappa = s(X)\psi(X)$ e, per ogni $p \in X$, sia $\mathcal{U}_p$ una famiglia di intorni aperti di p, con $|\mathcal{U}_p| \le \kappa$, tale che $\bigcap \mathcal{U}_p = \{p\}$. Costruiamo, per induzione transfinita, una successione crescente $\{A_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ di sottoinsiemi di X e una successione $\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ di famiglie di aperti tali che, per ogni $\alpha \in \kappa^+$:

(1) $|A_\alpha| \le 2^\kappa$;

(2) $\mathcal{V}_\alpha = \bigcup \{\mathcal{U}_p : p \in \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\}$;

(3) per ogni $\mathcal{G} \in [\mathcal{V}_\alpha]^{\le\kappa}$ e ogni $\mathcal{H} \in [[\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\}]^{\le\kappa}]^{\le\kappa}$ tali che $\bigcup \mathcal{G} \cup \bigcup_{H \in \mathcal{H}} \overline{H} \ne X$ si ha $A_\alpha \setminus \big(\bigcup \mathcal{G} \cup \bigcup_{H\in\mathcal{H}} \overline{H}\big) \ne \emptyset$.

Supponiamo di aver costruito A_β e $\mathcal{V}_\beta$ per ogni $\beta < \alpha$. Notiamo che $\mathcal{V}_\alpha$ è definita dalla (2) e che ha cardinalità non superiore a 2^κ per la (1) e l'ipotesi induttiva. Per ogni $\mathcal{G} \in [\mathcal{V}_\alpha]^{\le\kappa}$ e ogni $\mathcal{H} \in [[\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\}]^{\le\kappa}]^{\le\kappa}$ tali che $\bigcup \mathcal{G} \cup \bigcup_{H\in\mathcal{H}} \overline{H} \ne X$, scegliamo un punto $x_{\langle \mathcal{G},\mathcal{H}\rangle}$ non appartenente a $\bigcup \mathcal{G} \cup \bigcup_{H\in\mathcal{H}} \overline{H}$, e sia S_α l'insieme di tutti i punti così scelti; è $|S_\alpha| \le 2^\kappa$, per cui possiamo definire A_α come $S_\alpha \cup \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$: ciò completa la costruzione delle successioni $\{A_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ e $\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$.

Ora poniamo $A = \bigcup_{\alpha\in\kappa^+} A_\alpha$: se $A = X$ la tesi è provata. Supponiamo al contrario che esista un punto $q \in X \setminus A$ e, per ogni $p \in A$, fissiamo un $U_p \in \mathcal{U}_p$ che non contenga q; scriviamo $\mathcal{U}_q$ come $\{B_\sigma : \sigma \in \kappa\}$ e, per ogni $\sigma \in \kappa$, sia $T_\sigma = A \setminus B_\sigma$; per il lemma precedente (applicato allo spazio T_σ e al suo ricoprimento aperto $\{U_p : p \in T_\sigma\}$), esistono Y_σ e Z_σ in $[T_\sigma]^{\le\kappa}$ tali che $T_\sigma \subset \overline{Y_\sigma} \cup \bigcup_{p\in Z_\sigma} U_p$. Essendo κ^+ regolare, per ogni $\sigma \in \kappa$ esisterà un $\alpha_\sigma \in \kappa^+$ tale che $Y_\sigma \cap Z_\sigma \subset \bigcup_{\beta<\alpha_\sigma} A_\beta$; ponendo allora $\bar\alpha = \sup\{\alpha_\sigma : \sigma \in \kappa\}$, si ha $\bar\alpha \in \kappa^+$ per la regolarità, e poiché l'insieme $E = \bigcup_{\sigma\in\kappa} \big(\overline{Y_\sigma} \cup \bigcup_{p\in Z_\sigma} U_p\big)$ non contiene q, per la (3) dovremmo avere $A_{\bar\alpha} \setminus E \ne \emptyset$: ma questo è impossibile perché $E \supset A$. $\square$

Teorema 4.4.10 (De Groot). *Se X è* T_2 *allora* $|X| \le 2^{hL(X)}$.

Dimostrazione: Conseguenza immediata dei Teoremi 4.4.9 e 4.3.7. $\square$

Esercizio 4.4.2 *Dimostrare direttamente la disuguaglianza di De Groot* $|X| \le 2^{hL(X)}$.
Suggerimento: Modificare la dimostrazione del Teorema 4.4.4.

Lemma 4.4.11 *Se X è uno spazio* T_2 *allora* $\psi(X) \le 2^{s(X)}$.

Dimostrazione: Poniamo $\kappa = s(X)$. Fissato $p \in X$, per ogni $q \ne p$ sia U_q un intorno aperto di q tale che $p \notin \overline{U_q}$. Applicando il Lemma 4.4.8 allo spazio $X \setminus \{p\}$ e al ricoprimento $\{U_q : q \neq p\}$ otteniamo due sottoinsiemi Y e Z di $X \setminus \{p\}$, entrambi di cardinalità non superiore a κ, tali che $X \setminus \{p\} \subset \overline{Y} \cup \bigcup_{q \in Z} U_q$. La famiglia di aperti $\mathcal{V} = \{X \setminus C : C \subset A,\ p \notin \overline{C}\} \cup \{X \setminus \overline{U_q} : q \in Z\}$ ha cardinalità non superiore a 2^κ, e $\bigcap \mathcal{V} = \{p\}$. □

Teorema 4.4.12 (Hajnal–Juhász). *Se X è T_2 allora $|X| \leq 2^{2^{s(X)}}$.*

DIMOSTRAZIONE: Infatti $|X| \leq 2^{s(X)\psi(X)} \leq 2^{2^{s(X)}s(X)} \leq 2^{2^{s(X)}}$. □

4.5 Spazi compatti e funzioni cardinali

Abbiamo già visto che se X è uno spazio compatto si ha $\chi(X) = \psi(X)$ e $w(X) = nw(X)$ (Teoremi 4.2.4 e 4.3.3). In questo paragrafo vedremo il teorema di Čech–Pospíšil (che, combinato con il Teorema 4.4.5, fornisce un'accurata valutazione della cardinalità di X usando il carattere) e alcuni risultati su $t(X)$ e $s(X)$, dovuti ad Arhangel'skiĭ e Šapirovskiĭ.

Ricordiamo che un sottoinsieme di uno spazio topologico si dice G_δ se è intersezione di una famiglia numerabile di aperti.

Lemma 4.5.1 *Siano A e B due sottoinsiemi chiusi digiunti di uno spazio compatto X. Esistono due G_δ chiusi disgiunti G e H tali che $A \subset G$ e $B \subset H$.*

DIMOSTRAZIONE: Definiamo per induzione due successioni di aperti $\{G_i : i \in \omega\}$ e $\{H_i : i \in \omega\}$ al seguente modo: G_0 e H_0 sono due aperti disgiunti tali che $A \subset G_0$ e $B \subset H_0$; per ogni $i \in \omega$ siano G_{i+1} e H_{i+1} aperti tali che $A \subset G_{i+1} \subset \overline{G_{i+1}} \subset G_i$ e $B \subset H_{i+1} \subset \overline{H_{i+1}} \subset H_i$. Gli insiemi $G = \bigcap_{i \in \omega} G_i$ e $H = \bigcap_{i \in \omega} H_i$ hanno le proprietà richieste. □

Teorema 4.5.2 (Čech–Pospíšil). *Sia X uno spazio compatto non vuoto e senza punti isolati. Se κ è un cardinale infinito tale che $\chi(p, X) \geq \kappa$ per ogni $p \in X$, allora $|X| \geq 2^\kappa$.*

DIMOSTRAZIONE: Definiamo una funzione che ad ogni elemento f di $2^{<\kappa}$ fa corrispondere un sottoinsieme chiuso non vuoto K_f di X in modo tale che, per ogni $\alpha \in \kappa$:

(1) se $f \in {}^\alpha 2$ e $\beta < \alpha$ allora $K_f \subset K_{f \restriction \beta}$;

(2) se f e g sono elementi distinti di ${}^\alpha 2$ allora $K_f \cap K_g = \emptyset$.

Distinguiamo due casi.

Caso $\kappa = \omega$. Aggiungiamo a (1) e (2) la condizione seguente:

(3) per ogni $f \in {}^{\alpha}2$, l'interno di K_f è non vuoto.

Ora procediamo per induzione, supponendo di aver già costruito K_f, per ogni $f \in {}^{\beta}2$ e ogni $\beta \in \alpha$, in modo che siano verificate (1), (2) e (3). Sia γ tale che $\alpha = \gamma + 1$: basterà che per ogni $g \in {}^{\gamma}2$ si costruiscano K_{g_0} e K_{g_1}, dove g_0 e g_1 sono gli elementi di ${}^{\alpha}2$ tali che, per ogni $i \in \{0, 1\}$, si ha $g_i \restriction \gamma = g$ e $g_i(\gamma) = i$. Poiché K_g ha interno non vuoto e X non ha punti isolati, esistono due aperti non vuoti V_0 e V_1 tali che $\overline{V_0} \cup \overline{V_1} \subset K_g$ e $\overline{V_0} \cap \overline{V_1} = \emptyset$: poniamo dunque $K_{g_0} = \overline{V_0}$ e $K_{g_1} = \overline{V_1}$.

Caso $\kappa > \omega$. Aggiungiamo a (1) e (2) la condizione seguente:

(3) per ogni $f \in {}^{\alpha}2$, K_f è intersezione di non più di $|\alpha| + \omega$ aperti.

Supponiamo di aver già costruito K_f, per ogni $f \in {}^{\beta}2$ e ogni $\beta \in \alpha$, in modo che siano verificate (1), (2) e (3). Se α è un ordinale limite, poniamo $K_f = \bigcap_{\beta<\alpha} K_{f\restriction\beta}$ per ogni $f \in {}^{\alpha}2$ (la compattezza di X implica che l'intersezione è non vuota). Se invece α è un ordinale successore, sia γ tale che $\alpha = \gamma + 1$: come nel caso precedente, basterà che per ogni $g \in {}^{\gamma}2$ si costruiscano K_{g_0} e K_{g_1}. Per l'ipotesi induttiva, K_g è intersezione di meno di κ aperti, e quindi (per il Teorema 4.2.4) deve avere più di un punto. Applicando il lemma precedente, otteniamo due G_δ chiusi disgiunti G_0 e G_1 tali che per ogni $i \in \{0, 1\}$ si ha $G_i \cap K_g \neq \emptyset$ e dunque possiamo porre $K_{g_i} = G_i \cap K_g$.

Per completare la dimostrazione, estendiamo la funzione appena definita a ${}^{\kappa}2$, ponendo $K_f = \bigcap_{\alpha\in\kappa} K_{f\restriction\alpha}$. Osserviamo che i K_f sono non vuoti e a due a due disgiunti, e pertanto si ha $|X| \geq |{}^{\kappa}2| = 2^{\kappa}$. □

Teorema 4.5.3 *Se X è compatto e $\chi(X) = \omega$ allora $|X| \leq \omega$ oppure $|X| = 2^{\omega}$.*

Dimostrazione: Sia Y l'unione di tutti gli aperti di X aventi cardinalità numerabile. Se $Y = X$ allora per la compattezza X è unione di una famiglia finita di insiemi numerabili, e quindi $|X| \leq \omega$. In caso contrario, il complementare Z di Y è un compatto non vuoto. Poiché per il Teorema 4.4.5 si ha $|X| \leq 2^{\omega}$, per completare la dimostrazione basterà applicare a Z il Teorema di Cech–Pospíšil: a tale scopo dobbiamo provare che Z non ha punti isolati.

Supponiamo al contrario che esistano $p \in Z$ e $V \subset X$ aperto tali che $V \cap Z = \{p\}$. Sia $\{V_i : i \in \omega\}$ una base di intorni di p con $\overline{V_0} \subset V$ e $V_{i+1} \subset V_i$, e poniamo $A_i = V_i \setminus V_{i+1}$ per ogni $i \in \omega$. Poiché $\bigcup_{i\in\omega} A_i = V_0 \setminus \{p\}$ è non numerabile, esiste un $n \in \omega$ tale che $|A_n| > \omega$. Essendo X uno spazio compatto esiste un punto di completa accumulazione per A_n, diciamo q. Allora q è un punto di $V \cap Z$ distinto da p: assurdo. □

Corollario 4.5.4 *Ogni sottoinsieme chiuso non numerabile di* $\mathbb{R}$ *ha cardinalità* 2^ω.

Dimostrazione: Infatti ogni sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$ è l'unione di una famiglia numerabile di compatti. □

Sia X uno spazio topologico, e κ un cardinale infinito. Diremo che $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ è una *successione libera* (di lunghezza κ) se per ogni $\beta \in \kappa$ si ha $\overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta\}} \cap \overline{\{x_\alpha : \alpha \geq \beta\}} = \emptyset$. Notiamo che in particolare $x_\alpha \neq x_\beta$ per $\alpha \neq \beta$.

Lemma 4.5.5 *Sia* κ *un cardinale infinito, e sia* X *uno spazio compatto; supponiamo che per ogni* $Y \subset X$ *chiuso e ogni* $p \in Y$ *esista una famiglia* $\mathcal{G}_{\langle Y,p\rangle}$ *di* G_δ *chiusi non vuoti, con* $|\mathcal{G}_{\langle Y,p\rangle}| \leq \kappa$, *tale che per ogni intorno* U *di* p *in* Y *esiste un* $G \in \mathcal{G}_{\langle Y,p\rangle}$ *contenuto in* U*: allora* $t(X) \leq \kappa$.

Dimostrazione: Sia p un punto di X, e sia Z un sottoinisieme di X con $p \in \overline{Z}$; indichiamo con Y la chiusura di Z. Per ogni $G \in \mathcal{G}_{\langle Y,p\rangle}$, sia $\mathcal{V}(G) = \{V_i^{(G)} : i \in \omega\}$ una famiglia (numerabile) di aperti la cui intersezione è G; possiamo supporre che $\overline{V_{i+1}^{(G)}} \subset V_i^{(G)}$ per ogni $i \in \omega$, cosicché $G = \bigcap_{i\in\omega} \overline{V_i^{(G)}}$. Posto $\mathcal{H} = \bigcup_{G\in\mathcal{G}_{\langle Y,p\rangle}} \mathcal{V}(G)$, è $|\mathcal{H}| \leq \kappa$ e, per il Lemma 4.2.3, ogni intorno di p in Y contiene un elemento di $\mathcal{H}$ il quale, essendo aperto e non vuoto, deve intersecare Z. Se dunque per ogni $H \in \mathcal{H}$ scegliamo $x_H \in H \cap Z$, l'insieme $S = \{x_H : H \in \mathcal{H}\}$ ha cardinalità minore o uguale a κ, e $p \in \overline{S}$. □

Teorema 4.5.6 (Arhangel'skiĭ–Šapirovskiĭ). *Per uno spazio compatto* X *vale* $t(X) \leq \kappa$ *se e solo se ogni successione libera in* X *ha lunghezza non superiore a* κ.

Dimostrazione: Sia $S = \{x_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ con $\lambda > \kappa$ (e $x_\alpha \neq x_\beta$ per $\alpha \neq \beta$). Poiché X è compatto, S ha un punto di completa accumulazione, diciamo p. Dunque $p \in \overline{\{x_\alpha : \alpha \geq \beta\}}$ per ogni $\beta \in \lambda$. Se $t(X) \leq \kappa$, esiste $I \in [\lambda]^{\leq\kappa}$ tale che $p \in \overline{\{x_\alpha : \alpha \in I\}}$. Ponendo $\bar\beta = \sup I$, si ha $\bar\beta \in \lambda$ e $p \in \overline{\{x_\alpha : \alpha < \bar\beta\}}$, cosicché S non può essere una successione libera.

Viceversa supponiamo che $t(X) > \kappa$: mostreremo che esiste una successione libera di lunghezza maggiore di κ. Per il lemma precedente, esistono un chiuso $Y \subset X$ e un punto $p \in Y$ tali che la famiglia $\mathcal{G}$ di tutti i sottoinsiemi G_δ chiusi e non vuoti di Y ha la proprietà seguente:

(*) se $\mathcal{H} \in [\mathcal{G}]^{\leq\kappa}$, esiste U aperto in Y contenente p tale che $H \not\subset U$ per ogni $H \in \mathcal{H}$.

Costruiamo, per induzione transfinita, due successioni $\{A_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ e $\{B_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ di elementi di $\mathcal{G}$, in modo tale che per ogni $\alpha \in \kappa^+$:

(1) $p \in A_\alpha$ e $A_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$;

(2) se $\mathcal{F}$ è un sottoinsieme finito di $\{A_\beta : \beta \in \alpha\} \cup \{B_\beta : \beta \in \alpha\}$ e $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ allora $B_\alpha \cap \bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Supponiamo di aver già definito $\{A_\beta : \beta \in \alpha\}$ e $\{B_\beta : \beta \in \alpha\}$. Sia Φ la famiglia di tutti i sottoinsiemi finiti di $\{A_\beta : \beta \in \alpha\} \cup \{B_\beta : \beta \in \alpha\}$; posto $\mathcal{H} = \{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \in \Phi\}$, si ha $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ e $|\mathcal{H}| \leq \kappa$, quindi per la (*) c'è un intorno aperto U di p in Y tale che $H \setminus U \neq \emptyset$ per ogni $H \in \mathcal{H}$. Per il Lemma 4.5.1, applicato allo spazio Y, esistono due elementi digiunti G' e G'' di $\mathcal{G}$, tali che $p \in G'$ e $Y \setminus U \subset G''$, cosicché $H \cap G'' \neq \emptyset$ per ogni $H \in \mathcal{H}$. Ponendo allora $A_\alpha = G'$ e $B_\alpha = G''$, la (1) e la (2) sono verificate.

Fissiamo ora $\alpha \in \kappa^+$: facendo uso del principio di induzione si vede facilmente che ogni sottonsieme finito $\mathcal{F}$ di $\{A_\beta : \beta \leq \alpha\} \cup \{B_\beta : \beta > \alpha\}$ ha intersezione non vuota. Per la compattezza di X, l'inisieme $I_\alpha = \left(\bigcup_{\beta \leq \alpha} A_\beta\right) \cap \left(\bigcup_{\beta > \alpha} B_\beta\right)$ è dunque non vuoto, e possiamo scegliere x_α. La successione $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ è libera, perché per ogni $\beta \in \kappa^+$ si ha $\overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta\}} \subset B_\beta$ e $\overline{\{x_\alpha : \alpha \geq \beta\}} \subset A_\beta$. □

Corollario 4.5.7 *Se X è compatto, $t(X) \leq s(X)$.*

DIMOSTRAZIONE: Infatti una successione libera è un sottoinsieme discreto. □

Esercizio 4.5.1 *Mostrare che, se X è T_2, si ha $t(X) \leq s(X)h(X)$. Dedurre che $t(X) \leq s(X)$ per ogni X localmente compatto.*
SUGGERIMENTO: Usare il Teorema 4.2.9 e il Lemma 4.2.5.

4.6 Spazi di funzioni continue

Presenteremo in questo paragrafo alcuni risultati relativi agli spazi di funzioni continue che si prestano ad essere trattati in modo sistematico usando i metodi di teoria degli insiemi che abbiamo introdotto. Rimandiamo per una trattazione più completa al libro di A.V. Arhangel'skĭı "Topological function spaces" citato nella bibliografia.

Indicheremo con $\mathcal{C}(X,Y)$ l'insieme delle funzioni continue $f\colon X \to Y$, con X e Y spazi topologici; in generale X sarà supposto uno spazio di

Tychonoff, cioè uno spazio nel quale valgono gli assiomi di separazione T_1 e $T_{3\frac{1}{2}}$. In particolare se $Y = \mathbb{R}$, l'insieme $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ sarà indicato più semplicemente con $\mathcal{C}(X)$. Infine denoteremo con $\mathcal{C}^\star(X)$ l'insieme delle funzioni continue e limitate, definite su X e a valori reali. Tali insiemi di funzioni continue si penseranno dotati di varie topologie.

Definizione 4.6.1 *Se $A \subset X$ e $B \subset Y$, allora*

$$\langle A, B\rangle = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) \colon f(A) \subset B\} \quad . \tag{4.5}$$

Sia $\mathcal{E}$ una famiglia di sottoinsiemi di X, tali che $\emptyset \in \mathcal{E}$. Allora la famiglia $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ di tutti gli insiemi del tipo $\langle A, B\rangle$, con $A \in \mathcal{E}$ e U aperto in Y è una sottobase di una topologia $\mathcal{T}_\mathcal{E}$ sull'insieme $\mathcal{C}(X, Y)$. La chiameremo la *topologia della convergenza uniforme sugli elementi di $\mathcal{E}$*.

Se $\mathcal{E}$ è la famiglia di tutti i sottoinsiemi finiti di X, allora $\mathcal{T}_\mathcal{E}$ è la *topologia della convergenza puntuale*. Indicheremo lo spazio delle funzioni continue dotato di questa topologia con $\mathcal{C}_p(X, Y)$.

Se $\mathcal{E}$ è la famiglia di tutti i sottinsiemi compatti di X, allora $\mathcal{T}_\mathcal{E}$ è detta la *topologia compatto - aperta*. $\mathcal{C}(X, Y)$ dotato di questa topologia si indicherà con $\mathcal{C}_c(X, Y)$.

Se $\mathcal{E}$ è la famiglia di tutti i sottinsiemi *limitati* di X (cioè di tutti i sottoinsiemi $A \subset X$ tali che, per ogni $f \colon X \to \mathbb{R}$, $|f(A)|$ è limitato) $\mathcal{C}(X, Y)$ dotato di questa topologia si indicherà con $\mathcal{C}_0(X, Y)$.

Su $\mathcal{C}(X)$ è possibile definire anche un'altra topologia canonica, detta topologia della *convergenza uniforme*. Questa topologia è generata dalla base costituita dagli insiemi $V(f, \varepsilon)$, con $f \in \mathcal{C}(X)$ e $\varepsilon > 0$, dati da

$$V(f, \varepsilon) = \{g \in \mathcal{C}(X) \colon |g(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in X\} \quad .$$

Una base naturale di $\mathcal{C}_p(X, Y)$ è data dagli insiemi

$$W(x_1, \ldots, x_k; U_1, \ldots, U_k) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) \colon f(x_i) \in U_i, i = 1, 2, \ldots, k\},$$

dove $x_1, \ldots, x_k \in X$ e $U_1, \ldots, U_k$ sono aperti in Y.

Proposizione 4.6.1 *Sia $\mathcal{B}$ una base dello spazio Y.*
Allora $\{W(x_1, \ldots, x_k; U_1, \ldots, U_k) \colon x_i \in X, U_i \in \mathcal{B}, i = 1, \ldots, k, k \in \mathbb{N}^+\}$ è una base dello spazio $\mathcal{C}_p(X, Y)$.

Proposizione 4.6.2 *Se $Y \subset Z$ si ha $\mathcal{C}_p(X, Y) \subset \mathcal{C}_p(X, Z)$. Se Y è chiuso in Z, allora $\mathcal{C}_p(X, Y)$ è chiuso in $\mathcal{C}_p(X, Z)$.*

Nel caso dello spazio $\mathcal{C}_p(X)$, se $f: X \to \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, per $k \in \mathbb{N}^+$

$$W(f; x_1, \dots, x_k; \varepsilon) = \{g \in \mathcal{C}(X): |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, k\},$$

è un intorno di base di f.

Proposizione 4.6.3 *Lo spazio $\mathcal{C}_p(X)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^X$ (inteso come la totalità delle applicazioni da X a $\mathbb{R}$, con la topologia della convergenza puntuale). Si ha $\overline{\mathcal{C}_p(X)} = \mathbb{R}^X$, cioè $\mathcal{C}_p(X)$ è denso in $\mathbb{R}^X$.*

DIMOSTRAZIONE: La topologia del prodotto alla Tychonoff su $\mathbb{R}^X$ coincide con la topologia puntuale sull'insieme stesso e quindi, in modo naturale, $\mathcal{C}_p(X)$ è sottospazio topologico di $\mathbb{R}^X$. Sia $f \in \mathbb{R}^X$. Per ogni insieme finito $x_1, x_2, \dots, x_k$ di punti di X, vi è una funzione $g \in \mathcal{C}_p(X)$ tale che $g(x_i) = f(x_i), i = 1, \dots, k$. Dunque ogni intorno di f incontra punti di $\mathcal{C}_p(X)$. Ossia $\overline{\mathcal{C}_p(X)} = \mathbb{R}^X$. □

Corollario 4.6.4 *La cellularità (numero di Suslin) di uno spazio $\mathcal{C}_p(X)$ è numerabile.*

DIMOSTRAZIONE: Poiché il prodotto di un numero finito di rette reali, essendo separabile, ha cellularità numerabile, per il teorema 4.3.16, concludiamo che $c(\mathbb{R}^X) = \aleph_0$. Per la proposizione precedente 4.6.3, sappiamo che $\overline{\mathcal{C}_p(X)} = \mathbb{R}^X$. Perciò anche $c(\mathcal{C}_p(X)) = \aleph_0$. □

Talvolta si definiscono gli spazi $\mathcal{C}_{p,n}(X)$, $n \in \omega \setminus \{0\}$, induttivamente come segue. $\mathcal{C}_{p,1}(X) = \mathcal{C}_p(X)$; $\mathcal{C}_{p,n+1}(X) = \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_{p,n}(X))$. In particolare, $\mathcal{C}_{p,2}(X) = \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$.

Definizione 4.6.2 *Un numero cardinale κ si dice un* precalibro (calibro) *su X se, per ogni famiglia $\mathcal{U} = \{U_\alpha: \alpha \in A\}$ di insiemi aperti non vuoti di X, con $|A| = \kappa$, esiste $B \subset A$, con $|B| = \kappa$, tale che $\{U_\alpha: \alpha \in B\}$ è* centrata*, cioè ha la proprietà dell'intersezione finita, (rispettivamente: è tale che $\cap\{U_\alpha: \alpha \in B\} \neq \emptyset$).*

Valgono le seguenti proprietà

Proposizione 4.6.5 *Sia Y un insieme denso in X. Un cardinale κ è un precalibro in Y se e solo se è un precalibro in X.*

La dimostrazione è ovvia.

Proposizione 4.6.6 *Se κ è un cardinale regolare e $\kappa > d(X)$, allora κ è un calibro di X.*

DIMOSTRAZIONE: Poiché $\kappa > d(x)$, data la famiglia $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$, con $|A| = \kappa$, per la regolarità di κ, esiste almeno un punto $x_0 \in D$ (D denso in X, con $|D| \leq d(X)$), tale che $B = \{\alpha : x_0 \in U_\alpha\}$ ha cardinalità κ. Allora $\cap\{U_\alpha : \alpha \in B\} \neq \emptyset$. □

Proposizione 4.6.7 *Se κ è un precalibro di X, la cardinalità di ogni famiglia di aperti a due a due disgiunti in X è strettamente minore di κ.*

Un attimo di riflessione permette di riconscere che, ovviamente, $c(X) < \kappa$.

Altro fatto di ovvia dimostrazione è il seguente

Proposizione 4.6.8 *Se X è uno spazio compatto di Hausdorff, κ è un precalibro se e solo se è un calibro.*

Šanin ha dimostrato il seguente teorema, del quale omettiamo la dimostrazione.

Teorema 4.6.9 *Se un cardinale κ è un precalibro (un calibro) per ogni spazio X_α, $\alpha \in A$, allora è pure un precalibro (un calbro) del prodotto cartesiano $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.*

Poiché $\mathbb{R}$ è separabile, un facile corollario è il seguente

Corollario 4.6.10 *Ogni cardinale regolare non numerabile è un calibro di $\mathcal{C}_p(X)$.*

Proposizione 4.6.11 *La chiusura di ogni aperto in $\mathcal{C}_p(X)$ è uno zero insieme per qualche funzione continua $g: \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$.*

DIMOSTRAZIONE:

a) Sia U un aperto di $\mathbb{R}^X$. Mostriamo che $\overline{U}$ è uno zero insieme per una funzione a valori reali definita su $\mathbb{R}^X$. Usando il lemma di Zorn, si può assumere che esiste una famiglia massimale Γ di aperti fondamentali in $\mathbb{R}^X$ a due a due disgiunti contenuti in U. Per ogni $V = W(f; x_1, \dots, x_k, \varepsilon) \in \Gamma$, sia $k(V) = \{x_1, \dots, x_k\}$. La massimalità di Γ implica che $\overline{\cup\Gamma} = \overline{U}$. Poiché $\mathbb{R}^X$ ha cellularità numerabile, anche Γ è numerabile. Allora $L = \cup\{k(V) : V \in \Gamma\}$ è esso pure numerabile. Si consideri la proiezione $\pi: \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^L$, che ad ogni $f \in \mathbb{R}^X$ associa la restrizione $\pi(f) = (f \restriction L) \in \mathbb{R}^L$. π è un'applicazione continua e aperta da $\mathbb{R}^X$ in $\mathbb{R}^L$ e $\cup\Gamma = \pi^{-1}(\pi(\cup\Gamma))$. Dunque $\pi^{-1}(\overline{\pi(\cup\Gamma)}) = \overline{\cup\Gamma} = \overline{U}$. Ora $\mathbb{R}^L$ h peso numerabile e quindi c'è una funzione continua $g: \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ tale che $g^{-1}(0) = \overline{\pi(\cup\Gamma)}$. Posto $f = g \circ \pi$, allora $f \in \mathcal{C}_p(X)$ e $f^{-1}(0) = \pi^{-1}(g^{-1}(0)) = \overline{\cup\Gamma} = \overline{U}$. Cioè $\overline{U}$ è uno zero insieme di f.

b) Se $Y \subset X$, $\overline{Y} = X$ e in X la chiusura di ogni aperto è uno zero insieme per qualche fnzione $f: X \to \mathbb{R}$, allora Y ha la stessa proprietà. Sia

$U \subset Y$, con U aperto in Y. Sia $\tilde{U}$ un aperto in X tale che $U = \tilde{U} \cap Y$. Allora si ha $\mathrm{cl}_X(\tilde{U}) = \mathrm{cl}_X(U)$. Esiste $f \in \mathcal{C}(X)$ tale che $\mathrm{cl}_X(\tilde{U}) = f^{-1}(0)$. Per $g = (f \restriction Y) \in \mathcal{C}(Y)$, si ha $g^{-1}(0) = f^{-1}(0) \cap Y = \mathrm{cl}_X(\tilde{U}) \cap Y = \mathrm{cl}_Y(U)$.

Da a) e b) e dal fatto che $\mathcal{C}_p(X)$ è denso in $\mathbb{R}^X$, segue la validità della tesi. □

Uno spazio topologico dotato della proprietà or ora messa in evidenza viene detto da Ščepin uno spazio *perfettamente-k-normale*.

Se $Y \subset X$, $\pi = \pi_Y : \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(Y)$, è la mappa restrizione di $f \in \mathcal{C}_p(X)$ a Y. Si ha $\pi_Y(f) = (f \restriction Y)$, per ogni $f \in \mathcal{C}_p(X)$. $\pi_Y(\mathcal{C}_p(X)) \subset \mathcal{C}_p(Y)$ sarà denotato anche con $\mathcal{C}_p(Y|X)$.

Relativamente alla mappa restrizione, si dimostra facilmente la seguente

Proposizione 4.6.12 *Per ogni $Y \subset X$ vale*

(1) π è continua e $\overline{\pi(\mathcal{C}_p(X))} = \mathcal{C}_p(Y)$.

(2) Se Y è chiuso in X, allora π è un'applicazione aperta da $\mathcal{C}_p(Y)$ su $\pi(\mathcal{C}_p(X)) \subset \mathcal{C}_p(Y)$.

(3) Se Y è compatto, allora $\pi(\mathcal{C}_p(X)) = \mathcal{C}_p(Y)$.

(4) Se X è normale e Y è chiuso in X, allora $\pi(\mathcal{C}_p(X)) = \mathcal{C}_p(Y)$.

(5) Se Y è denso in X, allora $\pi : \mathcal{C}_p(X) \to \pi(\mathcal{C}_p(X))$ è biiettiva e continua.

Definizione 4.6.3 *Un'applicazione $f : X \to Y$ che sia biiettiva e continua viene detta da Arhangel'skiĭ una* condensazione.

Se $f : X \to Y$, si definisce $f^\sharp : \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}^X$, *duale* di f, come segue: per ogni $\phi \in \mathbb{R}^Y$, $f^\sharp(\phi)(x) = \phi(f(x))$ per ogni $x \in X$. Cioè $f^\sharp(\phi) = \phi \circ f$.

Proposizione 4.6.13

(1) $f^\sharp$ è continua.

(2) Se $f(X) = Y$, $f^\sharp : \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}^X$ è un omeomorfismo da $\mathbb{R}^Y$ su un sottospazio chiuso $f^\sharp(\mathbb{R}^Y) \subset \mathbb{R}^X$.

Sia dato uno spazio topologico X e una famiglia $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^X$. Per ogni $x \in X$definiamo una funzione $g_x : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ come segue: $g_x(f) = f(x), \forall f \in \mathcal{F}$. Definendo $\psi_{\mathcal{F}}(x) = g_x$ per $x \in X$ otteniamo la mappa canonica di valutazione $\psi_{\mathcal{F}} : X \to \mathbb{R}^{\mathcal{F}}$.

Proposizione 4.6.14 *Per ogni insieme X e ogni sottospazio $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^X$, $g_x : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ è continua.*

Proposizione 4.6.15 *Per ogni spazio X e ogni $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_p(X)$, $\psi_{\mathcal{F}}: X \to \mathcal{C}_p(X)$ è continua.*

Proposizione 4.6.16 *Uno spazio completamente regolare X è omeomorfo al sottospazio $\psi(X)$ di $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$.*

Si consideri

$$L_p(X) = \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \in \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X)) : x_1, \ldots, x_n \in X, \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}, n \in \omega \setminus \{0\}\}. \qquad (4.6)$$

$L_p(X)$ è il più piccolo sottospazio lineare topologico di $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$ che contiene X.

Vale

Proposizione 4.6.17

$$L_p(X) = (\mathcal{C}_p(X))'$$

Cioè è il duale topologico di $\mathcal{C}_p(X)$.

Un risultato molto importante relativo agli spazi di funzioni è il seguente teorema, del quale omettiamo la dimostrazione.

Teorema 4.6.18 (Nagata). *Se gli anelli topologici $\mathcal{C}_p(X)$ e $\mathcal{C}_p(Y)$ sono topologicamente isomorfi, allora X e Y sono omeomorfi.*

Infine dimostriamo il seguente risultato

Teorema 4.6.19 *Per ogni spazio completamente regolare X, vale*

$$|X| = \chi(\mathcal{C}_p(X)) = w(\mathcal{C}_p(X)) \quad . \qquad (4.7)$$

Dimostrazione: È ovvia la disuguaglianza

$$\chi(\mathcal{C}_p(X)) \leq w(\mathcal{C}_p(X)) \leq w(\mathbb{R}^X) \leq |X|.$$

Basterà perciò dimostrare che $|X| \leq \chi(\mathcal{C}_p(X))$. Si assuma il contrario e sia $\mathcal{B}$ una base locale di $\mathcal{C}_p(X)$ in $f \equiv 0$ tale che $|\mathcal{B}| < |X|$. Si può assumere che gli elementi di $\mathcal{B}$ siano aperti fondamentali di base in $\mathcal{C}_p(X)$. Per ogni $W(f; x_1, \ldots, x_k; \varepsilon) \in \mathcal{B}$, sia $k(W) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ e $Y = \cup\{k(W): W \in \mathcal{B}\}$. Ovviamente $|Y| < |X|$ e sia $x^\star$ un punto in $X \setminus Y$. Siano poi $U = W(f; x^\star; 1)$ e sia $V = W(f; x_1, \ldots, x_k; \varepsilon) \in \mathcal{B}$ con $x_1, \ldots, x_k \in Y$. Dunque $x_i \neq x^\star, i = 1, \ldots, k$. Esiste perciò una funzione $g \in \mathcal{C}_p(X)$ tale che $g(x_i) = 0$, per

$i = 1, \dots, k$ e $g(x^\star) = 1$. Allora $g \in V \setminus U$, cioè $V \setminus U \neq \emptyset$, per ogni $V \in \mathcal{B}$. Ma ciò va contro l'ipotesi che $\mathcal{B}$ sia una base di $\mathcal{C}_p(X)$ nel punto $f \in U$. $\square$

Si può concludere che $\mathcal{C}_p(X)$ soddisfa il secondo assioma di regolarità se e solo se X è numerabile.

Come segue dal precedente teorema 4.6.19 risulta che $w(\mathcal{C}_p(\mathbb{R})) > w(\mathbb{R})$. Ma esistono spazi topologici numerabili X tali che $w(X) > \aleph_0$. Dunque $w(\mathcal{C}_p(X)) < w(X)$ per un tale spazio X. Tuttavia vale sempre

Teorema 4.6.20 *Per ogni spazio di Tychonoff X, si ha*

$$nw(X) = nw(\mathcal{C}_p(X)) \quad . \tag{4.8}$$

DIMOSTRAZIONE: Mostriamo che $nw(\mathcal{C}_p(X)) \leq nw(X)$. Si fissi una rete $\mathcal{N}$ in X e una base numerabile $\mathcal{B}$ in $\mathbb{R}$. Per ogni coppia di collezioni finite $S_1, \dots, S_k \in \mathcal{N}$ e $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{B}$ si consideri $W(S_1, \dots, S_k; U_1, \dots, U_k) = \{f \in \mathcal{C}(X) \colon f(S_i) \subset U_i, i = 1, \dots, k\}$. Sia $\mathcal{M}$ la famiglia così definita: $\mathcal{M} = \{W(S_1, \dots, S_k; U_1, \dots, U_k) \colon S_1, \dots, S_k \in \mathcal{N}, U_1, \dots, U_k \in \mathcal{B}\}$. Mostreremo che $\mathcal{M}$ è una rete in $\mathcal{C}_p(X)$, e ciò dimostrerà la disuguaglianza richiesta, poiché $|\mathcal{M}| \leq |\mathcal{N}|$. Sia $f \in \mathcal{C}_p(X)$ e sia $W(f; x_1, \dots, x_k; \varepsilon)$ un intorno fondamentale di f in $\mathcal{C}_p(X)$. Supponiamo che sia $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$. Si prendano gli aperti di $\mathbb{R}$, $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{B}$, in modo tale che $f(x_i) \in U_i \subset]f(x_i) - \varepsilon, f(x_i) + \varepsilon[$, per $i = 1, \dots, k$. Poiché f è continua ci sono $S_1, \dots, S_k \in \mathcal{N}$ tali che $x_i \in S_i$ e $f(x_i) \in U_i$ per $i = 1, \dots, k$. Si vede che $f \in W(S_1, \dots, S_k; U_1, \dots, U_k)$ e che $W(S_1, \dots, S_k; U_1, \dots, U_k) \subset W(f; x_1, \dots, x_k; \varepsilon)$. La relazione d'appartenenza segue dal fatto che $f(S_i) \subset U_i, i = 1, \dots, k\}$. Sia poi $g \in W(S_1, \dots, S_k; U_1, \dots, U_k)$. Poiché $x_i \in S_i$ e quindi $g(x_i) \in U_i$, si trova pure che $|g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ per $i = 1, \dots, k$. Perciò $g \in W(f; x_1, \dots, x_k; \varepsilon)$.

Per stabilire la disuguaglianza nel verso opposto, si osservi che si può pensare $X \subset \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$ e quindi che $nw(X) \leq nw(\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X)))$. Ma per quanto appena dimostrato è pure $nw(\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))) \leq nw(\mathcal{C}_p(X))$. In definitiva

$$nw(X) \leq nw(\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))) \leq nw(\mathcal{C}_p(X)) \leq nw(X) \quad .$$

Vale dunque l'uguaglianza. $\square$

4.7 Generalizzazione di un teorema di Grothendieck

Vediamo che cosa succede

Bibliografia

(1) Aleksandr V. Archangel'skĭı, *Topological function spaces*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1992).

(2) Ryszard Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin (1989).

(3) Borislav Balcar and Pavel Štěpánek, *Set theory (Chapter 4)* (Translated by Eva Copláková, Report 88–47, TU Delft, (1988).

(4) James M. Henle, *An outline of set theory*, Springer-Verlag, New York, (1986).

(5) Karel Hrbaček and Thomas Jech, *Introduction to set theory*, 3rd edition, Marcel Dekker, New York (1999).

(6) Thomas Jech, *Set Theory*, Academic Press, New York (1978).

(7) Winfried Just and Martin Weese, *Discovering modern set theory*, Vol. I, American Mathematical Society, Providence, RI (1996).

(8) Winfried Just and Martin Weese, *Discovering modern set theory*, Vol. II, American Mathematical Society, Providence, RI (1997).

(9) Kenneth Kunen, *Set theory*, North–Holland Publishing Co., Amsterdam, (1983).

(10) Judith Roitman, *Introduction to modern set theory*, John Wiley & Sons Inc., New York (1990).

(11) Jerry E. Vaughan, *The irrational numbers: topology and set theory*, Third draft, University of North Carolina at Greensboro (1988).

Indice analitico