Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria: esercizi
Ex a.a. 2013-2014, sessione invernale, III appello

Corso: prof. TIRONI

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

Anno di Corso ________ Laurea in Ingegneria ______________________

ESERCIZIO N. 1. Si calcoli, usando il metodo dei residui, il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot \operatorname{sen}(ax)}{x^2+4}\, dx, \quad a > 0.$$

RISULTATO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^2+4} dx = \frac{\pi}{e^{2a}}$$

SVOLGIMENTO

Consideriamo $f(z) = \dfrac{z e^{iaz}}{z^2+4}$. La funzione ha due poli in $z = \pm 2i$, entrambi semplici. In base al lemma di Jordan,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos ax}{x^2+4} dx}_{=0} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^2+4} dx$$

$$= i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^2+4} dx = 2\pi i \, R(f, 2i)$$

$$R(f, 2i) = \frac{\cancel{z} e^{iaz}}{2\cancel{z}}\Big|_{z=2i} = \frac{e^{-2a}}{2}.$$ Dunque

$$i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^2+4} dx = \cancel{2}\pi i \frac{e^{-2a}}{\cancel{2}} = i\pi e^{-2a},$$

Ossia $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^2+4} dx = \pi / e^{2a}$

ESERCIZIO N. 2. È data la funzione $f(x) = x(\pi - |x|)$, definita per $|x| \le \pi$.

(i) Si determini lo sviluppo in serie di Fourier di $f(x)$

La funzione $f(x) = x(\pi - |x|)$ è dispari se $-\pi \le x \le \pi$.
Dunque $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(\pi-|x|)\,\text{sen}\,nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi-x)\,\text{sen}\,nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi x - x^2)\,\text{sen}\,nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{ \cancel{-(\pi x - x^2)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}}^{\,0} + \int_0^{\pi}(\pi - 2x)\frac{\cos nx}{n}\,dx \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left\{ \cancel{(\pi - 2x)\frac{\text{sen}\,nx}{n}\Big|_0^{\pi}}^{\,0} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\text{sen}\,nx\,dx \right\}$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\text{sen}\,nx\,dx = \frac{4}{\pi n^2}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{4}{\pi n^3}\left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ \dfrac{8}{\pi(2k+1)^3} & \text{se } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\text{sen}(2k+1)x}{(2k+1)^3}$$

(ii) Si dica se la convergenza della serie è puntuale o uniforme

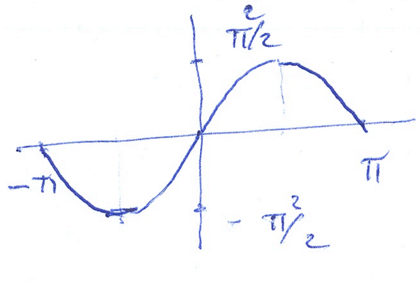
La convergenza è uniforme: $f' \in L^2(-\pi,\pi)$, f continua, $f(x) = f(-\pi) + \int_0^x f'(t)\,dt$.

(iii) Usando l'identità di Parseval, si calcoli la somma della serie $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}$.

$$\pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx\ ; \text{ cioè}$$

$$2\int_0^{\pi} x^2(\pi - x)^2\,dx = 2\int_0^{\pi}(\pi^2 x^2 - 2\pi x^3 + x^4)\,dx = 2\pi^5\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{2}{30}\pi^5 = \frac{\pi^5}{15} = \pi \cdot \frac{64}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6} \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$



COGNOME e NOME ______________________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Si determini la funzione $f(x)$ che ha come trasformata di Fourier di $\hat{f}(\xi) = \dfrac{-1}{(\xi - i)^2}$. Si distinguano con attenzione i casi $x \geq 0$ e $x < 0$. Si valutino inoltre la trasformata di $f(x/3)$ e l'iterata $\mathcal{F}^2(f)$.

RISULTATO

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}; \quad \widehat{f(\tfrac{x}{3})}(\xi) = \frac{-3}{(3\xi - i)^2};$$

$$\mathcal{F}^2(f)(x) = 2\pi f(-x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -2\pi x e^{x}, & x < 0 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO

La trasformata $\hat{f}(\xi)$ ha un polo di molteplicità 2 in $\xi = i$, che sta nel semipiano superiore. Perciò, per il lemma di Jordan, se $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \frac{-1}{(\xi - i)^2} d\xi = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi i \, R(f, i)$$

$$R(f, i) = -\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\cancel{(\xi - i)^2} e^{ix\xi}}{\cancel{(\xi - i)^2}}\right)_{\xi = i} = -ixe^{ix\xi}\Big|_{\xi = i} = -i\,xe^{-x}, \quad x > 0.$$

Dunque $f(x) = i \cdot (-i) x e^{-x} = xe^{-x}$, se $x > 0$.

Se $x < 0$, non ci sono singolarità nel semipiano inferiore, dunque $f(x) = 0$ per $x < 0$.

Dunque

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

$$\hat{f}\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{-3}{(3\xi - i)^2}; \quad \mathcal{F}^2(f) = 2\pi f(-x) = 2\pi \begin{cases} 0, & \text{se } x \geq 0 \\ -xe^{x}, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

ESERCIZIO N. 4. È dato il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} x' + 2x - y = 0 \\ y' + x - 2y = tu(t)\,. \end{cases}$$

Si determini la soluzione del sistema con condizioni iniziali nulle (qui $u(t)$ è la funzione gradino di Heaviside).

RISULTATO $x(t) = \left(-\frac{1}{3}t + \frac{1}{6\sqrt{3}} e^{\sqrt{3}t} - \frac{1}{6\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}t}\right) u(t)$

$y(t) = \left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}t + \frac{2+\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} e^{\sqrt{3}t} - \frac{2-\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}t}\right) u(t)$

SVOLGIMENTO Trasformando con Laplace:

$$\begin{cases} sX + 2X - Y = 0 \\ sY + X - 2Y = \frac{1}{s^2} \end{cases}$$

Dalla prima equazione $Y = (s+2)X$, sostituendo:

$(s-2)Y + X = \frac{1}{s^2}$, cioè $(s^2-4)X + X = \frac{1}{s^2}$;

$$X = \frac{1}{s^2(s^2-3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-\sqrt{3}} + \frac{D}{s+\sqrt{3}}$$

$$A = \lim_{s\to 0}\left(\frac{\cancel{s^2}}{\cancel{s^2}(s^2-3)}\right)' = -\frac{2s}{(s^2-3)^2}\Big|_{s=0} = 0$$

$$B = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2-3} = -\frac{1}{3}$$

$$C = \lim_{s\to\sqrt{3}} \frac{\cancel{s-\sqrt{3}}}{s^2(\cancel{s-\sqrt{3}})(s+\sqrt{3})} = \frac{1}{3\cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{6\sqrt{3}}$$

$$D = \lim_{s\to -\sqrt{3}} \frac{\cancel{s+\sqrt{3}}}{s^2(s-\sqrt{3})(\cancel{s+\sqrt{3}})} = -\frac{1}{6\sqrt{3}}$$

$$X(s) = -\frac{1}{3}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{6\sqrt{3}}\frac{1}{s-\sqrt{3}} - \frac{1}{6\sqrt{3}}\frac{1}{s+\sqrt{3}}$$

$$x(t) = \left(-\frac{1}{3}t + \frac{1}{6\sqrt{3}} e^{\sqrt{3}t} - \frac{1}{6\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}t}\right) u(t).$$

$$Y = \frac{s+2}{s^2(s^2-3)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{s} - \frac{2}{3}\frac{1}{s^2} + \frac{2+\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}\frac{1}{s-\sqrt{3}} - \frac{2-\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}\frac{1}{s+\sqrt{3}}$$

$$y(t) = \left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}t + \frac{2+\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} e^{\sqrt{3}t} - \frac{2-\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}t}\right) u(t).$$