APPUNTI DI ANALISI MATEMATICA II

Gino Tironi (Trieste)

Stesura del 7 marzo, 2008.

Indice

Capitolo 1

LE SERIE

1.1 Introduzione storica

I matematici del seicento e del settecento si dedicarono con passione ai calcoli con processi infiniti. Tuttavia, poiché ancora non era stato elaborato con precisione il concetto di limite, spesso ottennero risultati discutibili, con giustificazioni fantasiose e spesso poco convincenti.

Tutto questo si può riconoscere nella trattazione delle serie. Un'attenzione particolare ebbe all'inizio del settecento la sommazione della serie infinita

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Per risolvere il problema della somma di questa serie, il monaco camaldolese Guido Grandi, nel 1703, fece ricorso alla considerazione della serie, che si dice *geometrica*,

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad , \tag{1.1}$$

e che ha come somma $\dfrac{1}{1-x}$(ma, come vedremo, se e solo se $|x| < 1$). Sostituendo $x = -1$, egli ne ricavò l'uguaglianza

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}. \tag{1.2}$$

Sette anni più tardi in uno scritto dedicato al "Deo veritatis, luminum patri, scientiarum domino, geometriae praesidi" (cioè al "Dio della verità, padre della luce, signore delle scienze, presidio della geometria"), egli tornò sull'argomento, proponendo una giustificazione giuridica della conclusione, con l'esempio di due fratelli che avevano ottenuto in eredità, con la proibizione di venderla, una preziosissima pietra. Decisero di custodirla un anno nel museo dell' uno, un anno in quello dell'altro. Concludeva Grandi che, mediamente ognuno dei fratelli aveva il possesso di metà della pietra. Partendo dalla formula precedente e associando i temini a due a due, Grandi ottenne poi la seguente formula

$$0 + 0 + 0 + 0 + \ldots = \frac{1}{2},$$

alla quale affidò il compito di dare la spiegazione dell'origine del mondo.

Le deduzioni di Grandi diedero luogo ad una vivace polemica scientifica nella quale intervennero anche Leibniz, Wolff e Varignon. Nel 1713 Leibniz espose il suo rifiuto ad accettare la giustificazione giuridica di Grandi, ma affermò che il risultato era assolutamente certo, anche se lo giustificò in termini probabilistici. Se la somma dei termini della serie $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ si arresta ad un termine di posto pari, il risultato è 0, se si arresta ad un termine di posto dispari si ottiene 1. Il calcolo delle probabilità insegna a prendere come valore di una grandezza che può assumere due valori diversi, ma equiprobabili, la media degli stessi. Ora ci sono tanti numeri pari quanti numeri dispari. Perciò il valore della somma doveva essere $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.

Alcuni anni più tardi (1745) Eulero, appoggiandosi all'autorità di Leibniz, e in accordo con i contemporanei Goldbach e Daniel Bernoulli, si disse convinto che ogni serie infinita dovesse avere una somma ben determinata e che il suo valore dovesse essere quello dell'espressione analitica della quale la serie costituiva lo sviluppo. L'idea di Eulero costituì spesso per lui l'ispirazione verso scoperte mirabili (come per esempio la rappresentazione come prodotto infinito della funzione $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ e la sommazione di serie del tipo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, $k \geq 2$), ma in alcuni casi egli stesso ne dubitò, cercando negli anni successivi una giustificazione più convincente delle sue scoperte. Nelle mani di matematici meno esperti condusse talvolta a conclusioni fantasiose e inattendibili, come meglio vedremo nel seguito e come si può apprezzare considerando la seguente espressione:

$$\frac{1+x}{1+x+x^2} = \frac{1-x^2}{1-x^3} = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^8 + \ldots$$

(Naturalmente, la prima uguaglianza vale se $x \neq 1$, la seconda se $|x| < 1$). Sostituendo $x = 1$, si trova

$$\frac{2}{3} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

cioè una somma diversa per la serie di Grandi.

"Paradossi" come questi e anche più riposti e quindi più pericolosi, si ripeterono negli anni a venire, fino a che non venne sistemata e precisata la nozione di limite ad opera soprattutto di Bolzano, di Cauchy e di Weierstrass.

1.2 Definizioni e primi esempi

Esporremo, per cominciare, il modo piú usuale d'intendere la somma di una serie di numeri reali. Sia dunque

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+} = (a_n : n \in \mathbb{N}^+) = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \tag{1.3}$$

una successione di numeri reali. Talvolta potrà essere utile che la successione abbia gli indici in $\mathbb{N}$, cioè che gli indici corrano a partire dallo 0. Si noti anche che terremo distinta la nozione di successione, cioè di applicazione da $\mathbb{N}$ o da $\mathbb{N}^+$ in $\mathbb{R}$, denotata da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$, da quella di insieme immagine della successione, cioè dell'insieme dei valori assunti dalla successione, denotata da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ o da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} = \{a_n : n \in \mathbb{N}^+\}$.

Definizione 1.2.1. *Diremo* serie *di* termini $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, *denotata con la scrittura*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \tag{1.4}$$

il problema di determinare se la successione delle somme parziali *o* ridotte

$$\begin{array}{rcl} s_1 & = & a_1, \\ s_2 & = & a_1 + a_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{2} a_k, \\ \ldots & & \ldots \\ s_n & = & a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k, \\ \ldots & & \ldots \end{array} \tag{1.5}$$

ha limite oppure no per n che tende a $+\infty$. Usando un linguaggio piú spiccatamente insiemistico, si può dire che una serie è la coppia di successioni $((a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}^+})$.

Dunque a_n si dirà il *termine generale della serie* (1.4) ed s_n sarà detta la *ridotta n-esima* della (1.4). Il problema da risolvere è stabilire se esiste ed eventualmente quanto vale il

$$\lim_{n\to+\infty} s_n\,. \tag{1.6}$$

Un esempio di serie convergente, che ci è molto famigliare, è quello implicitamente contenuto nella convenzione di scrittura decimale dei numeri reali. Quando diciamo che il numero reale (supposto > 0 per semplicità)

$$\alpha = m, c_1c_2c_3\ldots c_k\ldots$$

intendiamo dire che

$$\alpha = m + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100} + \cdots + \frac{c_k}{10^k} + \cdots.$$

Dunque α si può ottenere come somma di una serie infinita che naturalmente risulta convergente, anche se non pensiamo esplicitamente ad un numero reale scritto in forma decimale come alla somma di una serie.

Facciamo vedere, con semplici esempi, come ogni situazione possa prodursi. Cioè che il limite della successione delle ridotte può essere *finito* (ossia un numero $s \in \mathbb{R}$), *infinito* $(+\infty, -\infty, \infty)$ o *può non esistere*.

Esempio 1.2.1. *Consideriamo la serie*

$$a + a + a + \cdots + a + \dots . \tag{1.7}$$

Evidentemente, la ridotta n-esima vale $s_n = n \cdot a$. Perciò, se $a = 0$, la serie converge banalmente, con somma $s = 0$. Se $a \neq 0$, si ha che $s_n \to +\infty$ se $a > 0$, mentre $s_n \to -\infty$ se $a < 0$. Nei tre casi considerati la serie risulta banalmente convergente a 0 o divergente, rispettivamente, a $+\infty$ o a $-\infty$. $\square$

Esempio 1.2.2. *Consideriamo la serie*

$$a - a + a - \cdots + (-1)^{n-1}a + \dots \ (a \neq 0). \tag{1.8}$$

Per le ridotte di posto pari si ha $s_{2n} = 0, n \in \mathbb{N}^+$; per quelle di posto dispari vale $s_{2n-1} = a$, $n \in \mathbb{N}^+$. Dunque $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ non ha limite per $n \to +\infty$. La serie è *indeterminata*. $\square$

Esempio 1.2.3. *Consideriamo la serie*

$$1 - 2 + 3 - \cdots + (2n-1) - 2n + \dots . \tag{1.9}$$

È facile riconoscere che $s_{2k} = -k$, mentre $s_{2k-1} = k, k = 1, 2, 3, \dots$. Perciò il $\lim s_n = \infty$ e non si può affermare né che il limite sia $+\infty$ né che sia $-\infty$. $\square$

Abbiamo dunque dato esempi di serie convergenti, divergenti a $+\infty$, a $-\infty$ a ∞ e di serie indeterminate.

Per concludere questo primo accenno alle serie, consideriamo una nozione ulteriore

Definizione 1.2.2. *Data una serie*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \tag{1.10}$$

diremo resto n-esimo *di (1.10) la serie che contiene tutti i termini da quello di posto $(n+1)$ in poi della serie data. Cioè*

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n+k} \,. \tag{1.11}$$

Il seguente teorema racchiude i primi fatti sulle serie

Teorema 1.2.1. *Sia data la serie*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \,. \tag{1.12}$$

(1) Se (1.12) è convergente, allora il termine generale a_n è infinitesimo.

(2) Ogni resto di (1.12) ha lo stesso carattere *di essa. Ossia converge se la (1.12) converge, diverge se essa è divergente, è indeterminato se la serie di partenza lo è .*

(3) Se la (1.12) è convergente, la somma del resto n-esimo è infinitesima.

Dimostrazione:
(1) Osserviamo che se s_n è la ridotta n-esima di (1.12) allora si ha $s_n = s_{n-1}+a_n$. Perciò

$$a_n = s_n - s_{n-1} \,.$$

Poiché sia s_n che s_{n-1} hanno limite s per n che tende a $+\infty$, si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0 \,.$$

(2) Se indichiamo con $r_k^{(n)}$ la ridotta k-esima del resto n-esimo, cioè $r_k^{(n)} = a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}$, allora vale

$$r_k^{(n)} = s_{n+k} - s_n \,.$$

Se consideriamo il limite per $k \to +\infty$ di $r_k^{(n)}$, tale limite è finito se e solo se s_{n+k} ha limite finito, è infinito se e solo se s_{n+k} ha limite infinito, è indeterminato se e solo se la successione s_{n+k} lo è . Ovviamente il limite

$$\lim_{k\to+\infty} s_{n+k} = \lim_{m\to+\infty} s_m \,.$$

(3) La somma del resto n-esimo di una serie convergente è

$$r^{(n)} = \lim_{k\to+\infty} r_k^{(n)} = \lim_{k\to+\infty} (s_{n+k} - s_n) = s - s_n \,,$$

se indichiamo con $s = \lim_{m\to+\infty} s_m$ la somma della serie. Poiché $r^{(n)} = s - s_n$, evidentemente

$$\lim_{n\to+\infty} r^{(n)} = \lim_{n\to+\infty} (s - s_n) = s - s = 0 \,. \square$$

Si noti che il precedente teorema (1.2.1) mette in evidenza che una serie convergente ha necessariamente termine generale infinitesimo e che ogni serie ha

lo stesso carattere di un suo resto qualsiasi. Perciò se a_n **non** tende a 0, non possiamo sperare che la serie converga; se riusciamo a dimostrare che un certo resto è convergente o divergente o indeterminato, la stessa conclusione vale per tutta la serie.
Prima di procedere con alcuni esempi particolarmente interessanti, conviene mettere in evidenza il seguente fatto

Teorema 1.2.2. [Aut-aut per le serie a termini positivi.] *Supponiamo che la serie*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \tag{1.13}$$

abbia termini positivi ($a_n > 0$) o almeno non negativi ($a_n \geq 0$). Allora essa converge o diverge. Cioè una serie a termini non negativi non può essere indeterminata.

Dimostrazione: Se $a_n \geq 0$, allora la successione delle ridotte è non decrescente: $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$. Per il teorema sul limite delle successioni monotone essa ha limite ed è

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}^+\}\,.$$

Se la successione delle ridotte è superiormente limitata $\sup\{s_n\} < +\infty$ e dunque la serie è convergente. Se invece la successione delle ridotte è illimitata, la serie diverge. In ogni caso non può essere indeterminata. $\square$

1.3 Tre serie notevoli

Consideriamo i seguenti tre tipi notevoli di serie

1.3.1 La serie geometrica

Si tratta della serie

$$a + a\cdot k + a\cdot k^2 + \cdots + a\cdot k^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a\cdot k^{n-1}\,. \tag{1.14}$$

La ridotta n-esima della serie geometrica è data da

$$s_n = a + a\cdot k + a\cdot k^2 + \cdots + a\cdot k^{n-1} = a\frac{1-k^n}{1-k}\,.$$

Infatti si riconosce facilmente che $(1-k)\cdot(1+k+k^2+\cdots+k^{n-1}) = 1-k+k-k^2+k^2-k^3+\cdots+k^{n-1}-k^n = 1-k^n$, grazie al comportamento "telescopico della somma, nella quale accanto ad un termine con il segno - segue immediatamente lo stesso con il +, fatta esclusione per il primo e per l'ultimo termine. Ora, se

$|k| < 1$ si ha che $k^n \to 0$ per $n \to +\infty$ e dunque la serie geometrica converge con somma
$$s = a \cdot \frac{1}{1-k}\,.$$
Se $k = 1$, si vede direttamente che $s_n = n \cdot a$ e quindi la serie diverge, come già si è osservato nell'esempio (1.2.1). Se $k > 1$, $s_n = a \cdot \dfrac{k^n - 1}{k-1}$ e quindi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ o $-\infty$ a seconda del segno di a. Se $k = -1$, $s_n = a \cdot \dfrac{1-(-1)^{n-1}}{2}$ e quindi la serie è indeterminata, come si è visto nell'esempio (1.2.2). Infine, se $k < -1$, $s_n = a \cdot \dfrac{k^n - 1}{k-1}$ diverge a ∞ senza segno. $\square$

1.3.2 La serie di Mengoli

È la serie di termine generale
$$a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)}\,. \tag{1.15}$$
Si vede facilmente che $\dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Per valutare la ridotta n-esima si può utilizzare il comportamento "telescopico
$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}\,.$$
Perciò vale $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(1 - \dfrac{1}{n+1}) = 1$. La serie di Mengoli converge ed ha somma $s = 1$. $\square$

1.3.3 La serie armonica

Si tratta della serie dei reciproci dei numeri naturali da 1 in poi.
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \tag{1.16}$$
Mostreremo che questa serie diverge. Diciamo $h_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n}$ la ridotta n-esima di questa serie, e consideriamo la seguente successione:
$$\begin{array}{rcl} h_2 & = & 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ h_4 & = & h_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > h_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2\cdot\frac{1}{2} \\ \dots & = & \dots \\ h_{2^k} & = & h_{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k} > 1 + (k-1)\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + k\cdot\frac{1}{2}\,. \end{array}$$

Qui si è tenuto conto del principio d'induzione per $n \geq 2$ e precisamente che: (a) $h_4 = h_{2^2} > 1 + 2 \cdot \dfrac{1}{2}$; (b) per l'ipotesi induttiva, $h_{2^{k-1}} > 1 + (k-1) \cdot \dfrac{1}{2}$; (c) $\dfrac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \dfrac{1}{2^k} \geq 2^{(k-1)} \cdot \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1}{2}$. Ora, poiché $h_n > 1 + n \cdot \frac{1}{2}$ evidentemente (per il teorema del confronto dei limiti) vale

$$\lim_{n \to +\infty} h_{2^n} = +\infty\,.$$

Ma (h_{2^n}) è una sottosuccessione della successione (h_m), che per il teorema dell'aut-aut (1.2.2) non può essere indeterminata. Se una sottosuccessione è divergente e la successione ha limite, tutta la successione deve essere divergente: $\lim_{n \to +\infty} h_n = +\infty$. □

1.4 Alcune operazioni sulle serie

Vogliamo qui occuparci di alcune operazioni algebriche semplici sulle serie: la *somma* di due serie e il *prodotto di una costante per una serie*. Altre operazioni verranno considerate nel seguito.

Definizione 1.4.1. [Somma di due serie]. *Date due serie*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots \tag{1.17}$$

e

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \ldots\,, \tag{1.18}$$

la serie

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) + \ldots \tag{1.19}$$

si dice la serie somma di (1.17) e di (1.18).

Il seguente risultato è immediato, se si considerano i teoremi sui limiti

Teorema 1.4.1. *Se le serie (1.17) e (1.18) sono convergenti ed hanno somma, rispettivamente, A e B, allora la serie (1.19) è convergente ed ha somma $A+B$. Se una delle due diverge e l'altra converge o se entrambe divergono a $+\infty$ o a $-\infty$, allora la serie somma diverge anch'essa. Se infine una serie diverge a $+\infty$ e l'altra a $-\infty$ o entrambe divergono a ∞, nulla si può dire in generale.*

Dimostrazione Se indichiamo con s_n la ridotta n-esima di (1.19), con A_n quella di (1.17) e con B_n quella di (1.18), allora è

$$s_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = A_n + B_n\,.$$

Allora il teorema sul limite della somma ci fornisce immediatamente quanto sopra enunciato. □
Analogamente abbiamo

Definizione 1.4.2. [Serie prodotto di una costante per una serie]. *Data una costante $k \neq 0$ e una serie*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots ,$$

diremo serie prodotto per k, la serie

$$k \cdot a_1 + k \cdot a_2 + \cdots + k \cdot a_n + \ldots .$$

È ovvio il seguente

Teorema 1.4.2. *Una serie e la serie prodotto di essa per una costante $k \neq 0$ hanno lo stesso carattere.*

□

1.5 Serie a termini positivi

Ci occuperemo ora delle serie a termini positivi, per le quali possono essere stabiliti alcuni utili criteri di convergenza. È chiaro che, quanto si dice per le serie a termini positivi si può estendere alle serie che hanno tutti i termini negativi, con ovvie modifiche. Piú in generale, a quelle serie che hanno un resto con i termini di segno costante. Già sappiamo che le serie a termini positivi non possono essere indeterminate (convergono o divergono) (1.2.2). Diamo ora la seguente

Definizione 1.5.1. *Date due serie*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots , \tag{1.20}$$

e

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \ldots , \tag{1.21}$$

a termini positivi, diremo che la serie (1.20) è una maggiorante *della serie (1.21) se per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ vale $a_n \geq b_n$. La (1.21) si dice anche una* minorante *della (1.20).*

Vale allora il seguente

Teorema 1.5.1. [Criterio del confronto - di Gauss]. *Date due serie a termini positivi come sopra, se la maggiorante converge, converge la minorante. Se diverge la minorante, diverge anche la maggiorante.*

Dimostrazione: Diciamo A_n la ridotta n-esima della serie maggiorante

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots ,$$

e B_n la ridotta n-esima della serie

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \ldots .$$

Poiché $b_n \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}^+$, avremo pure $B_n \leq A_n$; inoltre le due successioni $(A_n)_n$ e $(B_n)_n$ sono non decrescenti, essendo $b_n \geq 0$ (e quindi a maggior ragione anche $a_n \geq 0$). Ora se la maggiorante converge, il $\lim_{n\to+\infty} A_n = A = \sup\{A_n : n \in \mathbb{N}^+\}$, per il teorema sul limite delle successioni (funzioni) monotóne. La successione $(B_n)_n$ risulta allora maggiorata da A: $B_n(\leq A_n) \leq A, \forall n \in \mathbb{N}^+$. Essendo essa stessa non decrescente è convergente e il suo limite è $B = \sup\{B_n : n \in \mathbb{N}^+\} \leq A$.
Se invece la minorante è divergente, $\lim_{n\to+\infty} B_n = +\infty = \sup\{B_n : n \in \mathbb{N}^+\}$. Ma allora, a maggior ragione, $\lim_{n\to+\infty} A_n = +\infty$. □

Esempio 1.5.1. *Si dimostri che è convergente la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Sappiamo che la serie di Mengoli è convergente: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Ora non vale $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$, però $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$. Cioè il primo resto della serie dei reciproci dei quadrati è una minorante della serie di Mengoli:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots ,$$

è una minorante di

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \ldots .$$

Per il criterio di confronto quel resto converge con somma < 1. Dunque anche la serie considerata converge ed ha somma strettamente compresa tra 1 e 2. □

Teorema 1.5.2. [Criterio del rapporto - di D'Alembert]. *Sia data una serie con termini tutti strettamente positivi:* $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^+$. *Se esiste* $0 < k < 1$ *tale che*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k(< 1)\,,\ \forall n \in \mathbb{N}^+\,,$$

allora la serie converge.

Dimostrazione: Dimostriamo per induzione che, se vale quanto si dice in ipotesi, allora, per ogni $n \geq 1$ vale $a_n \leq k^{n-1} \cdot a_1$. Infatti per $n = 1$ la proposizione è (banalmente) vera e non si fa fatica a verificarla per $n = 2$. Supponiamola vera per n e facciamo vedere che allora vale anche per $n + 1$.

Per ipotesi $a_{n+1} \leq k \cdot a_n$ e, per l'ipotesi induttiva, $a_n \leq k^{n-1} \cdot a_1$. Allora $a_{n+1} \leq k \cdot k^{n-1} \cdot a_1 = k^n \cdot a_1$. Ma allora la serie geometrica

$$a_1 + k \cdot a_1 + \cdots + k^{n-1} \cdot a_1 + \ldots ,$$

è una maggiorante della serie data

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots .$$

Essendo $0 < k < 1$, la serie geometrica converge e dunque converge la serie data. $\square$

Corollario 1.5.3. *Se la serie*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots ,$$

con $a_n > 0$ per ogni n, è tale che esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, la serie è convergente se $\ell < 1$; è divergente se $\ell > 1$. Nulla si può dire se $\ell = 1$.

Dimostrazione: Si osservi che necessariamente $\ell \geq 0$, eventualmente infinito. Supponiamo ℓ finito. Dire che $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ significa che

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \text{ tale che } \forall n > n_0 \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell \right| < \varepsilon ,$$

ossia che

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \text{ tale che } \forall n > n_0 \text{ vale } \ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon .$$

Se $\ell < 1$ si può trovare $\varepsilon > 0$ in modo che $\ell + \varepsilon = k < 1$. Allora, per ogni $n > n_0$, è verificata la condizione $\frac{a_{n+1}}{a_n} < k (< 1)$. Dunque un resto della nostra serie converge e quindi la serie stessa converge. Se $\ell > 1$, si può trovare $\varepsilon > 0$ tale che $\ell - \varepsilon = k > 1$. Allora per ogni $m > 1$ si ha $a_{n_0+m} > k^m \cdot a_{n_0+1}$. Dunque il termine generale della serie diverge (oppure, se si preferisce, c'è una serie geometrica divergente che è minorante di un resto della serie data) e quindi la serie diverge. Infine se $\ell = 1$, può accadere sia che la serie converga sia che diverga. Infatti per la serie armonica, di termine generale $a_n = \frac{1}{n}$, si sa che essa diverge, e che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Sappiamo invece che la serie di termine generale $a_n = \frac{1}{n^2}$ è convergente e ancora $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$. Se poi $\ell = +\infty$, si possono ripetere le considerazioni del caso $\ell > 1$. $\square$

Teorema 1.5.4. [Criterio della radice - di Cauchy]. *Supponiamo che per una serie a termini $a_n \geq 0$ esista una costante $0 < k < 1$ tale che*

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad \sqrt[n]{a_n} \leq k < 1 .$$

Allora la serie converge.

Dimostrazione: Infatti l'ipotesi implica che $\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad a_n \le k^n$, con $0 < k < 1$. Poiché, in questo caso, la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} k^n$ converge, allora è convergente, per il criterio del confronto, anche la serie data. $\square$

Corollario 1.5.5. *Se per una serie a termini positivi esiste il*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell\,,$$

la serie è convergente se $\ell < 1$, divergente se $\ell > 1$, nulla si può dire, in generale, se $\ell = 1$.

Dimostrazione: Supponiamo ℓ finito. L'esistenza del limite significa che

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \text{ tale che } \forall n > n_0 \text{ vale } \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon\,.$$

Se ε è scelto in modo che $\ell + \varepsilon = k < 1$, allora, per $n > n_0$, $a_n < k^n$. Il resto n_0-esimo della serie è maggiorato da una serie geometrica convergente e quindi è convergente assieme alla serie stessa. Se $\ell > 1$ allora, per $n > n_0$, $a_n > k^n$ (avendo preso $1 < k = \ell - \varepsilon$, come si è visto nella dimostrazione del Corollario precedente 1.5.3) e quindi il termine generale non può essere infinitesimo e la serie non può convergere. Infine, le serie già considerate, l'armonica e quella di termine generale $a_n = \frac{1}{n^2}$ danno esempi una di serie divergente, l'altra di serie convergente nei quali $\ell = 1$. Infatti $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ e anche $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$. Se poi $\ell = +\infty$, si possono ripetere le considerazioni del caso $\ell > 1$. $\square$

Esercizio 1.5.2. *Usando il criterio della radice, si dimostri che converge la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{n+1})^n$.

Esercizio 1.5.3. *Si dimostri che se una serie a termini positivi soddisfa il criterio del rapporto, allora soddisfa il criterio della radice.*

Osservazione 1.5.1. *Si osservi che la serie*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots$$

soddisfa il criterio della radice, ma non quello del rapporto.

Infatti questa serie si ottiene da una successione (a_n) dove $a_{2n-1} = \dfrac{1}{2^n}$ e $a_{2n} = \dfrac{1}{3^n}$. Perciò $\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \dfrac{1}{2} \cdot (\dfrac{3}{2})^n$ che tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$ (e quindi non può essere maggiorata da una costante positiva $k < 1$) mentre $\dfrac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = (\dfrac{2}{3})^n$ che tende a 0 per $n \to +\infty$. Dunque, poiché la successione $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ non ha limite, anzi non è neppure è superiormente limitata da una costante positiva $k < 1$ (una sottosuccessione ha limite infinito, l'altra ha limite 0), il criterio del rapporto non si può applicare. Invece $(a_{2n})^{\frac{1}{2n}} = (\frac{1}{3^n})^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, mentre $(a_{2n-1})^{\frac{1}{2n-1}} = (\frac{1}{2^n})^{\frac{1}{2n-1}}$. Si trova, abbastanza facilmente, che vale $\frac{1}{2} \leq (\frac{1}{2^n})^{\frac{1}{2n-1}} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Dunque $\sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ e quindi, per il criterio della radice, la serie converge.

Esempio 1.5.4. *Si dimostri che la serie*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots$$

diverge.

Basterà considerare la sottosuccessione delle ridotte di posto 1, 1+2 = 3, 1+2+3 = 6, ..., $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, ..., per accorgersi che $s_{\frac{n(n+1)}{2}} = n$. Questa sottosuccessione è divergente e la serie è a termini positivi. Dunque è essa stessa divergente.

1.5.1 Convergenza di serie e convergenza di integrali impropri o generalizzati

Sia data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad .$$

Definiamo come segue una funzione $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$;

$$f(x) = a_n \quad \text{se} \quad n \leq x < n + 1 \quad . \tag{1.22}$$

Abbiamo in proposito il seguente

Teorema 1.5.6. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge se e solo se converge l'integrale improprio o generalizzato

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx \quad .$$

Dimostrazione: Supponiamo che la serie converga. Allora, come sappiamo, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. La funzione $f(x)$ è localmente integrabile, poiché su ogni intervallo limitato ha solo un numero finito di punti di discontinuità. Vale inoltre

$$\int_1^b f(x)\,dx = \int_1^{[b]} f(x)\,dx + \int_{[b]}^b f(x)\,dx \quad .$$

Se indichiamo $[b] = n$, si trova

$$\begin{aligned}\int_1^b f(x)\,dx &= \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \cdots + \int_n^b f(x)\,dx \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + \int_n^b f(x)\,dx \quad .\end{aligned}$$

Ma $\displaystyle\int_n^b f(x)\,dx = a_n(b-n)$ e quindi

$$\int_1^b f(x)\,dx = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n(b-n) = s_{n-1} + a_n(b-n) \quad .$$

Poiché quando $b \to +\infty$ anche la parte intera di b ($n = [b]$) tende a $+\infty$, s_{n-1} tende alla somma s, a_n tende a 0 e $0 \leq (b-n) < 1$, si conclude che

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\,dx = s \quad ,$$

dunque l'integrale improprio converge.
Se poi l'integrale improprio converge, in particolare, si ha che esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} f(x)\,dxdx.$$

Poiché $s_n = \int_1^{n+1} f(x)\,dx$ si conclude che

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \int_1^{+\infty} f(x)\,dxdx.$$

Dunque la serie converge. In ogni caso il valore della somma della serie e quello dell'integrale generalizzato della funzione $f(x)$ definita da (1.22), sono uguali, quando uno dei due esiste (e quindi esiste l'altro).
Poiché $s_n = \int_1^{n+1} f(x)\,dx$, se la serie converge anche la serie resto n-esimo converge e la sua somma è data da

$$r^{(n)} = \int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dxdx.$$

Se è nota qualche caratteristica in piú della successione dei termini della serie e di una funzione ad essa collegata, si può affermare qualcosa in piú rispetto a quanto sopra e, in particolare si può dare una valutazione della somma della serie.

Teorema 1.5.7. *Sia data una funzione non decrescente sull'intervallo illimitato* $[1, +\infty[$*; supponiamo inoltre* $f(x) \geq 0$ *per ogni* $1 \leq x$*. Allora la serie*

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \dots,$$

e l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *hanno lo stesso carattere, cioè convergono o divergono contemporaneamente.*

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo, per iniziare, che $f(x)$ essendo monotòna è integrabile su ogni intervallo limitato. Dunque è localmente integrabile su $[1, +\infty[$. Per la non crescenza di f, su ogni intervallo del tipo $[k, k+1]$, per $k = 1, 2, \dots, n-1$, vale $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$. Integrando tra k e $k+1$, si trova

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k) \quad .$$

Sommando questi contributi per $k = 1, 2, \dots, n-1$, si trova

$$f(2) + f(3) + \dots f(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx =$$

$$= \int_1^n f(x)\,dx \leq f(1) + f(2) + \dots f(n-1) \quad .$$

Cioè

$$s_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq s_{n-1} \quad . \tag{1.23}$$

Qui $s_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$. Supponiamo ora che l'integrale sia convergente, e quindi che che esista finito, in particolare,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Allora, per la non decrescenza della successione (s_n) e per il fatto che è superiormente limitata da $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$, esiste finito il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$. Cioè , la serie converge. Se poi l'integrale diverge, allora $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{n-1} = +\infty$ e dunque anche la serie diverge. Si noti che, per le due disuguaglianze (1.23), nel caso della convergenza, la somma della serie s è compresa tra $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx + f(1)$:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq s \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx + f(1)\,.$$

In maniera del tutto analoga, per la somma del resto n-esimo si trova

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq r^{(n)} \leq \int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx + f(n+1)\,.$$

□

Esempio 1.5.5. *Si studi la convergenza della serie* armonica generalizzata

$$1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \cdots + \frac{1}{n^r} + \ldots . \tag{1.24}$$

Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^r}$. Essa è decrescente se $r > 0$. Inoltre l'integrale è convergente se e solo se $r > 1$. In questo caso vale poi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\, dx = \frac{1}{r-1}$. Allora, per quanto appena visto, possiamo concludere che la serie armonica generalizzata converge se e solo se $r > 1$. Inoltre per la sua somma $s(r)$ si ha $\dfrac{1}{r-1} < s(r) < \dfrac{1}{r-1} + 1 = \dfrac{r}{r-1}$.
Se, in particolare, consideriamo il caso $r = 1$, concludiamo, come già è noto, che che la serie armonica diverge. Non è difficile, usando la disuguaglianza (1.23) valutare che, per la ridotta n-esima della serie armonica vale

$$\log(n+1) < h_n < (\log n) + 1 .$$

Dunque h_n tende all'infinito, ma lentamente, come il logaritmo naturale di n. Per esempio, se vogliamo essere certi che $h_n > 6$ dobbiamo prendere $n > e^6 \approx 403,4$. Cioè 404 termini della serie geometrica! □

Esempio 1.5.6. *Si studi la convergenza della serie*

$$\frac{1}{2\cdot(\log 2)^r} + \frac{1}{3\cdot(\log 3)^r} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(\log n)^r} + \cdots = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot(\log n)^r} . \tag{1.25}$$

Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x\cdot(\log x)^r}$ per $x \geq 2$. (Si noti che non si può considerare $x \geq 1$. Infatti $\log(1) = 0$.) Se $r \neq 1$

$$\int_2^n \frac{dx}{x\cdot(\log x)^r} = \frac{1}{-r+1}(\log x)^{-r+1}\Big|_{x=2}^{x=n} = \frac{1}{-r+1}(\log n)^{-r+1} - \frac{1}{-r+1}(\log 2)^{-r+1} .$$

Se $r = 1$

$$\int_2^n \frac{dx}{x\cdot(\log x)} = (\log(\log x))\Big|_{x=2}^{x=n} = \log((\log n)) - \log((\log 2)) .$$

È facile riconoscere che l'integrale converge e vale

$$\frac{1}{(r-1)\cdot(\log 2)^{r-1}} ,$$

se $r > 1$, mentre diverge se $r \leq 1$. Allora la serie converge se e solo se $r > 1$. □

1.5.2 Convergenza e ordine d'infinitesimo

Teorema 1.5.8. [Convergenza e ordine d'infinitesimo.] *Siano* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *serie a termini* $a_n, b_n \geq 0$. *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge e* $\mathrm{ord}_{+\infty} b_n \geq \mathrm{ord}_{+\infty} a_n$ *allora anche* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *converge.*

Dimostrazione: Dire che $\mathrm{ord}_{+\infty} b_n = \mathrm{ord}_{+\infty} a_n$ significa dire che esistono costanti $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ e un numero naturale n_0 tali che per ogni $n > n_0$ valga

$$0 < \lambda_1 < \frac{b_n}{a_n} < \lambda_2 \,.$$

Infatti, secondo la definizione di uguaglianza degli ordini d'infinitesimo, si ha che $\mathrm{ord}_{+\infty} b_n = \mathrm{ord}_{+\infty} a_n$ significa che $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \ell > 0$ e quindi che, dato $\varepsilon > 0$ esiste n_0 tale che per ogni $n > n_0$ si ha

$$0 < \ell - \varepsilon < \frac{b_n}{a_n} < \ell + \varepsilon \,.$$

Se $\lambda_1 = \ell - \varepsilon$ e $\lambda_2 = \ell + \varepsilon$ si trova la precedente disuguaglianza (basterà prendere $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, per esempio).

Dire che $\mathrm{ord}_{+\infty} b_n > \mathrm{ord}_{+\infty} a_n$ significa dire che $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$, il che significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}^+$ tale che $\forall n > n_0$

$$0 < \frac{b_n}{a_n} < \varepsilon \,.$$

In particolare potremmo prendere $\varepsilon = 1$. Potremo conglobare le due situazioni dicendo che se $\mathrm{ord}_{+\infty} b_n \geq \mathrm{ord}_{+\infty} a_n$ allora esistono una costante $K > 0$ e un numero $n^\star$ tali che se $n > n^\star$

$$\frac{b_n}{a_n} \leq K \quad ,$$

cioè

$$b_n \leq K \cdot a_n \quad .$$

Ma allora, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ha un resto maggiorato dal corrispondente resto della serie $K \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, che è convergente. Dunque anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è convergente.
□

Osservazione 1.5.2. *Si noti che se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge e* $\mathrm{ord}_{+\infty} b_n \leq \mathrm{ord}_{+\infty} a_n$ *allora anche* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverge (naturalmente nell'ipotesi* $a_n \geq 0$ *e* $b_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^+$*).*

Infatti, se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ fosse convergente, per il teorema precedente, anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergerebbe, contro l'ipotesi.

Raccogliendo i frutti dei due teoremi precedenti (1.5.7) e (1.5.8), si può concludere con il seguente criterio

Teorema 1.5.9. [Convergenza e $\mathrm{ord}_{+\infty} a_n$.] *Sia* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *una serie avente termini* $a_n \geq 0$*. Se* $\mathrm{ord}_{+\infty} a_n \geq r > 1$ *la serie converge; se* $\mathrm{ord}_{+\infty} a_n \leq 1$*, la serie diverge.*

DIMOSTRAZIONE: Se $\mathrm{ord}_{+\infty} a_n \geq r > 1$, allora $\mathrm{ord}_{+\infty} a_n \geq \mathrm{ord}_{+\infty} \frac{1}{n^r}$, con $r > 1$. Ma poiché la serie armonica generalizzata converge per $r > 1$ (si veda (1.24)), si può trarre la conclusione che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. Se $\mathrm{ord}_{+\infty} a_n \leq 1$, il confronto con la serie armonica mostra che la serie data diverge. $\square$

Esempio 1.5.7. *Si valuti la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n}\right).$$

SVOLGIMENTO: Osserviamo preliminarmente che la serie è a termini positvi. Conviene valutare l'ordine d'infinitesimo del termine generale. Per fare ciò osserviamo che, posto $\varphi(x) = x - \log(1 + x)$ (abbiamo operato la sostituzione $x = \frac{1}{n}$), vale

$$\mathrm{ord}_{+\infty} a_n = \mathrm{ord}_{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n}\right) = \mathrm{ord}_0 \varphi(x).$$

Ora l'ordine d'infinitesimo in $x_0 = 0$ della funzione $\varphi(x)$ si può calcolare, per esempio, in base al lemma di Peano, valutando la prima derivata in 0 che è non nulla. Si trova $\varphi(0) = 0$; $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{1}{1 + x}$ e quindi $\varphi'(0) = 0$; $\varphi''(x) = +\dfrac{1}{(1 + x)^2}$ e $\varphi''(0) = 1$. Dunque $\mathrm{ord}_0 \varphi(x) = 2$. Essendo dunque $\mathrm{ord}_{+\infty} a_n = 2 > 1$, la serie data converge. La somma di questa serie è un numero che solitamente si indica con $\gamma = 0,577215664901532..$, detto costante di Eulero -

Mascheroni, che tuttora non si sa se sia un numero razionale oppure no. La ridotta n-esima della serie è

$$s_n = (1 - \log\frac{2}{1}) + (\frac{1}{2} - \log\frac{3}{2}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}) =$$
$$= 1 - \log(2) + \frac{1}{2} - \log(3) + \log(2) + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1) + \log(n) =$$
$$= (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) - \log(n+1) = h_n - \log(n+1)\,.$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty} s_n = \gamma$, vale $s_n = h_n - \log(n+1) = \gamma + \beta(n)$, con $\beta(n) \to 0$, per $n \to +\infty$. Si legge anche da questa uguaglianza che

$$h_n = \log(n+1) + \gamma + \beta(n) \tag{1.26}$$

diverge lentamente come $\log(n)$ per $n \to +\infty$. $\square$

1.6 Serie a termini misti

Si tratta di serie con termini di segno arbitrario nelle quali compaiono infiniti termini positivi e infiniti termini negativi.

Definizione 1.6.1. *Data la serie a termini misti*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,, \tag{1.27}$$

diremo che essa converge assolutamente *se converge la serie a termini positivi dei valori assoluti*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|\,. \tag{1.28}$$

Data la serie (1.27) diremo termini *positivi* della stessa i termini dati da $p_n = a_n$ se $a_n > 0$ e da $p_n = 0$ se $a_n \leq 0$. Diremo termini *negativi* della (1.27) i termini $q_n = 0$ se $a_n \geq 0$ e $q_n = -a_n$ se $a_n < 0$. È chiaro dalla definizione che per ogni $n \geq 1$ abbiamo $a_n = p_n - q_n$; $|a_n| = p_n + q_n$.
Converrà considerare oltre alla (1.27) le serie dei termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n\,, \tag{1.29}$$

e quella degli opposti dei termini negativi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q_n\,. \tag{1.30}$$

Abbiamo allora il seguente

Teorema 1.6.1. [Riemann - Dini]. *La serie (1.27) converge assolutamente, cioè converge (1.28), se e solo se convergono le serie (1.29) e (1.30). In particolare, se converge (1.28) converge (1.27). Se una delle serie (1.29) o (1.30) divergono e l'altra converge la (1.27) diverge. Se le serie (1.29) e (1.30) divergono nulla può dirsi in generale sulla (1.27), però certamente la (1.28) diverge. Se la (1.27) converge ma la serie dei valori assoluti (1.28) diverge, si dice che la (1.27) converge* semplicemente.

Dimostrazione:
(1) Supponiamo che (1.27) converga assolutamente, cioè che converga (1.28). Poiché $p_n \leq |a_n|$ e $q_n \leq |a_n|$, allora sia la serie (1.29) sia la serie (1.30) convergono. Se poi convergono sia la serie (1.29) che la serie (1.30) allora convergono sia la serie (1.28) che la serie (1.27). Infatti se s_n è la ridotta n-esima di (1.27) e $\overline{s}_n$ è quella di (1.28), abbiamo

$$s_n = P_n - Q_n \,, \tag{1.31}$$

$$\overline{s}_n = P_n + Q_n \,, \tag{1.32}$$

dove $P_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ e $Q_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$. Allora se $P_n \to p$ e $Q_n \to q$ per $n \to +\infty$, abbiamo che $s_n \to s = p - q$ e $\overline{s}_n \to \overline{s} = p + q$.
(2) Se (1.29) diverge e (1.30) converge, allora dalla relazione (1.31) si vede che $s_n \to +\infty$. Se (1.29) converge e (1.30) diverge, allora, analogamente $s_n \to -\infty$.
(3) Infine se divergono sia la serie dei termini positivi che quella dei termini negativi, la serie dei valori assoluti diverge, come si riconosce immediatamente dalla (1.32). Ma come vedremo la serie (1.27) potrà anche essere convergente. Già sappiamo, si veda l'esempio (1.9), che la serie può divergere a ∞ senza segno. Ci sono anche esempi di serie che divergono a $+\infty$ e a $-\infty$, come verrà precisato più avanti parlando delle permutazioni di una serie. $\square$

1.6.1 Serie a termini di segno alternato

Sono serie del tipo

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots \; (a_n > 0)\,. \tag{1.33}$$

Vale in proposito il seguente

Teorema 1.6.2. [Criterio di Leibniz]. *Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ una successione di termini positivi, decrescenti e con $a_n \to 0$. Allora la serie (1.33) converge.*

Dimostrazione: Abbiamo infatti

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1, \\
s_2 &= a_1 - a_2, \\
s_3 &= a_1 - a_2 + a_3 = a_1 - (a_2 - a_3), \\
s_4 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4), \ldots
\end{aligned}$$

Si noti che i termini raccolti in parentesi sono tutti positivi per la decrescenza di (a_n). Dunque avremo $s_2 < s_1$ e poi $s_2 < s_4 < s_3 < s_1$. In generale

$$s_2 < s_4 < \cdots < s_{2n} < s_{2n-1} < \cdots < s_3 < s_1 \,.$$

Infatti $s_{2n} = a_1 - a_2 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} < s_{2n-1} = a_1 - a_2 + \cdots + a_{2n-1}$. Nello stesso tempo però $s_{2n} = (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) + (a_{2n-1} - a_{2n}) > s_{2n-2}$. In definitiva la successione delle ridotte pari è crescente, quella delle ridotte dispari è decrescente; le ridotte pari sono tutte maggiorate dalle ridotte dispari. Per il teorema sulle successioni monotone esistono finiti i limiti di s_{2n} e di s_{2n-1} per $n \to +\infty$ e sono rispettivamente $s' = \sup\{s_{2n} \colon n \in \mathbb{N}^+\}$ e $s'' = \inf\{s_{2n-1} \colon n \in \mathbb{N}^+\}$. Ma $s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n}$ che tende a zero per $n \to +\infty$. Allora $\lim\limits_{n\to+\infty}(s_{2n-1} - s_{2n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = 0 = s'' - s'$. Dunque $s' = s'' = s$ e quindi la serie è convergente. $\square$

Esempio 1.6.1. *La* serie di Leibniz

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots\,, \tag{1.34}$$

è convergente.

Infatti la successione $(\frac{1}{n})$ è decrescente e infinitesima per $n \to +\infty$. Si noti tuttavia che la serie dei termini positivi e quella dei termini negativi, come pure la serie dei valori assoluti (che è la serie armonica), sono divergenti. Dunque la serie di Leibniz è un esempio di serie *semplicemente e non assolutamente convergente.*

Possiamo dimostrare che la serie converge a $\log 2$, senza fare ricorso agli sviluppi in serie di Taylor, ai quali ci dedicheremo successivamente. Ricordando la valutazione della ridotta della serie armonica (1.26), possiamo scrivere per la ridotta di posto $2n$ della serie di Leibniz

$$\begin{aligned}
l_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}\cdot(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) = \\
&= h_{2n} - h_n = \log(2n+1) + \gamma + \beta(2n) - \log(n+1) - \gamma - \beta(n) = \\
&= \log 2 + \log(1 + \frac{1}{2n}) - \log(1 + \frac{1}{n}) + \beta(2n) - \beta(n)\,.
\end{aligned}$$

Si vede allora agevolmente che $\lim\limits_{n\to+\infty} l_{2n} = \log 2$. Infatti tutti gli altri addendi in l_{2n} tendono a zero quando n tende a $+\infty$. Inoltre $\lim\limits_{n\to+\infty} l_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}(l_{2n} + \frac{1}{2n+1}) = \log 2$. Finalmente si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = \log 2$.

1.6.2 Serie diluite e serie incastro

Sia data una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.35}$$

Una serie di termine generale (c_n) nella quale $c_n = a_k, (k \leq n)$ oppure $c_n = 0$ si dice una serie *diluita* della serie (1.35). Consideriamo la serie diluita della (1.35).

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \,. \tag{1.36}$$

Indichiamo con C_n la successione delle ridotte della (1.36). Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un solo $k \leq n$ tale che $C_n = A_k$, dove A_k indica la successione delle ridotte della (1.35). Se la serie (1.36) ha un certo carattere, allora anche la serie (1.35) ha lo stesso carattere e con la stessa somma se convergente o divergente, poiché (A_k) è una sottosuccessione di (C_n). Ma vale anche il viceversa, dal momento che per gli insiemi immagine vale $\{C_n : n \in \mathbb{N}\} = \{A_k : k \in \mathbb{N}\}$. Infatti se per un assegnato $n \in \mathbb{N}$, $c_n \neq 0$ mentre $c_q = 0$ per $n < q \leq m-1$ e k_n è tale che $A_{k_n} = C_n$, allora avremo $C_q = A_{k_n}$ per $n \leq q \leq m-1$, mentre $C_m = A_{k_n+1}$. Dunque la successione C_n percorrerà gli stessi valori della successione A_k, con dei tratti di lunghezza finita lungo i quali è costante. Se dunque A_k ha limite lo stesso limite ce l'ha C_n. Dunque ogni serie diluita ha lo stesso carattere della serie dalla quale proviene.
Date due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.37}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{1.38}$$

diremo *incastro* delle due serie la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tag{1.39}$$

nella quale compaiono tutti i termini delle due serie (1.37) e (1.38) ripetuti una sola volta e conservando l'ordine relativo, cioè inframezzando fra loro i termini delle due serie. Detto in modo tecnicamente più preciso, la serie incastro di due serie date è la somma di due serie diluite. Infatti se la serie incastro (1.39) è

$$a_1 + b_1 + b_2 + a_2 + b_3 + a_3 + a_4 + \dots \tag{1.40}$$

evidentemente si può pensare come somma delle serie diluite

$$a_1 + 0 + 0 + a_2 + 0 + a_3 + a_4 + \dots \tag{1.41}$$

e

$$0 + b_1 + b_2 + 0 + b_3 + 0 + 0 + \dots \,. \tag{1.42}$$

Il carattere della serie incastro si deduce da quello che si è detto a proposito del carattere delle serie diluite e di quello della serie somma di due serie date.

1.6.3 Associazione dei termini di una serie. Permutazioni

Data una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,, \tag{1.43}$$

osserviamo che, se associamo in modo arbitrario i termini di una serie, passiamo da una successione delle ridotte ad una sottosuccessione. Se la serie converge, o diverge a $+\infty$ o a $-\infty$ allora lo stesso si potrà dire per la serie con i termini comunque associati. Non è così se la serie è indeterminata o se diverge a ∞ senza segno. Infatti la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots (-1)^{n-1} + \dots$$

è indeterminata, mentre la serie

$$(1-1) + (1-1) + \dots ((-1)^{2n-1} + (-1)^{2n}) + \dots$$

è banalmente convergente con somma 0. Analogamente, la serie

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots (-1)^n n + \dots$$

diverge a ∞ senza segno (si veda la serie (1.9)), mentre la serie

$$(1-2) + (3-4) + \dots ((2n-1) - 2n) + \dots = -1 - 1 - \dots - 1 - \dots$$

diverge a $-\infty$. Ciò fa anche intendere che, in generale, non si possono *dissociare* i termini di una serie (cioè sciogliere le parentesi che individuano i termini della serie). Ciò è concesso però se la serie che cosí si ottiene è a termini positivi. Più in generale, supposta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \,, \tag{1.44}$$

dove $A_n = (a_{m_n+1} + \dots + a_{m_{n+1}})$, la serie ottenuta dalla (1.44) sciogliendo le parentesi converge alla stessa somma, se $A'_n = |a_{m_n+1}| + \dots + |a_{m_{n+1}}|$ è infinitesimo. Non lo dimostreremo.

Infine occupiamoci della *permutazione* delle serie. Se $\varphi : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ è un'applicazione biiettiva di $\mathbb{N}^+$ in sé, diremo che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} \,, \tag{1.45}$$

è una permutazione della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,. \tag{1.46}$$

In generale, né il carattere né la somma di una serie sono preservati da una permutazione. Abbiamo visto che la serie di Leibniz 1.34

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$$

ha somma $\log 2$. Si può dimostrare che la seguente serie, che è una sua permutazione,

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2} + \ldots \tag{1.47}$$

è ancora convergente ma ha somma $\frac{3}{2}\log 2$.
Si può dimostrare che se la serie (1.46) è assolutamente convergente (in particolare se è a termini positivi), allora ogni sua permutazione ha lo stesso carattere e, se convergente, la stessa somma. Se invece la serie (1.46) è semplicemente convergente, esistono permutazioni di essa che sono divergenti a $+\infty$, a $-\infty$, oscillanti tra due valori arbitrari, oppure convergenti ad un numero arbitrario.

1.7 Successioni a valori complessi

Sia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ una successione di numeri complessi. Diremo che z_n tende a $w \in \mathbb{C}$ se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \text{ tale che } \forall n > n_0\ |z_n - w| < \varepsilon\,. \tag{1.48}$$

Cioè, se $z_n = x_n + iy_n$, $w = u + iv$ si verifica che

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \text{ tale che } \forall n > n_0\ \sqrt{(x_n - u)^2 + (y_n - v)^2} < \varepsilon\,.$$

Dato $w \in \mathbb{C}$ diremo *intorno* di w ogni insieme $U \subset \mathbb{C}$ tale che $U \supset S_w^\varepsilon = \{z\colon |z - w| < \varepsilon\}$. Si veda la Figura 1.1. È immediato riconoscere che una successione di numeri complessi $z_n = x_n + iy_n$ tende a $w = u + iv$ se e solo se $x_n \to u$ e $y_n \to v$. Ciò segue dal fatto che $|x_n - u| \leq |z_n - w| = \sqrt{(x_n - u)^2 + (y_n - v)^2}$ e $|y_n - v| \leq |z_n - w|$. Quindi se $|z_n - w| < \varepsilon$ allora, a maggior ragione, $|x_n - u| < \varepsilon$ e $|y_n - v| < \varepsilon$. Se poi $|x_n - u| < \varepsilon$ e $|y_n - u| < \varepsilon$ allora $|z_n - w| < \sqrt{2}\cdot\varepsilon$.

Definizione 1.7.1. *Diremo che la serie*

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \ldots \tag{1.49}$$

converge se la successione

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = u_n + iv_n \tag{1.50}$$

ha limite finito in $\mathbb{C}$ per $n \to +\infty$. Diverge se $|s_n| \to +\infty$ per $n \to +\infty$. Diremo che è indeterminata se non ha limite per $n \to +\infty$.

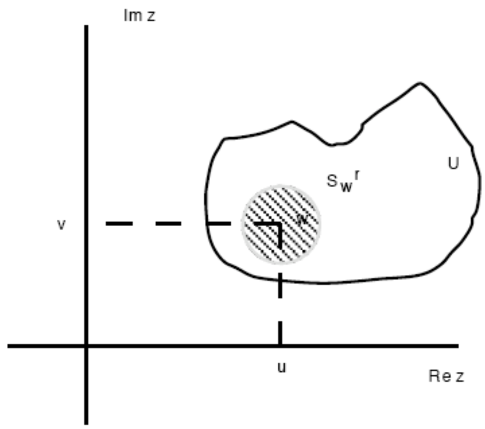

Figura 1.1: Intorno di un punto $w \in \mathbb{C}$.

È immediato riconoscere che (1.49) converge se e solo se convergono le serie

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \ldots$$

e

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \ldots ,$$

con $z_n = x_n + iy_n$. Infatti $s_n = u_n + iv_n = (x_1 + x_2 + \ldots x_n) + i(y_1 + y_2 + \ldots y_n)$. Perciò $s_n \to s = u + iv$ se e solo se $u_n \to u$ e $v_n \to v$.

Come già per le serie a termini reali, diremo che la serie (1.49) è *assolutamente convergente* se converge la serie

$$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \ldots . \tag{1.51}$$

È immediato verificare che se converge la serie (1.51) allora converge la serie (1.49). Infatti vale $|x_n| \leq |z_n|$ e $|y_n| \leq |z_n|$. Dunque la serie delle parti reali e quella delle parti immaginarie sono assolutamente convergenti e quindi convergenti. Allora anche la serie (1.49) è convergente. Diremo infine che la serie (1.49) è *semplicemente convergente* se essa converge ma la serie dei moduli diverge.

Esempio 1.7.1. *Si studi la convergenza della serie geometrica avente ragione $z \in \mathbb{C}$.*

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \ldots$$

con $z = \rho \cdot (\cos(\vartheta) + i \,\mathrm{sen}\,(\vartheta)) = [\rho, \vartheta]$.

Svolgimento: Vale

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + z + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1 - [\rho, \vartheta]^n}{1 - 1 - [\rho, \vartheta]} = \\ &= \frac{1 - \rho^n \cdot (\cos(n\vartheta) + i \operatorname{sen}(n\vartheta))}{1 - \rho \cdot (\cos(\vartheta) + i \operatorname{sen}(\vartheta))} . \end{aligned}$$

Ora se $\rho < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \dfrac{1}{1 - \rho \cdot (\cos(\vartheta) + i \operatorname{sen}(\vartheta))} = \dfrac{1}{1-z}$. Se $\rho > 1$ è $\lim_{n\to+\infty} |s_n| = +\infty$. Infatti si trova agevolmente che il modulo di s_n è

$$|s_n| = \rho^n \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{\rho^n} \cdot cos(n\vartheta) + \frac{1}{\rho^{2n}}}}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\vartheta)}} .$$

Se $\rho = 1$, $s_n = \dfrac{1 - (\cos(n\vartheta) + i \operatorname{sen}(n\vartheta))}{1 - (\cos(\vartheta) + i \operatorname{sen}(\vartheta))}$ non ha limite per $n \to +\infty$, se $\vartheta \neq k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Se poi $\rho = 1$ e $\vartheta = k \cdot 2\pi$, $s_n = n$ e quindi s_n diverge.

$\square$

1.8 La formula di Stirling

Ricordiamo, senza dimostrazione, la formula di Stirling relativa al fattoriale di un numero, spesso utile per valutare la convergenza di una serie. Si può dimostrare che vale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}} = 1 . \tag{1.52}$$

Questo fatto si esprime talvolta scrivendo

$$n! \approx n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} ,$$

che si legge $n!$ *è asintotico a* $n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$. Volendo essere piú precisi si può dimostrare che

$$n! \approx n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2}) . \tag{1.53}$$

1.9 Esercizi e complementi

1.9.1 Massimo limite e minimo limite di una successione

Sia data una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ di numeri reali. Consideriamo le due successioni generate a partire da (x_n), $L_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$ e $l_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$. Osserviamo che la successione (L_n) è non crescente, mentre la successione (l_n) è non decrescente. Perciò esistono $\lim_{n\to\infty} L_n = \inf\{L_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ e $\lim_{n\to\infty} l_n =$

$\sup\{l_n : n \in \mathbb{N}^+\}$. Si definisce *massimo limite* di (x_n) il limite di L_n, mentre il *minimo limite* di (x_n) è il limite di (l_n). Dunque

$$\max\lim(x_n) = \lim_{n\to\infty}(\sup\{x_k : k \geq n\}) = \inf\{(\sup\{x_k : k \geq n\}) : n \in \mathbb{N}^+\}$$

e

$$\min\lim(x_n) = \lim_{n\to\infty}(\inf\{x_k : k \geq n\}) = \sup\{(\inf\{x_k : k \geq n\}) : n \in \mathbb{N}^+\}.$$

Verifichiamo che una successione ha limite se e solo se $\max\lim(x_n) = \min\lim(x_n)$. In generale avremo $\min\lim(x_n) \leq \max\lim(x_n)$, poiché, ovviamente, $\inf\{x_k : k \geq n\} \leq \sup\{x_k : k \geq n\}$. Supponiamo che sia $\min\lim(x_n) = \ell = \max\lim(x_n)$. Dalla definizione di limite, segue che, dato $\varepsilon > 0$, esiste n_1 tale che per ogni $n > n_1$ sia $\ell - \varepsilon < \inf\{x_k : k \geq n\} < \ell + \varepsilon$ ed esiste n_2 tale che per ogni $n > n_2$ sia $\ell - \varepsilon < \sup\{x_k : k \geq n\} < \ell + \varepsilon$; se $\bar{n} = \max\{n_1, n_2\}$ e $n > \bar{n}$ si ha

$$\ell - \varepsilon < \inf\{x_k : k \geq n\} \leq \sup\{x_k : k \geq n\} < \ell + \varepsilon\,.$$

A maggior ragione, per ogni $n > \bar{n}$ si ha $\ell-\varepsilon < x_n < \ell+\varepsilon$. Cioè $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$. Se poi $x_n \to \ell$ per $n \to \infty$, allora, dato $\varepsilon > 0$, $\exists\bar{n}$, tale che per $n > \bar{n}$ vale $\ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon$. Dunque avremo di conseguenza

$$\ell - \varepsilon \leq \inf\{x_k : k \geq n\} \leq \sup\{x_k : k \geq n\} \leq \ell + \varepsilon\,,$$

se $n > \bar{n}$. Ma allora, per l'arbitrarietà di ε, $\min\lim_{n\to+\infty}(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n = \max\lim_{n\to+\infty}(x_n)$.

1.9.2 Criterio del rapporto e criterio del radice

La relazione tra il criterio della radice e il criterio del rapporto è messa in evidenza dal seguente risultato

Proposizione 1.9.1. *Sia (a_n) una successione limitata di numeri reali $a_n > 0$. Allora si ha*

$$\min\lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq \min\lim(\sqrt[n]{a_n}) \leq \max\lim(\sqrt[n]{a_n}) \leq \max\lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Dimostrazione: Dimostreremo, procedendo per assurdo, che $\max\lim(\sqrt[n]{a_n}) \leq \max\lim(\frac{a_{n+1}}{a_n})$. L'altra disuguaglianza sarà provata in maniera analoga. Supponiamo dunque che sia $\max\lim(\frac{a_{n+1}}{a_n}) < c < \max\lim(\sqrt[n]{a_n})$. Allora dalla prima di queste disuguaglianze segue che esiste k tale che per $n \geq k$ si ha:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < c, \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} < c, \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}} < c\,.$$

Moltiplicando a termine a termine queste $n-k$ disuguaglianze si trova $\frac{a_n}{a_k} < c^{n-k}$, ossia $a_n < (\frac{a_k}{c^k})c^n = H \cdot c^n$, dove la costante $H = (\frac{a_k}{c^k})$. Ma $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{H} = 1$ e quindi $\lim_{n\to\infty} c\sqrt[n]{H} = c$. Conseguentemente, $\max\lim(\sqrt[n]{a_n}) = c$; contraddizione. $\square$

Un ulteriore complemento

Proposizione 1.9.2. [Dirichlet, 1863] *Sia* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie non necessariamente convergente, ma tale che la successione delle ridotte sia limitata. Sia inoltre* b_n *una successione non crescente infinitesima di numeri positivi. Allora la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n$ *è convergente.*

Dimostrazione: Infatti, sia $\sum\ a_n$ la serie che ha le ridotte limitate e sia (b_n) una successione infinitesima decrescente di numeri positivi. Mostriamo che $\sum\ a_n \cdot b_n$ converge. A questo scopo sia σ_n la ridotta n-esima di $\sum_1^\infty a_n \cdot b_n$

$$\begin{aligned}\sigma_n &= a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n = s_1 b_1 + (s_2 - s_1) b_2 + \cdots + (s_n - s_{n-1}) b_n \\ &= s_1 \cdot (b_1 - b_2) + s_2 \cdot (b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1} \cdot (b_{n-1} - b_n) + s_n \cdot b_n\,,\end{aligned}$$

dove (s_n) è la successione delle ridotte di $\sum\ a_n$. Poiché i termini $b_k - b_{k+1}$ sono tutti positivi, allora si ha

$$|\sigma_n| \leq |s_1| \cdot (b_1 - b_2) + |s_2| \cdot (b_2 - b_3) + \cdots + |s_{n-1}| \cdot (b_{n-1} - b_n) + |s_n| \cdot b_n\,.$$

Per ipotesi esiste $M > 0$ tale che $|s_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, e quindi si ha

$$|s_k \cdot (b_k - b_{k+1})| \leq M \cdot (b_k - b_{k+1})\,.$$

Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_1$, la serie stessa è convergente e quindi la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k \cdot (b_k - b_{k+1})$$

è assolutamente convergente e perciò convergente. Infine, osservando che

$$\sigma_n = s_1 \cdot (b_1 - b_2) + s_2 \cdot (b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1} \cdot (b_{n-1} - b_n) + s_n \cdot b_n\,,$$

tenuto conto che s_n è limitato e che $b_n \to 0$, si trova che

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} s_k \cdot (b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \cdot (b_k - b_{k+1})\,.$$

Dunque la serie $\sum\ a_n \cdot b_n$ converge.

Esercizio 1.9.1. *Si dimostri che le serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

sono convergenti per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: La somma

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\cos(kx) + i \operatorname{sen}(kx)) = \frac{1 - ((\cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx))}{1 - ((\cos(x) + i \operatorname{sen}(x))},$$

come si è visto in 1.7.1, e il suo modulo, se $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, è limitato da $\dfrac{2}{|1 - ((\cos(x) + i \operatorname{sen}(x))|}$. Dunque le somme parziali $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx)$ e $\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sen}(kx)$ che sono la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(\cos(kx)+i \operatorname{sen}(kx))$ sono esse pure limitate. Inoltre $\frac{1}{n}$ è una successione decrescente e infinitesima di numeri positivi. Perciò, per il complemento precedente, le serie in considerazione sono convergenti. □

Esercizio 1.9.2. *Si verifichi che la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+2}{n^2+n+1}$$

converge semplicemente.

Svolgimento: Il termine generale della serie è un infinitesimo d'ordine 1, dunque la serie dei valori assoluti diverge. Se indichiamo con $\varphi(x) = \frac{x+2}{x^2+x+1}$, troviamo che $\varphi'(x) = \frac{-x^2-4x-2}{(x^2+x+1)^2} < 0$, per $x > 0$. Dunque certamente $\varphi(n)$ è decrescente per $n > 1$ ed è infinitesima. Applicando il criterio di Leibniz, si conclude che la serie è (semplicemente) convergente. □

Esercizio 1.9.3. *Si verifichi che la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

converge semplicemente.

Esercizio 1.9.4. *Si studi la convergenza della serie*

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n \cdot (\log n) \cdot \log((\log n))^r}.$$

Esercizio 1.9.5. *Usando il criterio del rapporto si dimostri che sono convergenti le serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}$. *Si dimostri che diverge* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n^n)^2}{n!}$.

Esercizio 1.9.6. *Si determini il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n^2+2n-2}.$$

Suggerimento: Si osservi che $a_n > 0$ per ogni $n \geq 1$. È poi facile valutare che $\text{ord}_{+\infty} a_n = \frac{3}{2} > 1$. Dunque la serie converge. $\square$

Esercizio 1.9.7. *Si determini il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{n^2 \cdot \log n + n + 1}\,.$$

Suggerimento: Il termine generale si può scrivere come segue:

$$a_n = \frac{n}{n^2 \cdot \log(n)} \cdot \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n \cdot \log n}+\frac{1}{n^2 \cdot \log n}} = \frac{1}{n \cdot \log(n)} \cdot \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n \cdot \log n}+\frac{1}{n^2 \cdot \log n}}\,.$$

Dunque si può concludere che l'infinitesimo a_n è equivalente all'infinitesimo $\frac{1}{n \cdot \log(n)}$ in $+\infty$. Ma la serie di termine generale $b_n = \frac{1}{n \cdot \log(n)}$ è divergente, e dunque anche la nostra serie lo è . $\square$

Esercizio 1.9.8. *Si consideri la serie*

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots \frac{1}{n(n+2)} \dots$$

e se ne determini la somma.

Conviene considerare che $a_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$. Perciò

$$s_n = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}) + \dots + \frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}) =$$
$$= \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}) = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})\,.$$

Allora si vede facilmente che $s_n \to \frac{3}{4}$ per $n \to +\infty$. La somma della serie è $s = \frac{3}{4}$.

Capitolo 2

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

Finora abbiamo considerato successioni e serie nelle quali il termine generale era un numero reale o complesso. Cosa si può dire se il termine generale è una funzione, $f_n\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ o $f_n\colon E(\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$? Inoltre, è necessario fare questo sforzo d'astrazione? A quest'ultima domanda gli sviluppi interni della Matematica e le necessità delle Applicazioni si sono incaricate di dare una risposta positiva. Infatti, spesso, per calcolare con la voluta approssimazione il valore di una funzione, anche di quelle elementari come seno, coseno, esponenziale, non c'è migliore soluzione che calcolare il valore di una loro rappresentazione approssimata per mezzo di un polinomio. Questo è il metodo usato in tutti i calcolatori e dai matematici dei secoli passati che tabularono queste funzioni con lunghi calcoli manuali, spesso accorciati con sofisticati "trucchi che hanno dato luogo ai moderni algoritmi. Inoltre, spesso, nelle applicazioni tecniche, non si riesce a trovare la funzione che descrive un fenomeno in termini di operazioni semplici da effettuare su funzioni elementari. Dunque non rimane che approssimare la funzione voluta con una combinazione lineare di funzioni "ragionevoli per la descrizione del fenomeno, che siano sufficientemente semplici. Spingendo sempre piú l'approssimazione lineare con un numero maggiore di termini, si è condotti naturalmente alla considerazione di una serie di funzioni.

2.1 Convergenza puntuale e uniforme

Cominciamo dunque a considerare una successione di funzioni $f_n\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e chiediamoci quale significato sia ragionevole attribuire alla nozione di convergenza di $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a una funzione $f\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Un significato si presenta subito come quello piú naturale o semplice in quanto estensione della nozione di convergenza di una successione di numeri. Fissiamo un elemento $x_0 \in E$. Allora otteniamo una successione numerica $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ per la quale è nota la nozione di convergenza. Supponiamo che per ogni $x \in \tilde{E} \subset E$ la successione numerica ottenuta fissando il valore di $x \in \tilde{E}$ sia convergente. Prendendo il $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ che chiameremo $f(x)$, otterremo una funzione $f\colon \tilde{E} \to \mathbb{R}$. Abbiamo cosí ottenuto la definizione di *convergenza puntuale* di una successione di funzioni.

Definizione 2.1.1. *Diremo che una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni $f_n\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, converge puntualmente ad una funzione $f\colon E \to \mathbb{R}$, se la seguente proprietà è soddisfatta*

$$\forall\varepsilon > 0,\, \forall x \in E\, \exists \overline{n}_{\varepsilon,x} \text{ tale che } \forall n > \overline{n}_{\varepsilon,x} \text{ si ha } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,. \tag{2.1}$$

Si osservi che la posizione dei quantificatori $\forall\varepsilon > 0$, $\forall x \in E$ può essere invertita ($\forall x \in E$, $\forall\varepsilon > 0$) senza che cambi il significato logico della richiesta fatta sulla successioni di funzioni. Si osservi inoltre che, poiché la richiesta è fatta punto per punto, il valore dell'indice $\overline{n}_{\varepsilon,x}$ a partire dal quale è soddisfatta la condizione $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ dipende sia da $x \in E$ che da ε. Può dunque accadere che, mantenendo fissato il valore di $\varepsilon > 0$, al mutare di $x \in E$ cambi il valore di $\overline{n}_{\varepsilon,x}$. Nei casi piú fastidiosi potrà accadere che al variare di $x \in E$ il valore di $\overline{n}_{\varepsilon,x}$ non sia superiormente limitato. Cioè che sia

$$\sup\{\overline{n}_{\varepsilon,x}\colon x \in E\} = +\infty\,.$$

Evidentemente in questi casi non si potrà trovare un valore di $\overline{n}_\varepsilon$ che sia utile quale che sia $x \in E$. Supponiamo invece che al variare di $x \in E$ l'insieme dei numeri naturali $\overline{n}_{\varepsilon,x}$ sia superiormente limitato

$$\sup\{\overline{n}_{\varepsilon,x}\colon x \in E\} = \overline{n}_\varepsilon < +\infty\,.$$

Allora accadrà che, per l'assegnato valore di ε, la condizione $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ sia verificata per ogni $n > \overline{n}_\varepsilon$, quale che sia $x \in E$. Questa condizione è particolarmente utile in molte situazioni, e si merita la definizione di *convergenza uniforme*.

Definizione 2.1.2. *Diremo che una successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $f_n\colon E \to \mathbb{R}$, converge uniformemente alla funzione $f\colon E \to \mathbb{R}$ se accade che*

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists \overline{n}_\varepsilon \text{ tale che } \forall n > \overline{n}_\varepsilon \text{ si ha } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\, \forall x \in E\,. \tag{2.2}$$

Si noti che in questo caso il quantificatore $\forall x \in E$ appare in coda alla proposizione. Qui il cambio di posizione non è indifferente: sta a significare che il numero $\overline{n}_\varepsilon$ non dipende piú da $x \in E$, ma solo dal valore di $\varepsilon > 0$.
Per indicare che una successione di funzioni (f_n) converge puntualmente a f scriveremo anche $f_n \dot{\to} f$; per indicare che la convergenza è uniforme scriveremo anche $f_n \overset{\text{unif}}{\to} f$.
È importante mettere in evidenza la differenza tra i due tipi di convergenza, cosa che faremo con alcuni esempi.

Esempio 2.1.1. *Si dimostri che la successione di funzioni $f_n\colon [0,1[\to \mathbb{R}$, date da $f_n(x) = x^n$ converge puntualmente, ma non uniformemente alla funzione $f(x) = 0$, $\forall x \in [0,1[$.*

Infatti sia $0 \le x < 1$. Allora $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$. Dunque la successione di funzioni converge almeno puntualmente alla funzione identicamente nulla. Vediamo se la convergenza possa essere uniforme. Dato $0 < x < 1$ e un valore $\varepsilon > 0$, che supporremo senz'altro < 1, cerchiamo per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ sia soddisfatta la condizione $x^n < \varepsilon$. (Ovviamente $x^n > 0$ e dunque non dobbiamo preoccuparci di valori assoluti.) La condizione voluta è soddisfatta se $n \cdot \log x < \log \varepsilon$. Osserviamo che, essendo sia x che ε compresi tra 0 e 1, il logaritmo è un numero negativo. Perciò si trova $n > \frac{\log\varepsilon}{\log x}$.

$$\sup\{\frac{\log\varepsilon}{\log x}\colon 0 < x < 1\} = +\infty\,.$$

Il numero cercato $\overline{n}_{\varepsilon,x}$ si può allora calcolare come $\overline{n}_{\varepsilon,x} = \left[\frac{\log\varepsilon}{\log x}\right]$ dove con

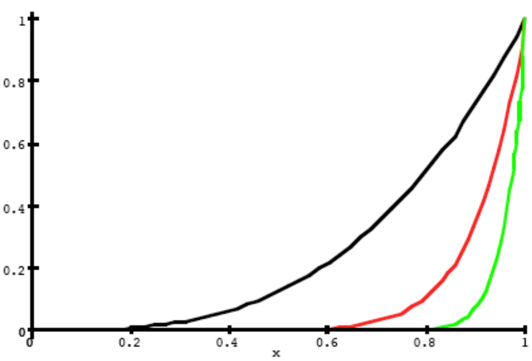

Figura 2.1: Convergenza puntuale della successione $f_n(x) = x^n$.

$[y]$ intendiamo la parte intera di y, cioè il piú grande intero non superiore a y: $[y] \le y < [y] + 1$. È facile riconoscere che la funzione $\frac{\log\varepsilon}{\log x}$ è crescente sull'intervallo $0 < x < 1$ e vale

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\log\varepsilon}{\log x} = +\infty = \sup\{\frac{\log\varepsilon}{\log x}\colon 0 < x < 1\}\,.$$

Dunque $\sup\{\overline{n}_{\varepsilon,x}\colon 0 < x < 1\} = +\infty$ e la convergenza non può essere uniforme. Se si considera la stessa successione (x^n) sull'intervallo $[0,1]$, si trova che il limite puntuale è la funzione $f(x)$ che vale 0 se $0 \le x < 1$, mentre vale 1 in $x = 1$. Anche in questo caso la convergenza è solamente puntuale, ma non uniforme, e la giustificazione è fornita dall'argomentazione già esposta. Si veda in proposito la Figura (2.1).

$\square$

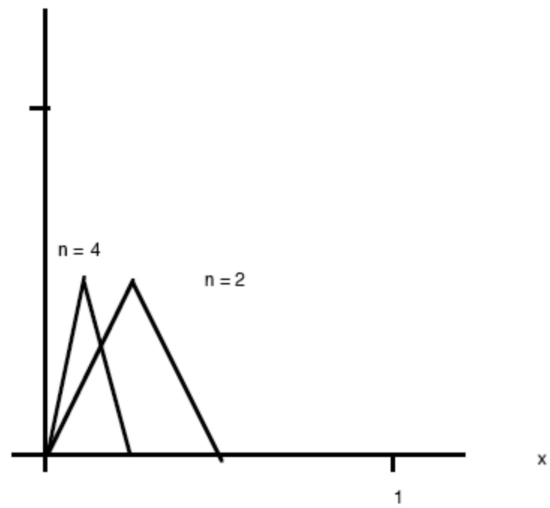

Figura 2.2: Convergenza puntuale della successione dell'es. (2.1.2).

Esempio 2.1.2. *Si consideri la successione di funzioni $f_n(x)$ cosí definite*

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & se 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ \\ n(-x + \frac{1}{n}) & se \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & se \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Si verifichi che la successione tende alla funzione nulla puntualmente, ma non uniformemente.

Infatti, se consideriamo un valore $0 < x \leq 1$, basterà prendere un numero naturale n_0, tale che $\frac{1}{n_0} < x$ affinché $f_n(x) = 0$, per ogni $n \geq n_0$. Allora per ogni $0 < x \leq 1$ si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Se poi $x = 0$ è già $f_n(0) = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque, puntualmente, la successione $f_n(x)$ tende alla funzione nulla $O(x) = 0$, per ogni $x \in [0, 1]$. Ma la convergenza non è uniforme. Infatti, quale che sia n, $f_n(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2}$. Dunque, fissato $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, non può essere soddisfatta la condizione $|f_n(x) - O(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in [0, 1]$. Almeno per $x = \frac{1}{2n}$ vale $|f_n(\frac{1}{2n}) - 0| = \frac{1}{2} > \varepsilon$.

□

Esempio 2.1.3. *Si consideri la successione di funzioni*

$$f_n(x) = \arctan(x - n)\,.$$

Si verifichi che la successione tende alla funzione costante $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ puntualmente, ma non uniformemente, su tutto $\mathbb{R}$.

Infatti, per ogni assegnato $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \arctan(x-n) = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Tuttavia, se $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ non esiste alcun n per il quale vale

$$|\arctan(x-n) + \frac{\pi}{2}| < \varepsilon,\ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Infatti almeno in $x = n$, $|\arctan(n-n) + \frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{2} > \varepsilon$.

La situazione della convergenza uniforme è invece quella messa in evidenza nella figura (2.2). Dato $\varepsilon > 0$ esiste un $\overline{n}_\varepsilon$ tale che per ogni $n > \overline{n}_\varepsilon$ il grafico della funzione $f_n(x)$, rappresentato con il tratto piú grosso, è compreso tra i grafici di $f(x) + \varepsilon$ e di $f(x) - \varepsilon$, rappresentati con il tratto piú sottile.
L'importanza della convergenza uniforme risiede principalmente nel fatto che, sotto l'ipotesi di convergenza uniforme, si può stabilire una teoria dei limiti, della continuità, della derivabilità, dell'integrabilità sufficientemente semplice e soddisfaciente per la funzione $f(x)$ limite uniforme della successione. Precisamente valgono i seguenti teoremi di notevole importanza, ma che ci asterremo dal dimostrare.

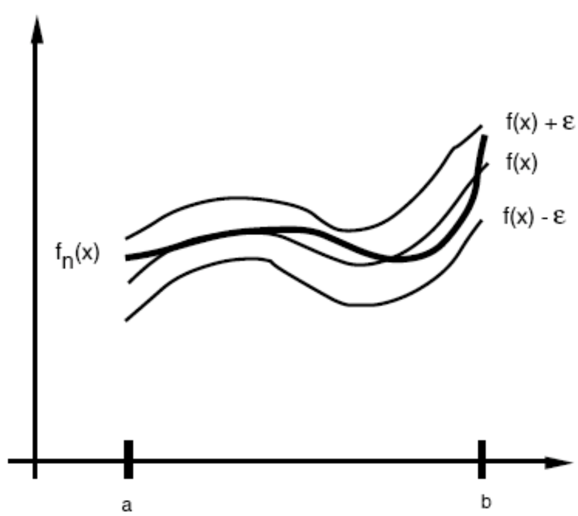

Figura 2.3: Convergenza uniforme di una successione di funzioni $f_n(x)$ a $f(x)$.

Teorema 2.1.1. [Teorema dei due limiti]. *Sia* $f_n \colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, n = 1, 2, \ldots$ *una successione di funzioni che converge uniformemente alla funzione* $f \colon E \to \mathbb{R}$. *Sia* x_0 *un punto d'accumulazione per l'insieme* E. *Se per ogni* n *esiste* *finito il* $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \ell_n$ *allora esistono finiti il limite* $\lim_{n\to+\infty} \ell_n = \ell$ *e il limite* $\lim_{x\to x_0} f(x)$*. Inoltre i due limiti sono uguali. Cioè*

$$\lim_{x\to x_0}\big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\big) = \lim_{n\to+\infty}\big(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\big)\,. \tag{2.3}$$

L'inversione dei due limiti dà il nome al teorema. Come corollario del precedente teorema, o con dimostrazione diretta, si ottiene il seguente

Teorema 2.1.2. [Continuità del limite uniforme]. *Sia* $f_n\colon E(\subset\mathbb{R})\to\mathbb{R}, n = 1, 2, \ldots$ *una successione di funzioni continue che converge uniformemente alla funzione* $f\colon E\to\mathbb{R}$*. Allora anche* $f(x)$ *è continua su* E*.*

Dimostrazione: Per la convergenza uniforme di f_n a f, sappiamo che dato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ sia $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ quale che sia $x \in E$. Sia poi $x_0 \in E$. Mostriamo che $f(x)$ è continua in x_0. Abbiamo

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(x_0) + f_m(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)|\,.\end{aligned}$$

Si scelga un $m > \bar{n}$ e, per la continuità di $f_m(x)$ in x_0 un intorno U di x_0 tale che per tutti gli $x \in U\cap E$ sia $|f_m(x) - f_m(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Allora, scelto $m > \bar{n}$ e $x \in U \cap E$ abbiamo

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Dunque la funzione limite è continua in x_0. Per l'arbitrarietà di questo punto in E, la funzione è continua in E. □

Per quanto concerne la derivabilità abbiamo

Teorema 2.1.3. [Derivabilità del limite uniforme]. *Sia* $f_n\colon I = [a, b]\to\mathbb{R}, n = 1, 2, \ldots$ *una successione di funzioni che converge (puntualmente) alla funzione* $f\colon I\to\mathbb{R}$*. Supponiamo che le funzioni* $f_n(x)$ *siano derivabili su* I *e che la successione delle derivate* $f_n'(x)$ *converga uniformemente ad una funzione* $\varphi(x)$ *definita su* I*. Allora* $f(x)$ *è derivabile su* I *e vale* $f'(x) = \varphi(x), \forall\, x\in I$*. Inoltre la successione* $f_n(x)$ *converge uniformemente a* $f(x)$*.*

Si può facilmente osservare (ispezionando la dimostrazione da noi omessa) che la tesi del teorema sussiste anche nella sola ipotesi che esista un punto $x_0 \in I$ nel quale converge la successione numerica $f_n(x_0)$.
Infine abbiamo

Teorema 2.1.4. [Integrabilità del limite uniforme]. *Sia* $f_n\colon I = [a, b]\to\mathbb{R}, n = 1, 2, \ldots$ *una successione di funzioni che converge uniformemente alla funzione* $f\colon I\to\mathbb{R}$*. Se le funzioni* $f_n(x)$ *sono tutte integrabili (secondo Riemann)* *sull'intervallo limitato I, allora lo è il loro limite uniforme $f(x)$ ed inoltre vale*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\,+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \quad . \tag{2.4}$$

Analogamente a quanto abbiamo fatto per le successioni di funzioni, si possono stabilire le nozioni di convergenza puntuale e uniforme per le serie di funzioni.

Definizione 2.1.3. *Data una successione di funzioni $\varphi_n\colon E(\subset\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ diremo che la serie*

$$\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\cdots+\varphi_n(x)+\ldots \tag{2.5}$$

converge puntualmente *oppure* uniformemente *alla sua somma $s(x)\colon E\to\mathbb{R}$ se la successione delle ridotte*

$$\begin{array}{rcl}
s_0(x) & = & \varphi_0(x)\\
s_1(x) & = & \varphi_0(x)+\varphi_1(x)\\
s_2(x) & = & \varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\\
\ldots & = & \ldots\\
s_n(x) & = & \varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\cdots+\varphi_n(x)\\
\ldots & = & \ldots
\end{array}$$

converge puntualmente oppure uniformemente alla somma della serie $s(x)$.

Tutti i teoremi che abbiamo enunciato per le successioni uniformemente convergenti di funzioni su limiti, continuità, derivabilità, integrabilità, hanno un esatto parallelo per le serie uniformemente convergenti di funzioni. Riprendendo brevemente le considerazioni fatte nell'introduzione a questo capitolo, preciseremo meglio quale sarà l'oggetto del nostro studio. Spesso saremo in presenza di una funzione $f(x)$, definita su un insieme $E\subset\mathbb{R}$ a valori reali (è il caso piú semplice, ma anche quello piú comune). È data una successione di funzioni $\varphi_n\colon E\to\mathbb{R}$, che sono *linearmente indipendenti*, cioè tali che se una loro combinazione lineare *finita* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\star} a_n\varphi_n(x)=0$, allora $a_n=0\ \forall n\in\mathbb{N}$. Qui l'asterisco in $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\star}$ indica che solo un numero finito di coefficienti è non nullo. Il problema è quello di trovare coefficienti a_n in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$ tale che

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\varphi_n(x)\,,$$

essendo la convergenza della serie intesa in senso puntuale o uniforme (o di altro tipo, che potrà essere precisato in seguito).
Noi ci occuperemo per ora della sviluppabilità in serie di potenze, essendo $\varphi_n(x)=(x-x_0)^n$.

Un altro sistema di funzioni linearmente indipendenti importante nelle applicazioni è dato da

$$\{\varphi_n(x)_{n\in\mathbb{N}}\} = \{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \ldots, \operatorname{sen} nx, \cos nx, \ldots\},$$

con $E = [0, 2\pi]$, essendo le funzioni in esame quelle periodiche di periodo 2π. Gli sviluppi considerati sono quelli detti *in serie di Fourier*.
Per concludere, ricordiamo un teorema utile per dimostrare la convergenza uniforme di una serie di funzioni

Teorema 2.1.5. (di Weierstrass, o della convergenza normale). *Sia data la serie di funzioni* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$. *Si supponga che esista una serie convergente a termini positivi* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*, tali che per ogni* $x \in E$*, (*E *dominio comune delle funzioni* $\varphi_n(x)$*) e per ogni* $n \in \mathbb{N}$*, valga*

$$|\varphi_n(x)| \leq a_n\,.$$

Allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ *converge uniformemente alla sua somma.*

Dimostrazione: Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora, dato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che $\sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} a_n < \varepsilon$. Allora si ha che

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) - \sum_{n=0}^{\bar{n}} \varphi_n(x)\right| = \left|\sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} \varphi_n(x)\right| \leq \sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} |\varphi_n(x)| \leq \sum_{n=\bar{n}+1}^{\infty} a_n < \varepsilon\,.$$

Poiché la disuguaglianza vale quale che sia $x \in E$, la convergenza è uniforme.□
Si noti che quella data è una condizione sufficiente ma non necessaria per la convergenza uniforme. Infatti se $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \restriction [n, n+1[$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ converge uniformemente a $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ su $[1, \infty[$, $|\varphi_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, ma la serie $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

2.2 Serie di potenze nel campo reale

Definizione 2.2.1. *Diremo* serie di potenze nel campo reale *una serie*

$$a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + a_n \cdot (x - x_0)^n + \ldots \tag{2.6}$$

con i coefficienti $a_n \in \mathbb{R}$ *e la variabile* $x \in \mathbb{R}$*. In particolare, se* $x_0 = 0$*, si ha*

$$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n + \ldots\ . \tag{2.7}$$

Il punto x_0 in (2.6) si dice il *centro della serie di potenze*. Nella (2.7) il centro è nello zero. Ci chiediamo per quali valori di x converga una serie di potenze. È chiaro che l'insieme di convergenza della serie piú generale (2.6) è legato a quello di (2.7) da una semplice traslazione. Se $K \subset \mathbb{R}$ è l'insieme di convergenza di (2.7), $x_0+K \subset \mathbb{R}$ è l'insieme di convergenza della serie (2.6), dove $x_0+K = \{x_0+x \colon x \in K\}$. Per affrontare il problema dell'insieme di convergenza, consideriamo alcuni esempi.

Esempio 2.2.1. *Consideriamo le serie*

$$1 \quad +x + x^2 + \cdots + x^n + \dots \tag{2.8}$$

$$1 \quad +x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \dots \tag{2.9}$$

$$1 \quad +1! \cdot x + 2! \cdot x^2 + \cdots + (n!) \cdot x^n + \dots \tag{2.10}$$

Per decidere dove le serie convergano, converrà considerare le serie dei loro valori assoluti, prendendo $x \neq 0$. Nel caso della serie (2.8), troviamo

$$1 + |x| + |x|^2 + \cdots + |x|^n + \dots .$$

Il rapporto $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = |x|$. Perciò il criterio del rapporto ci dice che se $|x| < 1$ la serie converge; se $|x| \geq 1$ la serie non può convergere poiché il suo termine generale non è infinitesimo. Dunque la serie (2.8) converge se e solo se $|x| < 1$. L'insieme di convergenza è un intervallo di $\mathbb{R}$ avente centro nell'origine e semiampiezza 1. $K =]-1, 1[$. Se il centro della serie fosse stato in x_0 avremmo ottenuto $K =]x_0 - 1, x_0 + 1[$.
Procedendo come sopra per la serie esponenziale (2.9) troviamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|}{n+1} .$$

Quale che sia il valore di x si vede che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ e dunque, per il criterio del rapporto, la serie (2.9) è assolutamente convergente (in senso puntuale) per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ossia $K = \mathbb{R}$.
Infine nel caso della serie (2.10) la solita tecnica ci porta a considerare

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|^{n+1} \cdot (n+1)!}{|x|^n \cdot n!} = |x| \cdot (n+1) .$$

Si vede facilmente che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$, quale che sia $x \neq 0$; dunque la serie non può convergere perché il termine generale non è infinitesimo, anzi tende a ∞. Ovviamente la serie converge in $x = 0$. Ossia la serie converge solamente nel suo centro $x_0 = 0$. L'insieme di convergenza $K = \{0\}$ è ridotto ad un solo punto.

Dunque le esperienze fin qui fatte ci fanno sorgere il sospetto che una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n$ abbia un dominio di convergenza del tipo $K \subset [-R, R]$ con $R \geq 0$ potendo anche essere $R = 0$ oppure $R = +\infty$. Gli estremi dell'intervallo potranno essere compresi o esclusi dal dominio di convergenza. Diremo *dominio di convergenza regolare* l'insieme $C =]-R, R[$. L'insieme $A \subset \{-R, R\}$ sarà il *dominio di convergenza accidentale*. Esso potrà anche essere vuoto come nel caso della serie geometrica (2.8). Potrà anche coincidere con l'intero dominio di convergenza, come abbiamo visto nel caso della serie (2.10). Dunque per il dominio di convergenza avremo $K = C \cup A$. Vediamo ora di confermare la nostra congettura.

Lemma 2.2.1. [Abel.] *Sia data la serie di potenze (2.6),*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \,.$$

Se la serie converge per qualche valore $\bar{x} \in \mathbb{R}$, converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$.

Dimostrazione: Supponiamo che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\bar{x} - x_0)^n$, con $\bar{x} \neq 0$, sia convergente e sia $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$. Possiamo valutare come segue il termine generale della serie dei valori assoluti

$$|a_n \cdot (x - x_0)^n| = |a_n| \cdot |x - x_0|^n = |a_n| \cdot |\bar{x} - x_0|^n \cdot |\frac{x - x_0}{\bar{x} - x_0}|^n \,.$$

Poiché $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\bar{x} - x_0)^n$ converge, necessariamente, $\lim_{n\to+\infty}(a_n(\bar{x} - x_0)^n) = 0$ e quindi esiste una costante $k > 0$ tale che $|a_n(\bar{x} - x_0)^n| \leq k$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Perciò

$$|a_n \cdot (x - x_0)^n| \leq k \cdot |\frac{x - x_0}{\bar{x} - x_0}|^n \,.$$

Poiché $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$ abbiamo che $|\frac{x - x_0}{\bar{x} - x_0}| < 1$. La serie dei valori assoluti è dunque maggiorata da una serie geometrica covergente ed è quindi convergente. Dunque per ogni $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$ la serie (2.6) è non solo convergente, ma assolutamente convergente. Si noti che alla stessa conclusione si può arrivare sotto una condizione piú debole di quella contenuta nella nostra ipotesi. Cioè, non è necessario supporre che la serie sia convergente nel punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$, ma basta che $|a_n(\bar{x} - x_0)^n|$ sia limitato al variare di $n \in \mathbb{N}$. □

Usando questo lemma possiamo ora dimostrare il seguente

Teorema 2.2.2. *Sia data la serie di potenze (2.6),*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n .$$

Esiste un numero $R \geq 0$ tale che il dominio di convergenza della serie è contenuto in un intervallo $[x_0 - R, x_0 + R]$. I casi $R = 0$ e $R = +\infty$ sono possibili. Il dominio di convergenza accidentale $A \subset \{x_0 - R, x_0 + R\}$ può essere vuoto o essere strettamente contenuto o coincidere con $\{x_0 - R, x_0 + R\}$.

Dimostrazione: Consideriamo l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie converge. Sia

$$R = \sup \left\{ |x - x_0| \colon \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \text{ converge} \right\} .$$

Poiché la serie converge almeno in $x = x_0$, l'insieme del quale si considera l'estremo superiore non è vuoto e $R \geq 0$. Come sappiamo, può anche essere $R = 0$ (vedi la serie 2.10) o $R = +\infty$ (vedi la serie 2.9). Supponiamo dunque $0 < R < +\infty$. Se $|x - x_0| < R$, per la definizione di estremo superiore, sappiamo che esiste un valore $\bar{x}$, per il quale la serie converge e tale che $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0| \leq R$. Ma allora, per il lemma precedente (2.2.1), la serie è convergente. Dunque certamente il dominio di convergenza della serie contiene l'intervallo aperto $]x_0 - R, x_0 + R[$: $K \supset]x_0 - R, x_0 + R[= C$. R si dice il *raggio di convergenza* della serie (2.6). Occupiamoci ora del dominio di convergenza accidentale, per verificare che tutte le eventualità annunciate sono possibili.

(a) Per la serie geometrica (2.8) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, sappiamo che $R = 1$ e che essa non converge né in $x = -1$, né in $x = 1$. Dunque $A = \emptyset$, $K =]-1, 1[$.

(b) Se consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ per essa $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = |x| \cdot \frac{n+1}{n+2} = |x|$. Di qui si deduce che il raggio di convergenza della serie è $R = 1$. Infatti la serie converge per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$. Che cosa si può dire per $|x| = 1$? Se $x = 1$ si trova la serie armonica (1.16) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ che diverge, ma se $x = -1$ si trova la serie di Leibniz (1.34), $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}$, che è convergente. Dunque $A = \{-1\}$ e $K = [-1, 1[$.

(c) Se consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2}$, troviamo, con considerazioni analoghe a quelle fatte in precedenza, che $R = 1$. Se poi $|x| = 1$, convergono, per il criterio sull'ordine d'infinitesimo, sia la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$, che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$. Dunque $A = \{-1, 1\}$ e $K = [-1, 1]$.

□

Osservazione 2.2.1. *Si può dimostrare che se il dominio regolare di convergenza puntuale è l'intervallo* $]x_0 - R, x_0 + R[$, *con* $R > 0$, *la serie converge* uniformemente *su ogni intervallo chiuso* $[x_0 - \ell, x_0 + \ell]$, *con* $0 < \ell < R$.

Infatti, se $|x - x_0| \le \ell$, $|a_n(x - x_0)^n| \le |a_n \ell^n|$. Osserviamo che, poiché $\ell < R$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \ell^n|$ converge. Sia ora $|x - x_0| \le \ell$ e diciamo $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$. Abbiamo che $s(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n \cdot (x - x_0)^k$. Se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \ell^n$ converge, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \ell^k - \sum_{k=0}^{n} |a_k| \ell^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| \ell^k < \varepsilon \,.$$

Ma allora se $n > \bar{n}$

$$|s(x) - s_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_n \cdot (x - x_0)^k| \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| \ell^k < \varepsilon, \, \forall \, x \in [-\ell, \ell] \,.$$

Dunque la convergenza di $s_n(x)$ a $s(x)$ è uniforme sull'intervallo detto. Infatti $\bar{n}$ dipende solo da $\varepsilon > 0$ e non da x.
Qui abbiamo fatto la dimostrazione esplicita. Tuttavia, si osservi che la convergenza è uniforme in base al teorema 2.1.5.

□

Osservazione 2.2.2. *Ricordando quanto abbiamo detto a proposito della convergenza uniforme nel caso di funzioni continue, Teorema (2.1.2), possiamo concludere che, siccome ogni termine di una serie di potenze è una funzione continua* ($a_n \cdot (x - x_0)^n$), *allora anche la somma di una serie di potenze* $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ *è una funzione continua in* $[x_0 - \ell, x_0 + \ell]$. *Anzi in* $]x_0 - R, x_0 + R[$, *dal momento che ogni* $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$ *può essere inglobato in un intervallo* $[x_0 - \ell, x_0 + \ell]$, *per un opportuno* ℓ *tale che* $|x - x_0| < \ell < R$.

Possiamo dimostrare di piú. Per alleggerire la notazione supporremo che il centro della serie sia l'origine. È facile adattare la dimostrazione al caso piú generale

Teorema 2.2.3. [Derivabilità delle serie di potenze].

Sia $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n$, *definita (almeno) in* $]-R, R[$. *Allora la funzione* $s(x)$ *è derivabile nell'intervallo* $]-R, R[$ *e si ha che*

$$s\prime(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} \,. \tag{2.11}$$

Cioè le serie di potenze si possono derivare a termine a termine.

Dimostrazione: Cominciamo a dimostrare che la serie data e la sua derivata a termine a termine hanno lo stesso raggio di convergenza. Sia R il raggio di convergenza della serie data e R' quello della sua derivata. Se $|x| < R'$, allora

$$|a_n x^n| = |x| \cdot |a_n x^{n-1}| < R' \cdot |a_n x^{n-1}| \le R' \cdot n|a_n x^{n-1}| \, (n \ge 1) \,.$$

Dunque la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n$ converge se $|x| < R'$; perciò è anche $|x| < R$. Abbiamo dimostrato che $|x| < R'$ implica $|x| < R$. Ma allora è $R' \le R$.

Sia ora $|x| < R$. Perciò esiste un $\bar{x}$ con $|x| < |\bar{x}| \le R$ e tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \bar{x}^n$ converge. Ricordiamo che allora deve esistere una costante $k > 0$ tale che $|a_n \cdot \bar{x}^n| \le k$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Valutiamo il termine generale della serie derivata

$$\begin{aligned} |n \cdot a_n \cdot x^{n-1}| &= \left| n \cdot a_n \cdot \bar{x}^n \cdot \frac{1}{\bar{x}} \cdot (\frac{x}{\bar{x}})^{n-1} \right| = \\ &= n \Big| \frac{a_n \bar{x}^n}{\bar{x}} \Big| \cdot \Big| \frac{x}{\bar{x}} \Big|^{n-1} \le \frac{k}{|\bar{x}|} \cdot n \cdot \Big| \frac{x}{\bar{x}} \Big|^{n-1} \,. \end{aligned}$$

Ora $\left|\frac{x}{\bar{x}}\right| < 1$ e una serie avente termine generale $n \cdot q^{n-1}$, è convergente, se $|q| < 1$, per il criterio sull'ordine d'infinitesimo del termine generale. Allora la serie di termine generale $\frac{k}{|\bar{x}|} \cdot n \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^{n-1}$ è convergente e dunque converge anche la serie derivata. Abbiamo dimostrato che se $|x| < R$ allora è anche $|x| < R'$. Ciò è possibile solo se $R \le R'$. Le due disuguaglianze contemporanee $R' \le R$ e $R \le R'$ ci dicono che è $R = R'$.

Dimostriamo ora che la somma della serie è derivabile e che la sua derivata è data dalla somma della serie derivata (2.11). Siano dunque x_0 e $x_0 + h$ in $]-R, R[$ con $|h| < \delta$ tali che $|x_0 + h| \le |x_0| + |h| < |x_0| + \delta < R$. Qui x_0 è un punto fissato nel dominio di convergenza regolare, e non il centro della serie di potenze che supponiamo coincidente con lo $0 \in \mathbb{R}$. Valutiamo la differenza

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h} \cdot \big[s(x_0+h) - s(x_0)\big] - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x_0^{n-1} = \\
= \quad & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \big[\frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} - n x_0^{n-1}\big] = \\
= \quad & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \big[\frac{x_0^n + n x_0^{n-1} h + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h^2 + \cdots + h^n - x_0^n}{h} - n x_0^{n-1}\big] = \\
= \quad & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \big[n x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h + \cdots + h^{n-1} - n x_0^{n-1}\big] = \\
= \quad & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \big[\binom{n}{2} x_0^{n-2} h + \cdots + h^{n-1}\big] .
\end{aligned}$$

Si noti che la sommatoria continua ad essere estesa tra 0 e ∞, ma che i termini corrispondenti a $n = 0, 1$ sono nulli. Dunque

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{h} \cdot \big[s(x_0+h) - s(x_0)\big] - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x_0^{n-1} \right| = \\
= \quad & \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \big[\binom{n}{2} x_0^{n-2} h + \cdots + h^{n-1}\big] \right| = \\
= \quad & |h| \cdot \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \big[\binom{n}{2} x_0^{n-2} + \cdots + h^{n-2}\big] \right| \leq \\
\leq \quad & |h| \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot \big[\binom{n}{2} |x_0|^{n-2} + \cdots + |h|^{n-2}\big] \leq \\
\leq \quad & |h| \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot \big[\binom{n}{2} |x_0|^{n-2} + \cdots + \delta^{n-2}\big] = \\
= \quad & |h| \cdot \frac{1}{\delta^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot \big[\binom{n}{2} |x_0|^{n-2} \cdot \delta^2 + \cdots + \delta^n\big] \leq \\
\leq \quad & |h| \cdot \frac{1}{\delta^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot (|x_0| + \delta)^n .
\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio si è tenuto conto che ad ogni parentesi si sono aggiunti i termini non negativi $|x_0|^n + n|x_0|^{n-1} \cdot \delta$, giustificando cosí l'ulteriore disuguaglianza. Ora in $|x_0| + \delta < R$ la serie di potenze è convergente, con somma $\bar{s}$ e la differenza

$$\left| \frac{1}{h} \cdot \big[s(x_0+h) - s(x_0)\big] - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x_0^{n-1} \right| \leq |h| \cdot \frac{1}{\delta^2} \cdot \bar{s} .$$

Poiché $\frac{1}{\delta^2} \cdot s(|x_0| + \delta)$ non dipende da h si conclude che il

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \big[s(x_0+h) - s(x_0)\big] - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x_0^{n-1} = 0\,,$$

cioè che

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \big[s(x_0+h) - s(x_0)\big] = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x_0^{n-1}\,.$$

Dunque la somma della serie è derivabile per ogni x in $]-R, R[$ e il suo valore è dato dalla somma della serie derivata (2.11).

□

Accanto al teorema di derivabilità a termine a termine delle serie di potenze, ha validità anche un teorema sull'integrabilità.

Teorema 2.2.4. *Sia data la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ *avente raggio di convergenza* R. *Sia* $[a,b] \subset]x_0 - R, x_0 + R[$. *Allora la somma della serie* $s(x)$ *è integrabile su* $[a,b]$ *e si ha*

$$\begin{aligned}\int_a^b s(x)\,dx &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \int_a^b (x-x_0)^n\,dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{(b-x_0)^{n+1} - (a-x_0)^{n+1}}{n+1}\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

In particolare

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \tag{2.13}$$

è una primitiva di $s(x)$ *in* $]x_0 - R, x_0 + R[$.

Dimostrazione: Basta pensare che in $[a,b] \subset]x_0 - R, x_0 + R[$ la convergenza della serie è uniforme e che quindi si può integrare a termine a termine. □

Riflettendo su quanto abbiamo dimostrato, possiamo concludere che la somma di una serie di potenze di centro x_0 è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty(]x_0 - R, x_0 + R[)$. Infatti la sua derivata è fornita da una serie di potenze che ha ancora raggio di convergenza R. Ma la serie derivata si può ulteriormente derivare ottenendo una serie derivata seconda che ha ancora raggio di convergenza R, e cosí via.... Ci possiamo chiedere se ogni funzione di classe $\mathcal{C}^\infty(I)$, essendo I un intervallo aperto di centro x_0, è somma di una serie di potenze. Vedremo che non sempre è cosí.

2.3 Sviluppi in serie di Taylor

Cominciamo subito a fornire una condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di una funzione.

Teorema 2.3.1. *Sia $f(x)$ una funzione definita su un intervallo $I =]x_0-h, x_0+h[$; si supponga inoltre f di classe $\mathcal{C}^\infty(I)$. Se esiste una costante $M > 0$ tale che*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M \cdot \frac{n!}{h^n},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I\,, \tag{2.14}$$

allora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,, \tag{2.15}$$

è puntualmente convergente in I e la sua somma è $f(x)$. Si può inoltre dimostrare che la serie converge uniformemente alla sua somma in $[x_0-\ell, x_o+\ell]$ con $0 < \ell < h$.

Dimostrazione: Possiamo applicare la formula di Taylor con il resto di Lagrange per un arbitrario valore di n, dal momento che $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Allora otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,, \end{aligned}$$

essendo ξ strettamente compreso tra x e x_0. Ossia

$$\begin{aligned} |f(x)-P_n(x)| &= \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leq M \cdot \frac{(n+1)!}{h^{n+1}} \cdot \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = \\ &= M \cdot \frac{|x-x_0|^{n+1}}{h^{n+1}} \to 0,\ n \to +\infty\,. \end{aligned}$$

Abbiamo qui denotato con $P_n(x)$ l'n-esimo polinomio di Taylor con centro x_0. Osserviamo che nelle ipotesi da noi fatte $\dfrac{|x-x_0|}{h} < 1$ e quindi $M \cdot \dfrac{|x-x_0|^{n+1}}{h^{n+1}}$ tende a 0 quando n tende a $+\infty$.

□

La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ si dice la *serie di Taylor* della funzione $f(x)$ con centro in x_0.

I seguenti corollari sono utili nelle applicazioni

Corollario 2.3.2. *Se nelle ipotesi del teorema precedente supponiamo che esista $L > 0$ tale che*

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq L^n,\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I\,,$$

allora f(x) è sviluppabile in serie di Taylor in I.

Dimostrazione: Ricordando la dimostrazione precedente si trova

$$|f(x) - P_n(x)| \quad = \quad \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leq L^{n+1} \cdot \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Ma quale che sia il numero reale α, vale $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha^n}{n!} = 0$. Dunque, prendendo $\alpha = L \cdot |x - x_0|$, si conclude che $\lim\limits_{n\to+\infty} |f(x) - P_n(x)| = 0$.

□

Corollario 2.3.3. *Se nelle ipotesi del teorema precedente supponiamo che esista $K > 0$ tale che*

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq K,\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I\,,$$

allora f(x) è sviluppabile in serie di Taylor in I.

Dimostrazione: Ricordando la dimostrazione precedente si trova

$$|f(x) - P_n(x)| \quad = \quad \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leq K \cdot \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Si conclude, come nel precdente corollario, che $\lim\limits_{n\to+\infty} |f(x) - P_n(x)| = 0$.

□

Possiamo ora mostrare come la condizione $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ non basti per la sviluppabilità in serie di Taylor di una funzione.

Esempio 2.3.1. *La funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & se x \neq 0 \\ \\ 0 & se x = 0. \end{cases}$$

è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, ma non è sviluppabile in serie di Taylor con centro in $x_0 = 0$.

Il fatto che la funzione $f(x)$ sia di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ richiede una valutazione attenta solo in corrispondenza al punto $x_0 = 0$. Infatti per $x \neq 0$, $e^{-\frac{1}{x^2}}$ è derivabile di ogni ordine, essendo composta di funzioni che hanno derivate di ogni ordine. Esaminiamo la situazione in $x_0 = 0$. Conviene fare ricorso al limite del rapporto incrementale:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0\,,$$

dal momento che $e^{-\frac{1}{x^2}}$ è un infinitesimo d'ordine maggiore di ogni ordine reale per $x \to 0$. Analogamente (procedendo per induzione, se si vuole essere raffinati), si può dimostrare che $f^{(n)}(0) = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque la funzione data è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Tuttavia non è sviluppabile in serie di potenze con centro in $x_0 = 0$. Infatti, essendo $f^{(n)}(0) = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la somma della serie di Taylor relativa è la funzione identicamente nulla, che è ben diversa dalla funzione $f(x)$ considerata.

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n \equiv 0\,.$$

□

Definizione 2.3.1. *Diremo che una funzione $f\colon E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è* analitica *in un punto $x_0 \in E$ se essa è somma di una serie di potenze con centro x_0 convergente in un intervallo I di centro x_0. Notiamo che la serie di potenze di cui si parla è necessariamente la serie di Taylor della funzione. Diremo poi che $f(x)$ è analitica in E se è analitica in ogni punto di E.*

Dunque possiamo concludere che la precedente funzione dell'esempio (2.3) è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, ma non analitica in $\mathbb{R}$. Talvolta le funzioni analitiche si indicano con la notazione $\mathcal{C}^\omega$ e, per quanto visto, in generale, $\mathcal{C}^\omega(E) \subsetneqq \mathcal{C}^\infty(E)$.

2.4 Sviluppi in serie di Taylor di alcune funzioni elementari

Considereremo ora lo sviluppo in serie di Taylor di alcune funzioni elementari. Questi sviluppi potranno essere utili spesso per valutare certi limiti che coinvolgono quelle funzioni. Si noti anche che spesso sarà $x_0 = 0$. In questo caso è tradizionale dire che lo sviluppo in serie che si considera è quello di Maclaurin.[1]

2.4.1 La funzione esponenziale

Per $f(x) = e^x$ i calcoli sono particolarmente semplici, poiché $f^{(n)}(x) = e^x$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $f^{(n)}(0) = 1$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque $x_0 = 0$. Se prendiamo un qualsiasi intervallo $]-R, R[$, con $R > 0$, otteniamo che $|f^{(n)}(x)| \leq K = e^R$.

[1] Colin Maclaurin (1698–1746) introdusse il caso particolare delle serie di Taylor nel suo *Treatise on fluxions*, nel quale si proponeva di fondare in modo logicamente rigoroso il calcolo infinitesimale inventato da Newton. Figlio e nipote di pastori della Chiesa Presbiteriana, entrò all'età di undici anni all'Università di Glasgow dove scoprí la sua passione per la matematica attraverso la lettura degli *Elementi* di Euclide. Si laureò (Master of Arts) all'età di quattordici anni con una tesi sulla teoria della gravitazione universale di Newton. Nel 1717 fu nominato professore di matematica al Marischal College dell'Università di Aberdeen. Dopo varie vicende ottenne la cattedra di matematica all'Università di Edinburgh, avendo dalla sua parte anche l'appoggio di Newton che si offrí di coprire parzialmente - venti sterline all'anno - le spese del suo stipendio. A Edinburgh rimase fino alla morte, si sposò ed ebbe sette figli, fu tra coloro che trasformarono la Medical Society di Edinburgh nella piú ampia Royal Society.

Dunque, applicando il Corollario (2.3.3), si vede che la funzione esponenziale è sviluppabile in serie di Taylor (Maclaurin) su ogni intervallo $]-R, R[$. Si ottiene

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} . \tag{2.16}$$

Per l'arbitrarietà di $R > 0$ si conclude che la somma della serie è la funzione e^x quale che sia $x \in \mathbb{R}$. Come già sappiamo la serie esponenziale (ed ora sappiamo perché si chiama cosí) è convergente assolutamente su tutta la retta reale. Si può dimostrare che è uniformemente convergente su ogni insieme limitato di $\mathbb{R}$.

2.4.2 Le funzioni $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$

Se $f(x) = \operatorname{sen} x$, si trova facilmente $f'(x) = \cos x, f''(x) = -\operatorname{sen} x, f'''(x) = -\cos x, f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x$. Dunque, per induzione, si trova

$$\begin{aligned} f^{(4k)}(x) &= \operatorname{sen} x, \\ f^{(4k+1)}(x) &= \cos x, \\ f^{(4k+2)}(x) &= -\operatorname{sen} x, \\ f^{(4k+3)}(x) &= -\cos x\,, \end{aligned}$$

per $k \in \mathbb{N}$, e, in $x_0 = 0$,

$$\begin{aligned} f^{(4k)}(0) &= 0, \\ f^{(4k+1)}(0) &= 1, \\ f^{(4k+2)}(0) &= 0, \\ f^{(4k+3)}(0) &= -1\,, \end{aligned}$$

per $k \in \mathbb{N}$. Inoltre vale $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. La funzione $\operatorname{sen} x$ è dunque sviluppabile in serie di Taylor su tutto $\mathbb{R}$ e il suo sviluppo è

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} . \tag{2.17}$$

Analogamente, per $f(x) = \cos x$, con $x_0 = 0$, si trova

$$f^{(4k)}(x) = \cos x, f^{(4k+1)}(x) = -\operatorname{sen} x, f^{(4k+2)}(x) = -\cos x, f^{(4k+3)}(x) = \operatorname{sen} x\,,$$

per $k \in \mathbb{N}$, e, in $x_0 = 0$,

$$f^{(4k)}(0) = 1, f^{(4k+1)}(0) = 0, f^{(4k+2)}(0) = -1, f^{(4k+3)}(0) = 0\,.$$

Dunque, con considerazioni analoghe a quelle per il seno, la funzione coseno è sviluppabile in serie di Taylor (Maclaurin) su tutta la retta reale e si ha

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} . \tag{2.18}$$

Come è noto si definiscono il *seno iperbolico* e il *coseno iperbolico* come segue

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tag{2.19}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{2.20}$$

I loro sviluppi in serie di Taylor, convergenti su tutto $\mathbb{R}$, ottenuti con considerazioni analoghe alle precedenti, sono

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{2.21}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{2.22}$$

2.4.3 La serie binomiale

Ci occuperemo dello sviluppo in serie di Maclaurin della funzione $f(x) = (1 + x)^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. La funzione considerata è definita per $x > -1$ se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 0$; se $\alpha > 0$ è definita per $x \geq -1$; se $\alpha \in \mathbb{N}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$; infine se α è un intero negativo è definita per $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$. Il caso $\alpha \in \mathbb{N}$ è banale poiché si riduce al calcolo del binomio di Newton. Supporremo perciò $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. La funzione $f(x)$ ha derivate di ogni ordine sul suo dominio e precisamente

$$f^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \cdots \cdot (\alpha - n + 1) \cdot (1 + x)^{\alpha - n},\ (n \in \mathbb{N}).$$

Al solito $f^{(0)}(x) = f(x)$. Perciò

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \cdots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}.$$

Abbiamo esteso a valori $\alpha \notin \mathbb{N}$ la definizione e notazione dei coefficienti binomiali.

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \cdots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!}. \tag{2.23}$$

La serie di Maclaurin relativa alla funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$, con centro in $x_0 = 0$, è dunque

$$1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \ldots, \tag{2.24}$$

che diremo *serie binomiale.*
Dimostriamo che il raggio convergenza della serie binomiale è $R = 1$ e che in $]-1, 1[$ la serie ha come somma la funzione $(1+x)^\alpha$. Prendendo i valori assoluti dei termini della serie e supponendo $x \neq 0$, si trova

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left|\binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n} x^n\right|} = \left|\frac{\alpha - n}{n+1} \cdot x\right|.$$

Si trova facilmente $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = |x|$. Si conclude che la serie converge assolutamente se $|x| < 1$, non converge se $|x| > 1$, mentre resta dubbio in generale il caso $|x| = 1$. Mostriamo ora che la somma della serie è proprio $(1+x)^\alpha$. Diciamo comunque $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ su $I =]-1, 1[$. Sappiamo che $g \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Allora si può calcolare $g'(x)$ derivando a termine a termine:

$$g'(x) = \binom{\alpha}{1} + 2 \cdot \binom{\alpha}{2} x + \cdots + n \cdot \binom{\alpha}{n} x^{n-1} + \dots .$$

Si osserva poi che

$$k \cdot \binom{\alpha}{k} = k \cdot \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1)}{k \cdot (k-1)!} = \alpha \cdot \binom{\alpha - 1}{k - 1}$$

e quindi

$$g'(x) = \alpha + \alpha \cdot \binom{\alpha - 1}{1} x + \cdots + \alpha \cdot \binom{\alpha - 1}{n - 1} x^{n-1} + \dots .$$

Allora

$$\begin{aligned}
(1+x) \cdot g'(x) &= \alpha + \left[\alpha + \alpha \cdot \binom{\alpha - 1}{1}\right] x + \cdots + \\
&+ \left[\alpha \cdot \binom{\alpha - 1}{n - 1} + \alpha \cdot \binom{\alpha - 1}{n}\right] x^n + \cdots = \\
&= \alpha \left[1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \dots\right] = \\
&= \alpha \cdot g(x) .
\end{aligned}$$

Si è tenuto conto per stabilire l'uguaglianza che anche per i coefficienti binomiali cosí generalizzati vale la relazione

$$\binom{\alpha - 1}{n - 1} + \binom{\alpha - 1}{n} = \binom{\alpha}{n} .$$

Allora la funzione $\frac{g(x)}{(1+x)^\alpha}$ è costante su I dal momento che ha derivata nulla su I :

$$D \frac{g(x)}{(1+x)^\alpha} = \frac{(1+x) \cdot g'(x) - \alpha \cdot g(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} = 0 .$$

Poiché infine $\frac{g(x)}{(1+x)^\alpha}$ in $x = 0$ vale 1, si conclude che vale 1 su tutto I. Dunque

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \dots, \; -1 < x < 1 . \quad (2.25)$$

Sono interessanti alcuni casi particolari. Se $\alpha = -1$, si ha

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)\dots(-1-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{n!} = (-1)^n\,.$$

Si ritrova la serie geometrica di ragione $-x$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n \cdot x^n + \dots$$

Se $\alpha = -\frac{1}{2}$, vale

$$\begin{aligned}\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2}-1)\cdot\dots\cdot(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-1)}{n!} = \\ &= (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\dots\cdot(2n)} = (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,.\end{aligned}$$

Qui si è definito $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-1)$ e $(2n)!! = 2\cdot 4\cdot\dots\cdot(2n)$. Il simbolo $m!!$ si dice il *semifattoriale di* m e, come risulta da quanto precede, ha una definizione diversa a seconda che m sia pari o dispari. Si trova allora

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \dots + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \dots \quad (2.26)$$

Infine, se $\alpha = \frac{1}{2}$, otteniamo

$$\begin{aligned}\binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot\dots\cdot(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cdot\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-3)}{n!} = \\ &= (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot\dots\cdot(2n)} = (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\,,\end{aligned}$$

per $n \geq 2$, mentre per $n = 1$ si ha $\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$. In definitiva

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + \dots \quad (2.27)$$

2.4.4 Altri sviluppi in serie di Maclaurin

Conviene mettere in evidenza un'osservazione che ci permetterà di calcolare agevolmente lo sviluppo di Maclaurin di alcune funzioni, noto che sia lo sviluppo della loro derivata.

Lemma 2.4.1. *Sia $f(x)$ una funzione derivabile in $I =]-h, h[$, $h > 0$; se in I si ha*

$$f'(x) = a_1 + a_2 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^{n-1} + \ldots , \tag{2.28}$$

allora, detto $a_0 = f(0)$, vale

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \frac{a_2}{2} \cdot x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n} \cdot x^n + \ldots . \tag{2.29}$$

Dimostrazione: Le due serie (2.28) e (2.29) hanno lo stesso intervallo di convergenza e inoltre (2.29) si può derivare a termine a termine ottenendo (2.28). La somma di (2.29) e $f(x)$ possono differire al piú per una costante su I, ma poiché hanno lo stesso valore in $x = 0$, concludiamo che (2.29) ha come somma su I la funzione $f(x)$.

□

Possiamo osservare che ciò equivale a integrare tra 0 e x a termine a termine la (2.28).

Sviluppo del logaritmo

Poiché, come si è visto,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n \cdot x^n + \ldots \text{ in }]-1, 1[,$$

$D \log(1 + x) = \frac{1}{1+x}$ e $\log(1) = 0$, troviamo il seguente sviluppo in *serie logaritmica o di Mercatore,* (1668)

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots \text{ in }]-1, 1[. \tag{2.30}$$

Qui e altrove verrà utilizzato il seguente

Teorema 2.4.2. [Abel] *Se una serie di potenze $\sum a_n x^n$ ha raggio di convergenza R e converge in $x = R$, allora la convergenza è uniforme su tutto $[0, R]$.*

Il Teorema di Abel afferma dunque che la somma della serie è una funzione continua su $[0, R]$, in quanto somma di una serie uniformemente convergente di funzioni continue. Se la somma della serie è data dalla funzione (necessariamente continua) $f(x)$ in $]-R, R[$ si conclude che $f(R) = \sum a_n R^n$.
La serie del logaritmo converge anche in $x = 1$ e quindi la somma della serie logaritmica per $x = 1$ (è la serie che abbiamo detto di Leibniz) è $\log 2$. In generale questa serie converge lentamente e non è molto utile per il calcolo del logaritmo.
Considerando la somma della serie di Mercatore valutata in x e in $-x$, si trova la serie detta di Gregory, che è molto più conveniente per il calcolo effettivo dei logaritmi

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \cdot (x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots) \text{ in }]-1, 1[. \tag{2.31}$$

Si trova che $\dfrac{1+x}{1-x} = 2$ per $x = \frac{1}{3}$. Dunque, per il $\log 2$ si trova la seguente serie molto più velocemente convergente

$$\log 2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \cdots + \frac{2}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} + \ldots .$$

Sviluppo dell'arcotangente

La derivata di $\arctan x$ è $\frac{1}{1+x^2}$. Lo sviluppo di quest'ultima funzione si ottiene dal precedente sviluppo, sostituendo x con x^2. Si trova

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n \cdot x^{2n} + \ldots \text{ in }]-1, 1[.$$

Tenuto conto che $\arctan(0) = 0$ si trova finalmente

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \text{ in }]-1, 1[. \tag{2.32}$$

Questa serie che si dice ciclometrica converge, per il criterio di Leibniz, anche in $x = 1$ e per il citato teorema di Abel (2.4.2) la sua somma è proprio $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Dunque

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots .$$

Sviluppo dell'arcoseno

Se $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Dunque, poiché

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} + \ldots , \tag{2.33}$$

si ha

$$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots . \tag{2.34}$$

Per $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ si trova la seguente espressione per $\frac{\pi}{4}$, piú rapidamente convergente di quella dedotta dallo sviluppo dell'arcotangente.

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots\right].$$

2.5 Serie di potenze nel campo complesso

Prima di studiare le serie di potenze nel campo complesso, sarà opportuno estendere le nozioni di continuità, limite e derivata a funzioni di variabile complessa e a valori complessi. Sarà un compito semplice e rapido, perché sostanzialmente le nozioni sono quelle che abbiamo incontrato per funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pur di fare i necessari cambiamenti per adattarci al nuovo ambiente. In pratica: $|w|$ è il modulo del numero complesso $w = u + iv$, cioè $|w| = \sqrt{u^2 + v^2}$; intorno di un punto w è ogni soprainsieme di un disco di centro w e raggio $r > 0$.

Definizione 2.5.1. [Continuità.] *Diremo che una funzione $f\colon D(\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ è continua in $z_0 \in D$ se*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ tale che } \forall z \in D,\ |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\,.$$

Equivalentemente, se

$$\forall V \text{ intorno di } f(z_0)\ \exists U \text{ intorno di } z_0 \text{ tale che } \forall z \in D,\ z \in U \Rightarrow f(z) \in V\,.$$

Una funzione è continua su tutto D se è continua in ogni punto di D.

Definizione 2.5.2. [Limite.] *Data una funzione $f\colon D(\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, se z_0 è punto d'accumulazione per D, diremo che*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \ell \in \mathbb{C}$$

se

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ tale che } \forall z \in D,\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon\,.$$

Equivalentemente, se

$$\forall V \text{ intorno di } \ell,\ \exists U \text{ intorno di } z_0 \text{ tale che } \forall z \in D \cap U \setminus \{z_0\} \textit{ si ha } f(z) \in V\,.$$

Analogamente si può definire il limite infinito o per $z \to \infty$.

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$$

se

$$\forall K\ \exists\delta > 0 \text{ tale che } \forall z \in D,\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > K\,.$$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \ell \in \mathbb{C}$$

se

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists H \text{ tale che } \forall z \in D,\ |z| > H \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon\,.$$

Ovviamente potrà verificarsi l'eventualità che sia

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty\,.$$

Lasciamo al lettore il compito di esplicitare questo definizione con disuguaglianze come pure di esprimere le tre ultime definizioni con il linguaggio degli intorni.

Definizione 2.5.3. [Derivabilità.] *Diremo che una funzione* $f\colon D(\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *è derivabile, in senso complesso, in* $z_0 \in D$ *se*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \ell \in \mathbb{C}\,.$$

Il limite del rapporto incrementale si dirà la derivata di f *in* z_0*. Useremo le seguenti notazioni*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) = (Df)(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0)\,.$$

Le regole di derivazioni già note nel campo reale continuano a valere nel campo complesso, poiché sono basate sulla nozione di limite che è sostanzialmente invariata. In particolare, per $n \geq 2$,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} (z^{n-1} + z^{n-2}\cdot z_0 + \cdots + z_0^{n-1}) = n\cdot z_0^{n-1}\,.$$

Ovviamente $D(z) = 1$ e inoltre $D(k) = 0, k \in \mathbb{C}$. In conclusione, se $f(z)$ e $g(z)$ sono funzioni derivabili in senso complesso, abbiamo le regole di derivazione già note:

$$\begin{aligned}
D\left(a\cdot f(z)\right) &= a\cdot f'(z)\\
D\left(f(z)+g(z)\right) &= f'(z)+g'(z)\\
D\left(f(z)\cdot g(z)\right) &= f'(z)\cdot g(z) + f(z)\cdot g'(z)\\
D\left(\frac{1}{g(z)}\right) &= \frac{-g'(z)}{g^2(z)}\\
D\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) &= \frac{f'(z)\cdot g(z) - f(z)\cdot g'(z)}{g^2(z)}\,.
\end{aligned}$$

La derivazione dunque è un'operazione lineare e quindi sappiamo derivare ogni polinomio. Se $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$, allora

$$\begin{aligned}
P'(z) &= D\left(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n\right) =\\
&= n a_0 z^{n-1} + (n-1)a_1 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Infine osserviamo che, se $n > 0, n \in \mathbb{N}$, $z \neq 0$,

$$D(z^{-n}) = D(\frac{1}{z^n}) = \frac{-n\cdot z^{n-1}}{z^{2n}} = \frac{-n}{z^{n+1}} = -n\cdot z^{-n-1}\,.$$

Cioè la regola $D(z^m) = m\cdot z^{m-1}$ vale per ogni $m \in \mathbb{Z}$.

Non tutte le funzioni di variabile complessa sono derivabili. Per esempio la funzione $f(z) = \bar{z}$, dove $\bar{z}$ indica il complesso coniugato di z, non lo è . Infatti, se $z = x + iy_0$,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - iy_0 - x_0 + iy_0}{x + iy_0 - x_0 - iy_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1\,,$$

mentre se $z = x_0 + iy$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\bar z - \bar z_0}{z - z_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{x_0 - iy - x_0 + iy_0}{x_0 + iy - x_0 - iy_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{-i(y-y_0)}{i(y-y_0)} = -1\,.$$

Dunque il limite non è indipendente dalla direzione lungo la quale lo si calcola. Perciò non esiste il limite in senso complesso. Un'altra funzione di variabile complessa non derivabile è $f(z) = |z|$. Si trova con qualche calcolo che, se $z = x + iy_0$, allora

$$\lim_{z\to z_0} \frac{|z| - |z_0|}{z - z_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x^2 + y_0^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{x + iy_0 - x_0 - iy_0} = \frac{x_0}{|z_0|}\,,$$

mentre se $z = x_0 + iy$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{|z| - |z_0|}{z - z_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{\sqrt{x_0^2 + y^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{x_0 + iy - x_0 - iy_0} = -i\frac{y_0}{|z_0|} \neq \frac{x_0}{|z_0|}\,.$$

Definizione 2.5.4. *Data una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri complessi, la serie di funzioni*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n\,, \tag{2.35}$$

si dice una serie di potenze nel campo complesso *di* centro z_0 *e* coefficienti a_n*.*

Anche nel caso complesso vale un Lemma di Abel, che già conosciamo per le serie di potenze nel campo reale (2.2.1)

Lemma 2.5.1. [Abel]. *Sia data la serie di potenze (2.35),*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n\,.$$

Se la serie converge per qualche valore $z^* \in \mathbb{C}$, converge per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z - z_0| < |z^* - z_0|$.

La dimostrazione si fa come nel caso reale, pur di intendere che al posto del valore assoluto, dove appare, c'è il modulo. Analogamente si può stabilire un teorema che descrive il dominio di convergenza di una serie di potenze

Teorema 2.5.2. *Sia data la serie di potenze (2.35),*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n\,.$$

Esiste un numero $R \geq 0$ tale che il dominio di convergenza della serie è contenuto in un disco chiuso di centro z_0 e raggio R. I casi $R = 0$ e $R = +\infty$ sono possibili. Il dominio di convergenza accidentale $A \subset \{z\colon |z - z_0| = R\}$ può essere vuoto o essere strettamente contenuto o coincidere con la circonferenza $\{z\colon |z - z_0| = R\}$.

Il raggio di convergenza della serie, analogamente al caso reale, è dato da

$$R = \sup \left\{ |z - z_0| \colon \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n \text{ converge} \right\} .$$

(a) Se consideriamo la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, sappiamo che $R = 1$ e che essa non converge per $|z| = 1$. Infatti se $|z| = 1$ il termine generale non è infinitesimo. Dunque $A = \emptyset$, e l'insieme di convergenza è $K = \{z \colon |z| < 1\}$.

(b) Se consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n+1}$ per essa $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = |z| \cdot \frac{n+1}{n+2} = |z|$. Di qui si deduce che il raggio di convergenza della serie è $R = 1$. Infatti la serie converge per $|z| < 1$ e non converge per $|z| > 1$. Che cosa si può dire per $|z| = 1$? Se $z = 1$ si trova la serie armonica (1.16) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ che diverge, ma se $z = -1$ si trova la serie di Leibniz (1.34), $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}$, che è convergente. Dunque $A \subset \{z \colon |z| = 1, z \neq 1\}$ e $K \subset \{z \colon |z| \leq 1, z \neq 1\}$.

(c) Se consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)^2}$, troviamo, con considerazioni analoghe a quelle fatte in precedenza, che $R = 1$. Se poi $|z| = 1$, per il criterio sull'ordine d'infinitesimo, converge la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ e quindi la nostra serie per $|z| \leq 1$. Dunque $A = \{z \colon |z| = 1\}$ e $K = \{z \colon |z| \leq 1\}$.

Come nel caso reale, si stabilisce che la somma di una serie di potenze è una funzione continua e derivabile nel cerchio di convergenza regolare $C_{z_0}^R = \{z \colon |z - z_0| < R\}$. In particolare, vale anche nel campo complesso il teorema di derivabilità a termine a termine (2.2.3). Dunque una serie di potenze rappresenta in $C_{z_0}^R$ una funzione $f(z)$ di classe $\mathcal{C}^\infty$. Osservando poi che, esattamente come nel caso reale,

$$f^{(k)}(z_0) = k! \cdot a_k, \ k \in \mathbb{N} ,$$

si può scrivere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n .$$

Cioè la somma di una serie di potenze è sviluppabile in serie di Taylor con centro in z_0. Anzi si può dimostrare che è sviluppabile in serie di Taylor con centro in tutti i punti $z_1 \in C_{z_0}^R$. Si può inoltre dimostrare che questo sviluppo in serie con centro in z_1 ha raggio di convergenza R_1, con $R - |z_1 - z_0| \leq R_1 \leq R - |z_1 + z_0|$.

Un insieme $D \subseteq \mathbb{C}$ si dice aperto se è intorno di ogni suo punto (cioè vale la stessa definizione data per gli aperti di $\mathbb{R}$). Supporremo da ora in poi che una funzione $f : D \to \mathbb{C}$ sia definita su un aperto di $\mathbb{C}$. Valgono le seguenti

Definizione 2.5.5. *Una funzione $f : D \to \mathbb{C}$ si dice* olomorfa *in D se è derivabile in ogni punto $z_0 \in D$.*

Definizione 2.5.6. *Una funzione $f : D \to \mathbb{C}$ si dice* analitica *in D se è sviluppabile in serie di Taylor in ogni punto $z_0 \in D$, cioè se per ogni $z_0 \in D$ esiste un numero $R_0 > 0$ tale che $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ per ogni $z \in C_{z_0}^{R_0}$, con $C_{z_0}^{R_0} \subseteq D$.*

Le teorie sviluppate da Cauchy e da Weierstrass hanno mostrato che le due nozioni coincidono per le funzioni definite su un aperto di $\mathbb{C}$.

2.6 Funzioni elementari nel campo complesso

2.6.1 La funzione esponenziale

Definizione 2.6.1. *Definiamo la funzione e^z come la somma della serie esponenziale*

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \ldots . \tag{2.36}$$

Poiché come abbiamo piú volte osservato, la serie esponenziale converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$, concludiamo che la somma della serie esponenziale definisce in tutto $\mathbb{C}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$. Si vede poi facilmente che la derivata a termine a termine della serie esponenziale è la serie stessa. Dunque

$$D(e^z) = e^z \quad .$$

Nella definizione abbiamo scelto come centro l'origine di $\mathbb{C}$. Che cosa accade se scegliamo un centro $z_0 \neq 0$ e calcoliamo la serie di Taylor relativa a quel punto? Poiché $f^{(n)}(z_0) = e^{z_0}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e poiché, come abbiamo in precedenza ricordato la somma di una serie di potenze è analitica in ogni punto del suo disco aperto di convergenza (nel nostro caso tutto $\mathbb{C}$), otteniamo la serie

$$e^{z_0} + e^{z_0} \cdot (z - z_0) + \frac{e^{z_0}}{2!} \cdot (z - z_0)^2 + \cdots + \frac{e^{z_0}}{n!} \cdot (z - z_0)^n + \ldots \quad .$$

La serie è convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$. Infatti, se a_n è il modulo dell'n-esimo termine della serie, si trova

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{|e^{z_0}|}{(n+1)!} \cdot |z - z_0|^{n+1}}{\frac{|e^{z_0}|}{n!} \cdot |z - z_0|^n} = \frac{|z - z_0|}{n+1} \to 0, n \to +\infty\,.$$

Per quanto detto in precedenza, la somma della serie di Taylor di e^z con centro in z_0 convergente in tutto $\mathbb{C}$ alla funzione e^z. Si trova in definitiva

$$e^z = e^{z_0} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!} = e^{z_0} \cdot e^{(z-z_0)}\,.$$

Se poniamo $z_1 = z - z_0$ e dunque $z = z_0 + z_1$, la precedente relazione si scrive

$$e^{z_0+z_1} = e^{z_0} \cdot e^{z_1} \quad . \tag{2.37}$$

Dunque, anche nel campo complesso vale la relazione funzionale d'addizione dell'esponenziale.

2.6.2 Le funzioni seno e coseno

Definiremo la funzione *seno di un numero complesso* z come somma della seguente serie assolutamente convergente in tutto $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}\,. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Analogamente definiremo la funzione *coseno di un numero complesso* z come somma della seguente serie assolutamente convergente in tutto $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\,. \end{aligned} \tag{2.39}$$

2.6.3 Le formule d'Eulero

Se ora valutiamo

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + (iz) + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots + \frac{(iz)^n}{n!} + \cdots = \\ &= 1 + i \cdot z - \frac{z^2}{2!} - i \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \end{aligned}$$

Si può dimostrare che sotto l'ipotesi di convergenza assoluta (che qui è verificata) una serie può essere permutata e associata arbitrariamente, senza alterarne la somma. Qui potremo associare tutti i termini che contengono esplicitamente la i e quelli che non la contengono, ottenendo

$$e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right) + i \cdot \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\right) ,$$

cioè

$$e^{iz} = \cos z + i \cdot \operatorname{sen} z \quad . \tag{2.40}$$

La precedente e la formula per $-i \cdot z$:

$$e^{-iz} = \cos z - i \cdot \operatorname{sen} z \quad ,$$

si dicono le *prime formule d'Eulero*. A partire da queste, per somma e sottrazione, si trovano le *seconde formule d'Eulero*

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \operatorname{sen} z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad . \end{aligned} \tag{2.41}$$

Se $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, allora

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \operatorname{sen} y) . \tag{2.42}$$

La precedente formula può essere vista come una definizione alternativa dell'esponenziale nel campo complesso. Questo punto di vista è confortato dalla seguente osservazione. Se consideriamo il limite per $n \to +\infty$ della successione di numeri complessi

$$(1 + \frac{x+iy}{n})^n,\ x,\ y \in \mathbb{R} \quad ,$$

troviamo che tale limite è proprio $e^x \cdot (\cos y + i \cdot \operatorname{sen} y)$. Infatti si trova che il limite del modulo della successione

$$\left|(1 + \frac{x+iy}{n})^n\right| = \left[1 + \frac{1}{n} \cdot \left(2x + \frac{x^2+y^2}{n}\right)\right]^{n/2}$$

è proprio e^x. Si vede poi che il limite dell'argomento della successione è y. Qui la discussione è un po' delicata. La parte reale di $(1 + \dfrac{x+iy}{n})$ tende a 1, per $n \to +\infty$; perciò è positiva per valori di n sufficientemente grandi. Perciò un argomento del numero complesso $(1 + \frac{x+iy}{n})$, che diremo l'argomento principale del numero (denotato con Arg - si veda a pag. 63), è compreso tra $-\pi/2$ e $\pi/2$:

$$\operatorname{Arg}(1 + \frac{x+iy}{n}) = \arctan \frac{y/n}{(n+x)/n} = \arctan \frac{y}{n+x} .$$

Allora

$$\arg(1+\frac{x+iy}{n})^n = n\cdot \mathrm{Arg}\,(1+\frac{x+iy}{n}) = n\cdot \arctan\frac{y/n}{(n+x)/n} \to y\,.$$

È chiaro allora che la formula d'addizione dell'esponenziale si può stabilire a partire dalla definizione di e^z, come segue: $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos x + i\mathrm{sen}\, y)$.

Ricordiamo infine come paradigmatica la formula

$$e^{i\pi} = -1 \tag{2.43}$$

che simbolizza l'unità della Matematica, perché e rappresenta l'Analisi, i rappresenta l'Algebra e π la Geometria.
A partire dalle precedenti formule d'Eulero (2.40) e (2.41), si verifica facilmente, con qualche calcolo, che valgono le formule d'addizione per $\mathrm{sen}\, z$ e $\cos z$:

$$\begin{aligned}\cos(z_1+z_2) &= \cos z_1\cdot\cos z_2 - \mathrm{sen}\, z_1\cdot \mathrm{sen}\, z_2 \quad \text{e}\\ \mathrm{sen}\,(z_1+z_2) &= \mathrm{sen}\, z_1\cdot \cos z_2 + \cos z_1\cdot \mathrm{sen}\, z_2\,.\end{aligned}$$

Infine vale pure la formula fondamentale

$$\mathrm{sen}^2 z + \cos^2 z = 1\,,$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$. Sono poi da ricordare le formule

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}\,(iz) &= i\cdot \mathrm{senh}(z)\\ \cos(iz) &= \cosh(z)\,,\end{aligned}$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$.

2.6.4 Il logaritmo nel campo complesso

Sia dato un numero complesso $z \neq 0$. In forma esponenziale si scriverà $z = \rho\cdot e^{i\vartheta}$, dove ρ è il modulo di z e ϑ è un suo argomento. Un numero $w = x+iy$ si dirà un *logaritmo di* z se

$$e^w = z \quad ,$$

cioè se

$$e^{x+iy} = e^x\cdot e^{iy} = \rho\cdot e^{i\vartheta}\,.$$

Ricordiamo che due numeri complessi sono uguali se e solo se hanno lo stesso modulo ed i loro argomenti differiscono per multipli di $2\cdot\pi$. Perciò avremo

$$\begin{aligned} e^x &= \rho\,,\\ y &= \vartheta + k\cdot 2\pi, k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

Dunque ogni numero complesso $z \neq 0$ ha infiniti logaritmi, precisamente tutti i numeri complessi

$$w = \log(\rho) + i \cdot (\vartheta + k \cdot 2\pi) = \log(|z|) + i \cdot (\arg(z) + k \cdot 2\pi)\,, \tag{2.44}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.
Per esempio il numero $z = 2i$ ha gli infiniti logaritmi $\log(2i) = \log(2) + i \cdot (\pi/2 + k \cdot 2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
Dunque $\log(z)$ *non* è una funzione nel campo complesso.

Al fine di ottenere una funzione, cioè una legge che a ogni numero complesso $z \neq 0$ faccia corrispondere un unico numero complesso, si deve limitare la variabilità dell'argomento del numero complesso z a quello che si dice il *valore principale dell'argomento*, denotato con $\mathrm{Arg}\,(z)$. Si sceglie comunemente un intervallo di ampiezza 2π che è $\{z\colon 0 \leq z < 2\pi\}$ o piuttosto $\{z\colon -\pi < z \leq \pi\}$. Naturalmente andrà precisato ogni volta quale sia l'argomento principale scelto. In questo modo otterremo la *determinazione principale del logaritmo* di un numero $z \neq 0$, data da $\log(z) = \log(|z|) + i \cdot \mathrm{Arg}\,(z)$. In particolare, quale che sia la scelta fatta, il valore principale del logaritmo di $2i$ è $\log(2i) = \log(2) + i \cdot \pi/2$, mentre $\log(-5) = \log(5) + i \cdot \pi$. Se $a \neq 0$, $a \in \mathbb{C}$, definiremo

$$a^z = e^{z \cdot \log a} = e^{z \cdot (\log|a| + i \cdot \mathrm{Arg}\,(a) + i \cdot k 2\pi)},\ k \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.45}$$

Dunque a^z cessa di essere una funzione, a meno che non si scelga la determinazione principale del logaritmo. Da questo punto di vista, anche e^z, quale l'abbiamo definito, è la determinazione principale dell'esponenziale.
Le stesse considerazioni si possono fare per $z^\alpha = e^{\alpha \cdot \log z}$, con $\alpha \in \mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2.6.5 Cenno all'arcoseno e all'arcotangente

Assegnato $z \in \mathbb{C}$, risolvendo l'equazione

$$z = \operatorname{sen} w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}\,,$$

si trova

$$w = -i \log\left[iz + (1 - z^2)^{1/2}\right] = \operatorname{arcsen}(z)\,,$$

dove per $(1-z^2)^{1/2}$ si debbono considerare i due valori possibili e per il logaritmo gli infiniti possibili valori. Dunque l'arcoseno cessa di essere una funzione nel campo complesso. Tuttavia se ne può isolare una determinazione principale, come si è fatto per il logaritmo, lavorando in un opportuno sottoinsieme del campo complesso.
Analogamente, assegnato $z \in \mathbb{C}$, risolvendo l'equazione

$$z = \tan w = -i \cdot \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}\,,$$

si trova

$$w = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right) = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{i-z}{i+z} \right) = \arctan(z)\,.$$

Anche questa non è una funzione definita su $\mathbb{C}$, poiché ha infiniti valori, ma la scelta della determinazione principale del logaritmo, conduce a definire la determinazione principale dell'arcotangente. Se prendiamo la restrizione della funzione e^z alla striscia $S = \{z = x + iy \colon x \in \mathbb{R}, |y| < \pi\}$, allora l'inversa di questa restrizione è la determinazione principale del logaritmo. Tale funzione è derivabile in senso complesso e vale la stessa regola valida per la derivabilità delle funzioni invertibili a valori reali. Se $w = \log z$, $z = e^w$, si ha

$$D(\log z) = \frac{1}{D(e^w)} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z} \quad .$$

Si trova poi, che anche nel campo complesso vale

$$D(\arctan z) = \frac{1}{1+z^2} \quad .$$