Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Laurea in ingegneria dell'Informazione e Industriale.
Anno Accademico 2012/2013
Programma finale del corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria (6cfu)
alla data del giorno: 19 dicembre 2012

Lezioni ed Esercitazioni: Prof. Gino Tironi

1 Funzioni di variabile complessa

Richiami sui numeri complessi. La sfera complessa. Limite e continuità per funzioni complesse. Teorema di Jordan (enunciato). Derivabilità e condizioni di monogeneità di Cauchy-Riemann: necessità (dim). Sufficienza: se una funzione ha parte reale e parte immaginaria differenziabili in (x_0, y_0) e valgono le condizioni di monogeneità allora $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ è derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0$(dim) . Funzioni a variazione limitata; loro principali proprietà (sd). Somme alla Riemann-Stieltjes. Integrale di Riemann-Stieltjes. Sua esistenza (sd) e principali proprietà (sd). Integrali di linea in $\mathbb{C}$, in particolare per archi di curva generalmente regolari. Teorema fondamentale di Cauchy sulle funzioni olomorfe (dim solo per i triangoli). Conseguenze ed estensioni. Formula integrale per la funzione e per le sue derivate successive (dim per $f(z)$ e per $f'(z)$). Teorema di Morera (dim). Proprietà di massimo (dim) (Facoltativa la dimostrazione che se $f(z)$ ha modulo massimo in un punto interno allora è costante). Teorema della media (dim). Sviluppo in serie di Taylor di funzioni analitiche (dim). Serie di Laurent (dim). Poli e singolarità essenziali. Teorema di Picard (sd). Teorema di Weierstrass (principio d'identità per le serie di potenze, prima forma) (dim). Corollario: Principio d'identità delle funzioni olomorfe (seconda forma) (dim); prolungamento analitico. Funzioni intere. Teorema di Liouville (dim). Applicazione al teorema fondamentale dell'algebra (dimostrazione). Teorema dei residui (dim). Calcolo dei residui; applicazioni al calcolo d'integrali. Integrali su intervalli illimitati. Lemma di Jordan (dim). Il residuo all'infinito. Valore principale dell'integrale secondo Cauchy. Il caso di $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$, con $z \in \Gamma(I)$. Il logaritmo nel piano complesso. Teorema dell'indicatore logaritmico (dim) e generalizzazioni. Teorema fondamentale dell'algebra (altra dimostrazione). Principio dell'argomento (sd). Teorema di Rouché (sd). Prolungamento analitico di un elemento di funzione lungo un cammino. Esempi di elementi non prolungabili: le somme delle serie di Weierstrass e di Fredholm. Serie lacunari. Esempio della polidromia nel caso di $\sqrt{1 + z}$. Punti di diramazione e superficie di Riemann per $\sqrt{z}$, $\sqrt[n]{z}, \log z$. Le funzioni olomorfe come rappresentazioni conformi (dim). Un teorema di Riemann sulla rappresentazione conforme (sd). La funzione gamma; rappresentazione integrale e cenno alla formula $\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}G(z)$ con $G(z)$ funzione intera.Trasformazioni bilineari di Möbius. Cenno alla formula di Stirling.

2 Serie di Fourier

Serie di Fourier in generale. Determinazione dei coefficienti. Disuguaglianza di Bessel (dim). Equazione di Parseval. Lemma di Riemann-Lebesgue in generale (sd). Serie trigonometriche. Il sistema di funzioni $\{1\} \cup \{\cos kx, \sin kx : k \in \mathbb{N}^+\}$ è ortogonale. Determinazione dei coefficienti. Il sistema di funzioni ortogonali e^{ikx}, $k \in \mathbb{Z}$. Relazione fra i coefficienti nei due sistemi. Convergenza puntuale: criterio di Dini (dim). Convergenza uniforme (Dimostrazione facoltativa). Cambiamento di scala. Somme alla Cesàro. Teorema di Féjer (Dimostrazione facoltativa). Funzioni continue e convergenza di polinomi trigonometrici. Le funzioni continue sono individuate dalla loro serie di Fourier (cenno). Teoremi di Kolmogoroff, di Katznelson e Kahane (cenni). Nucleo di Féjer e nucleo di Dirichlet: confronto e principali proprietà. Fenomeno di Gibbs (sd).

3 Un accenno all'integrale di Lebesgue e agli spazi L^p

Integrale di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$: insiemi di misura nulla secondo Lebesgue, funzioni a scala. Funzioni misurabili. Teoremi fondamentali: di Beppo Levi o della convergenza monotona; di Lebesgue o della convergenza dominata; teorema di Fubini; teorema di Tonelli. Alcuni esempi. Insiemi misurabili e alcune loro proprietà. Integrali di Riemann e di Lebesgue. Spazi vettoriali normati completi. Spazi di Banach e spazi di Hilbert. Il sup essenziale. Gli spazi $L^p(A)$ con $p = 1, 2, \infty$. Loro completezza (sd). Spazi $L^p(A)$, con $p \geq 1$. Sono spazi vettoriali su $\mathbb{C}$. Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski (sd). Il supporto di una funzione. Lo spazio vettoriale $\mathcal{D}(A)$ delle funzioni a supporto compatto di classe $\mathcal{C}^\infty$ su un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$.

4 Un accenno alle distribuzioni

Le distribuzioni o funzioni generalizzate. Spazio delle funzioni test o di prova. Convergenza nel senso di $\mathcal{D}(A)$. Funzioni localmente integrabili e funzionali lineari continui. Convergenza nel senso delle distribuzioni. Completezza di $\mathcal{D}'(A)$ (sd). Distribuzioni di Heaviside e di Dirac. Distribuzione Valore Principale di $\frac{1}{x}$. Derivazione di distribuzioni (giustificazione della formula $\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, v \rangle = -\langle u, \frac{\partial v}{\partial x_i} \rangle$). Derivazione della distribuzione di Heaviside (dim). Convoluzione di funzioni $L^1(\mathbb{R}^n)$. Continuità e derivabilità di una convoluzione. Convoluzione di distribuzioni. In particolare $u * \delta = u$.

5 Trasformate di Fourier

Trasformata di Fourier in $\mathbb{R}^n$: sue principali proprietà. La trasformata $\hat{f}(\xi)$ è continua (dim), limitata (dim), ha limite 0 per $|\xi| \to \infty$: dimostrazione del lemma di Riemann-Lebesgue nel caso unidimensionale (dim). Cioè: $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ è un'applicazione lineare e continua. Altre proprietà fondamentali: traslazione, similitudine, coniugazione, moltiplicazione per x_k, moltiplicazione per $e^{i\langle a,x\rangle}$, trasformata di $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ (tutte con dim). Convoluzione e approssimazione. Trasformata della convoluzione (dim). Formula di inversione (sd). Spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La trasformata di Fourier è una biiezione tra lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$ e lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi)$ (dim).La trasformata di Fourier di $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ha limite 0 per $|\xi| \to \infty$: dimostrazione del lemma di Riemann-Lebesgue nel caso generale (dim).Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Teorema di Plancherel. Lemma preliminare: cioè $\langle f, g\rangle_{L^2} = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{L^2}$ per funzioni in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (dim facoltativa). Caso particolare di $f \in L^2(\mathbb{R})$: $\hat{f}(\xi) = \lim_{k\to+\infty} \int_{-k}^{k} e^{-ix\xi} f(x)\,dx$. Convergenza nel senso di $\mathcal{S}$. Cenno alle distribuzioni temperate: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Funzioni a crescenza lenta e distribuzioni temperate. Trasformata di Fourier di una distribuzione temperata.

6 Trasformate di Laplace

Trasformata di Laplace unilatera. Esempi di funzioni trasformabili e non. Funzioni di ordine esponenziale. Se esiste $\mathcal{L}(f)(s_0)$, allora esiste $\mathcal{L}(f)(s)$, per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\Re(s) > \Re(s_0)$. Ascissa di convergenza semplice e assoluta, semipiano di convergenza. Convergenza uniforme di integrali in un semipiano, sottopiano proprio del semipiano di convergenza, per funzioni di ordine esponenziale (sd). Convergenza uniforme in una regione angolare (sd). Proprietà della trasformata: è olomorfa nel semipiano di convergenza (se la funzione ha ordine esponenziale) (dim). Altre proprietà fondamentali: traslazione, cambiamento di scala, moltiplicazione per e^{at} (tutte con dim). Calcolo delle derivate della trasformata. Un lemma sul limite di $e^{\sigma T} \int_0^T f(t)dt$ con $\mathrm{Re}(\sigma) \geq \max(\lambda_0, 0)$, per una funzione trasformabile (sd). Trasformata della derivata di una funzione (dim). Trasformata di una funzione periodica per $t \geq 0$ (dim). Trasformata di una convoluzione (dim). Antitrasformata: cenno alla formula di Riemann-Fourier (Integrale di Bromwich - Mellin). Antitrasformata di funzioni razionali. Applicazione alle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Trasformata di $\delta(t)$.

7 Esercitazioni

Esempi di funzioni derivabili e non in senso complesso: $f(z) = \overline{z}$ e $f(z) = |z|$, non sono olomorfe. Esempio di funzione che soddisfa le condizioni di monogeneità ma non è neppure continua. Calcolo di integrali di linea in $\mathbb{C}$ e olomorfismo delle funzioni: esempi di integrali estesi a circuiti, nulli e non nulli per funzioni non olomorfe. I polinomi, e^z, $\operatorname{sen} z, \cos z$ sono funzioni intere. Calcolo d'integrali con il metodo dei residui. Riduzione a fratti semplici di funzioni razionali, usando i residui. Funzioni armoniche in $\mathbb{R}^2$: la parte reale e la parte immaginaria di una funzione olomorfa sono armoniche. Localizzazione degli zeri di una funzione complessa. Calcolo di integrali di funzioni polidrome. $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$. Calcolo delle serie di Fourier di alcune funzioni: $\mathrm{sgn}(x), x, |x|, x^2, \ldots$. Esempi di somme di alcune serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$ e simili. Funzioni assolutamente continue e primitive. La "scalinata del diavolo" (funzione di Cantor - Vitali). $||u||_p$ non è una norma se $0<p<1$: non vale la disuguaglianza triangolare. Esempi di funzioni in $\mathcal{C}^\infty$ o in L^1_{loc} che convergono alla distribuzione δ di Dirac. $\Delta\left(-\frac{1}{4\pi||x||}\right)=\delta(x)$ in $\mathbb{R}^3$. Esempi di trasformate di Fourier. In particolare $\mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{2}})(\xi)=\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Esempi di successioni di funzioni convergenti in $\mathcal{S}$ ma non in $\mathcal{D}$. La distribuzione e^x non è una distribuzione temperata.Trasformata di Fourier di $\delta(x)$ e di 1: $\hat{\delta}=1$ e $\hat{1}=2\pi\delta(x)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. $\mathcal{F}(P\frac{1}{x})(\xi)=\frac{\pi}{i}\mathrm{sign}(\xi)$. Applicazione della trasformata di Fourier all'equazione del calore. Risoluzione di equazioni e sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti con la trasformata di Laplace. Cenno alla risoluzione di equazioni differenziali ordinarie lineari con coefficienti lineari (il metodo di Laplace). Cenno alla trasformata bilatera e al suo dominio di convergenza.