Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Laurea in ingegneria dell'Informazione, Industriale (Automazione), Navale (Laurea specialistica).
Anno Accademico 2009/2010
Programma finale del corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria (6cfu)
alla data del giorno: 16 dicembre 2009

Lezioni ed Esercitazioni: Prof. Gino Tironi

1 Funzioni di variabile complessa

Richiami sui numeri complessi. La sfera complessa. Limite e continuità per funzioni complesse. Teorema di Jordan (enunciato). Derivabilità e condizioni di monogeneità di Cauchy-Riemann (dim). Integrazione lungo cammini regolari di $\mathbb{C}$. Funzioni a variazione limitata; loro principali proprietà (dim). Somme alla Riemann-Stieltjes. Integrale di Riemann-Stieltjes. Sua esistenza (sd) e principali proprietà. Teorema di Cauchy sulle funzioni olomorfe. Conseguenze ed estensioni. Formula integrale per la funzione e per le sue derivate successive (dim per $f(z)$ e per $f'(z)$). Teorema di Morera (dim). Proprietà di massimo (dim) (Facoltativa la dimostrazione che se $f(z)$ ha modulo massimo in un punto interno allora è costante). Teorema della media. Sviluppo in serie di Taylor di funzioni analitiche (dim). Serie di Laurent (dim). Poli e singolarità essenziali. Teorema di Picard (sd). Teorema di Weierstrass (principio d'identità per le serie di potenze, prima forma) (dim). Corollario: Principio d'identità delle funzioni olomorfe (seconda forma) (dim); prolungamento analitico. Funzioni intere. Teorema di Liouville (dim). Applicazione al teorema fondamentale dell'algebra (dim). Teorema dei residui (dim). Calcolo dei residui; applicazioni al calcolo d'integrali. Integrali su intervalli illimitati. Lemma di Jordan (dim). Valore principale dell'integrale secondo Cauchy. Il caso di $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$, con $z \in \Gamma(I)$. Il logaritmo nel piano complesso. Teorema fondamentale dell'algebra (altra dimostrazione). Principio dell'argomento (dim). Teorema dell'indicatore logaritmico (dim) e generalizzazioni. Teorema di Rouché (sd). Prolungamento analitico di un elemento di funzione lungo un cammino. Esempi di elementi non prolungabili: le somme delle serie di Weierstrass e di Fredholm. Serie lacunari. Esempio della polidromia nel caso di $\sqrt{1+z}$. Punti di diramazione per $\sqrt{z}$, $\sqrt[n]{z}, \log z$. Le funzioni olomorfe come rappresentazioni conformi (dim). Un teorema di Riemann sulla rappresentazione conforme (sd). Trasformazioni bilineari di Möbius. La funzione gamma; rappresentazione integrale e cenno alla formula $\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}G(z)$ con $G(z)$ funzione intera. Cenno alla formula di Stirling.

2 Serie di Fourier

Serie di Fourier in generale. Determinazione dei coefficienti. Disuguaglianza di Bessel (dim). Equazione di Parseval. Lemma di Riemann-Lebesgue. Serie trigonometriche. Convergenza puntuale: criterio di Dini e criterio di Dini generalizzato (dim). Convergenza uniforme (dim). Cambiamento di scala. Esempi: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$ e simili. Somme alla Cesàro. Teorema di Féjer (cenno). Funzioni continue e convergenza di polinomi trigonometrici. Le funzioni continue sono individuate dalla loro serie di Fourier (cenno). Teoremi di Kolmogoroff, di Katznelson e Kahane (cenni).

3 Un accenno all'integrale di Lebesgue

Integrale di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$: insiemi di misura nulla secondo Lebesgue, funzioni a scala. Funzioni misurabili. Teoremi fondamentali: di Lebesgue o della convergenza dominata; di Beppo Levi o della convergenza monotona; teorema di Fubini; teorema di Tonelli. Alcuni esempi. Spazi vettoriali normati completi. Spazi di Banach e spazi di Hilbert. Il sup essenziale. Gli spazi $L^p(A)$ con $p = 1, 2, \infty$. Loro completezza (sd). Spazi $L^p(A)$, con $p \geq 1$. Sono spazi vettoriali su $\mathbb{C}$. Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski (sd). Il supporto di una funzione. Lo spazio vettoriale $\mathcal{D}(A)$ delle funzioni a supporto compatto di classe $\mathcal{C}^\infty$ su un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$.

4 Un accenno alle distribuzioni

Le distribuzioni o funzioni generalizzate. Spazio delle funzioni test o di prova. Convergenza nel senso di $\mathcal{D}(A)$. Funzioni localmente integrabili e funzionali lineari continui. Convergenza nel senso delle distribuzioni. Completezza di $\mathcal{D}'(A)$ (sd). Distribuzioni di Heaviside e di Dirac. Derivazione di distribuzioni (giustificazione della formula $\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, v\rangle = -\langle u, \frac{\partial v}{\partial x_i}\rangle$). Derivazione della distribuzione di Heaviside (dim). Convoluzione di funzioni $L^1(\mathbb{R}^n)$. Continuità e derivabilità di una convoluzione. Convoluzione di distribuzioni. In particolare $u * \delta = \delta$.

5 Trasformate di Fourier

Trasformata di Fourier in $\mathbb{R}^n$: sue principali proprietà. La trasformata $\hat{f}(\xi)$ è continua (dim), limitata (dim), ha limite 0 per $|\xi| \to \infty$: dimostrazione del lemma di Riemann-Lebesgue nel caso unidimensionale. Cioè: $\hat{}: L^1(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ è un'applicazione lineare e continua con la norma di L^∞. Altre proprietà fondamentali: traslazione, similitudine, coniugazione, moltiplicazione per x_k, moltiplicazione per e^{iax}, trasformata di $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ (tutte con dim). Convoluzione. Inversione. Un accenno allo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e alle trasformate in L^2. Teorema di Plancherel: cioè $\langle f, g\rangle_{L^2} = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{L^2}$ (sd). Cenno alle distribuzioni temperate: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Cenno alle trasformate di Fourier di distribuzioni temperate. $\hat{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

6 Trasformate di Laplace

Trasformata di Laplace unilatera: ascissa di convergenza semplice e assoluta, semipiano di convergenza. Convergenza uniforme di integrali in un semipiano, sottopiano proprio del semipiano di convergenza (dim). Convergenza uniforme in una regione angolare (sd). Proprietà della trasformata: è olomorfa nel semipiano di convergenza (dim). Altre proprietà fondamentali: traslazione, similitudine, moltiplicazione per e^{at} (tutte con dim). Calcolo delle derivate della trasformata. Un lemma sul limite di $e^{\sigma T} \int_0^T f(t)dt$ con $\mathrm{Re}(\sigma) \geq \max(\lambda_0, 0)$, per una funzione trasformabile (sd). Trasformata della derivata di una funzione (dim). Trasformata di una funzione periodica per $t \geq 0$. Trasformata di una convoluzione. Antitrasformata: cenno alla formula di Riemann-Fourier (Integrale di Bromwich - Mellin). Applicazione alle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

7 Esercitazioni

Calcolo d'integrali con il metodo dei residui. Calcolo di integrali di linea in $\mathbb{C}$. Localizzazione degli zeri di una funzione complessa. Calcolo di integrali impropri relativi a funzioni polidrome. Riduzione a fratti semplici di funzioni razionali, usando i residui. Applicazione delle trasformate di Fourier a un problema di equazioni a derivate parziali. Esempi di trasformate di Laplace di: $u(t), t^k u(t), e^{\gamma t} u(t), \mathrm{sen}(\omega t) u(t), \cos(\omega t) u(t), t^\alpha u(t)$. Esercizi sull'uso delle trasformate di Laplace nella risoluzione d'equazioni differenziali ordinarie.

8 TESTI CONSIGLIATI

- Appunti del corso.

- G.C. Barozzi, "Matematica per lingegneria dell'informazione", Zanichelli (Bologna), 2001.

- G. Gilardi, "Analisi tre", McGraw-Hill (Milano)

- M. Codegone, "Metodi matematici per l'Ingegneria", Zanichelli (Bologna)