Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Laurea in ingegneria chimica, dei materiali, meccanica (9 cfu)
e ingegneria civile, edile (6 cfu).
Anno Accademico 2009/2010
Programma finale del corso di Analisi matematica II
alla data del giorno: 17 dicembre 2009

Lezioni ed Esercitazioni: Prof. Gino Tironi

1 Lo spazio $\mathbb{R}^n$.

Distanza euclidea in $\mathbb{R}^n$. Piú in generale, distanza in un insieme, sue proprietà. Nozioni topologiche in $\mathbb{R}^n$ (piú in generale, in ogni spazio metrico): sfere o palle o bolle aperte; intorni di un punto e loro proprietà; insiemi aperti; punti d'accumulazione e punti aderenti ad un insieme; chiusura di un insieme; insiemi chiusi. Richiami sulle proprietà degli aperti e dei chiusi, già dimostrate nel caso della retta reale. Teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^n$ (sd). Punti interni, esterni, di frontiera. Esempi di insiemi né aperti né chiusi. Spazi metrici. In ogni spazio metrico punti distinti hanno intorni disgiunti (dim). Ogni sfera aperta è un aperto (dim). Applicazioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Esempi. Limiti e continuità di una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e delle sue componenti $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Esempio di funzione con le restrizioni a tutte le rette continue, ma non continua. Insiemi limitati. Insiemi compatti in $\mathbb{R}^n$. Insiemi sequenzialmente compatti in uno spazio metrico. Successioni di Cauchy. Equivalenza tra insiemi chiusi e limitati in $\mathbb{R}^n$ e compattezza sequenziale (sd). Teorema di compattezza per funzioni continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (dim). Teorema di Weierstrass per funzioni continue da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ (dim). Insiemi connessi per archi. Insiemi connessi (in senso topologico). Spazi vettoriali sul corpo $\mathbb{R}$ dotati di prodotto scalare e dotati di norma. Disuguaglianza di Cauchy-Buniakovskiĭ-Schwarz (dim). Ogni prodotto scalare induce una norma. Ogni norma induce una distanza. Vettori ortogonali. Teorema degli zeri per funzioni continue da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. Teorema di Pitagora. Uguaglianza del parallelogramma e teorema di Jordan e von Neumann (sd). Teorema di connessione per funzioni continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (dim). Applicazioni lineari. Caso di $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. In particolare forme lineari. Forme lineari su $\mathbb{R}^n$. Teorema di Riesz (dim, nel caso $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$). Unicità del vettore associato alla forma.

2 Calcolo differenziale per funzioni di piú variabili.

Derivate parziali. Derivate direzionali. Esistenza di funzione che ha tutte le derivate direzionali finite in un punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$, ma non è continua in x^0. Differenziale di una funzione in un punto. Approssimante lineare e differenziale. Conseguenze della differenziabilità in x^0: continuità di f in x^0 (dim) ed esistenza delle derivate direzionali in ogni direzione (in particolare di tutte le derivate parziali) in x^0 (dim). I coefficienti della forma lineare differenziale $(df)(x^0)(x-x^0)$ sono le derivate parziali $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$ (dim). Gradiente di una funzione: $\mathrm{grad}f(x^0) = \nabla f(x^0)$ (notazione di Hamilton). Derivate successive. Teoremi di Schwarz (dim) e di Young sull'inversione dell'ordine delle derivate (sd). Teorema del differenziale totale (dim). Differenziale di una funzione $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$. Matrice jacobiana o derivata di f. Differenziazione di funzione composta $g \circ f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, con $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \Omega(\subset \mathbb{R}^p)$ e $g : \Omega(\subset \mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}^m$ (dim). In particolare, il caso di $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, differenziabile in $x^0 \in A$, composta con $g : I \to A \subset \mathbb{R}^n$, derivabile in $t^0 \in I$, con $g(t^0) = x^0$. Per $F(t) = f(g(t))$, si ha $F'(t^0) = \langle (\nabla f)(x^0), g'(t^0) \rangle$ (dim). Espressione delle derivate parziali delle componenti di $h = g \circ f$ dedotte dalla formula della differenziazione di funzione composta (dim). Formula del valore medio o degli incrementi finiti. Funzione con differenziale nullo è costante in un intorno di ogni $x^0 \in A$ (dim); è costante su $A \subset \mathbb{R}^n$, aperto e connesso (per archi) (sd). Derivate successive della funzione composta $F(t) = f(x(t))$, con $f : A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $x(t) : J(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$, con $f \in \mathcal{C}^k(A)$ e $x(t) = x^0 + (x - x^0)t$, $0 \le t \le 1$. (Dimostrazione almeno per $F'(t)$ e $F''(t)$). Differenziali successivi. Formula di Taylor per $f \in \mathcal{C}^k(A)$. $f(x) = f(x^0) + df(x^0)(x - x^0) + \ldots + \frac{1}{k!}[d^k f(x^0)(x - x^0, \ldots, x - x^0) + \beta(x)||x - x^0||^k]$ con $\beta(x)$infinitesimo per $x \to x^0$ (dim). Forme quadratiche, matrici associate: si possono pensare simmetriche. Forme definite positive o negative, semidefinite o indefinite. Il criterio di Jacobi-Sylvester per le forme quadratiche (sd). Formula di Taylor per $f \in \mathcal{C}^2(A, \mathbb{R})$. La matrice hessiana di una funzione come matrice jacobiana di ∇f. Punti di massimo e minimo relativo, di sella. Classificazione completa nel caso $n = 2$ (dim). Teorema di Fermat (dim). Classificazione dei punti stazionari o critici. Condizioni sufficienti: se $d^2 f$ è definito positivo in x^0, il punto è di minimo relativo; se $d^2 f$ è definito negativo in x^0, il punto è di massimo relativo; se $d^2 f$ è indefinito in x^0, il punto è di sella (dim). Teorema di Dini in $\mathbb{R}^2$ (dim solo per 9cfu). Cenno al caso di $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ e al caso di $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ (sd). Curve, superficie, ipersuperficie e, in generale, varietà differenziabili di dimensione n. Estremi vincolati di funzioni. Caso delle funzioni di due variabili con il vincolo dato da una curva liscia: moltiplicatori di Lagrange, nel caso di dimensione 2 (dim). Moltiplicatori di Lagrange nel caso $n = 3$ con 2 vincoli (sd). Interpretazione geometrica e interpretazione meccanica. Inversione locale di funzioni $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ (sd). Funzioni localmente invertibili in ogni punto del dominio possono essere non invertibili globalmente. Omeomorfismi e diffeomorfismi.

3 Successioni e serie di funzioni.

Successioni di funzioni $f_n : (E \subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (o $f_n : E(\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$). Convergenza *puntuale* e *uniforme* di successioni di funzioni. Alcuni esempi di successioni di funzioni semplicemente ma non uniformemente convergenti. Criterio di Cauchy sulla convergenza uniforme (sd). Conseguenze della convergenza uniforme: enunciato dei teoremi sui limiti (dimostrazione facoltativa), continuità (dim), derivabilità, integrabilità di successioni e serie di funzioni in presenza della convergenza uniforme (sd). Convergenza puntuale e uniforme di serie di funzioni. Criterio di Weierstrass (convergenza totale o normale) per la convergenza uniforme (sd). Problema della sviluppabilità di una funzione in serie di funzioni date. Serie di potenze in $\mathbb{R}$. Esempi. Lemma di Abel (dim). Dominio di convergenza regolare e accidentale. Raggio di convergenza, sua definizione ed esistenza (dim). Esempi. La somma di una serie di potenze è continua in $]x_0 - R, x_0 + R[$ (dim). La serie derivata a termine a termine ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza (dim). La somma della serie di potenze è derivabile ed uguale alla somma della serie derivata in $]x_0 - R, x_0 + R[$ (dimostrazione facoltativa). Teorema di Abel sulla convergenza uniforme in $[0, R]$ (sd) e un'applicazione. La somma di una serie di potenze è di classe $\mathcal{C}^\infty(]x_0 - R, x_0 + R[)$, anzi è *analitica*. Un esempio di funzione di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ma non analitica su $\mathbb{R}$. Sviluppabilità in serie di Taylor di una funzione. Alcune condizioni sufficienti (dim). Serie di Taylor di e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\log(1 + x)$ (serie di Mercatore e di Gregory), $(1 + x)^\alpha$, $\operatorname{arctg} x$, arcsen$x$, $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$. Sviluppo in serie di Taylor per $f(x)$, noto quello di $f'(x)$. Funzioni complesse di variabile complessa. Limiti, continuità, derivabilità per funzioni $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Serie di potenze in $\mathbb{C}$. Esempi di funzioni non derivabili in senso complesso. Funzioni olomorfe e funzioni analitiche. Le funzioni $e^z, \operatorname{sen} z, \cos z$ in $\mathbb{C}$. Proprietà d'addizione dell'esponenziale complesso (dim solo per 9 cfu). Formule d'Eulero (dim). I logaritmi di un numero complesso. Valore principale del logaritmo.

4 Integrali.

4.1 Integrali dipendenti da un parametro.

Continuità e derivabilità di funzioni definita da un integrale (dim solo per 9 cfu). Differenziabilità della funzione $g(u, v, y) = \int_u^v f(x, y)dx$. Derivata di $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy$.

4.2 Integrali multipli.

Intervalli o rettangoli di $\mathbb{R}^n$, in particolare di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$. Decomposizioni di rettangoli. Ordine parziale delle decomposizioni di un rettangolo. Somme inferiori e superiori per una funzione limitata su un rettangolo limitato di $\mathbb{R}^2$. Integrabilità secondo Riemann e integrale di Riemann:

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy = \int_R f\, dm \quad \text{e}$$

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dxdydz = \int_R f\, dm \quad ,$$

con $R = [a, b] \times [c, d]$ oppure $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$. Condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità. Integrabilità delle funzioni continue (dim).

Formule di riduzione sui rettangoli (o intervalli) di $\mathbb{R}^2$ (Teorema di Fubini) (dim). Proprietà dell'integrale: monotonía; integrabilità sui sottorettangoli, additività sul dominio, integrabilità del valore assoluto, del prodotto, della reciproca (tutto sd). Teorema della media (dim). Formule di riduzione per corde e per sezioni piane di integrali tripli (sd). Definizione dell'integrale di $f\colon E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, limitata su E limitato. Insiemi di misura nulla o trascurabili o evanescenti.

Cenno agli insiemi misurabili secondo Peano - Jordan: caratterizzazione (dim solo per 9 cfu) e proprietà della misura (sd). Plurirettangoli. Funzioni limitate, definite su un rettangolo di $\mathbb{R}^n$, continue tranne che su un insieme di misura nulla sono integrabili (sd). Insiemi normali in $\mathbb{R}^2$. Il grafico di una funzione integrabile, in particolare continua su un rettangolo R, è trascurabile (dim). Insiemi normali rispetto all'asse x o all'asse y in $\mathbb{R}^2$ sono misurabili (dim). Insiemi ammissibili in $\mathbb{R}^2$. Formula di riduzione su insiemi normali (dim).

Insiemi normali in $\mathbb{R}^3$ rispetto al piano x, y; insiemi ammissibili in $\mathbb{R}^3$. Formula di riduzione per corde (sd). Formula di riduzione per sezioni piane (sd). Il jacobiano di una funzione $\Phi\colon A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Richiami sul cambiamento di variabile per integrali semplici. Formula del cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^m$ per integrali multipli (sd). Area dell'ellisse. Volume dell'ellissoide. Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$. Coordinate polari - ellittiche. Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$. Coordinate ellissoidali. Un accenno agli integrali impropri o generalizzati in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$: insiemi localmente misurabili, successioni invadenti l'insieme J (anche illimitato) e adatte alla funzione $f : J \to \mathbb{R}$ (anche illimitata). Criterio del confronto (sd).Calcolo di $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$ e di $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ (dim).

5 Equazioni differenziali ordinarie.

Introduzione alle equazioni differenziali: nozioni di base; esempi d'equazioni differenziali ordinarie e a derivate parziali. Ordine di un'equazione differenziale ordinaria. Forma normale per un'equazione differenziale ordinaria. Problema di Cauchy (o ai valori iniziali) per un'EDO del primo ordine in forma normale. Lemma di Volterra (dim solo per 9 cfu). Lemma di Gronwall (dim solo per 9 cfu).Teorema d'esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy (dim solo per 9 cfu). Un esempio di **non** unicità locale ($y' = \sqrt{|y|}; y(x_0) = 0$). Un esempio di **non** esistenza globale ($y' = y^2; y(x_0) = y_0$). Teorema d'esistenza e unicità globale (sd). Le equazioni a variabili separabili. Esempi. Equazioni dette omogenee o di Manfredi (esempi). Le equazioni differenziali lineari del prim'ordine a coefficienti continui. Esistenza globale della soluzione (dim). Le soluzioni dell'omogenea sono un sottospazio vettoriale di dimensione 1 dello spazio $\mathcal{C}^1(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$ (dim). Soluzione dell'equazione completa con il metodo della variazione delle costanti (dim). Equazioni del tipo di Bernoulli. Equazioni del secondo ordine. Soluzione nel caso particolare $y'' = f(y)$. Equazioni d'ordine n e sistemi equivalenti di n equazioni del primo ordine in n funzioni incognite (dim). Teoremi d'esistenza e unicità locale e globale per i sistemi (sd). Caso dei sistemi lineari a coefficienti continui. Nel caso dei sistemi lineari a coefficienti continui la soluzione a un problema di Cauchy è globale (dim solo per 9 cfu). Teorema della base (dim). Sistema e matrice *fondamentali*. Wronskiano. Soluzione del sistema completo (dim). Caso dei sistemi generati da un'equazione differenziale lineare di ordine n. Equazioni lineari d'ordine n a coefficienti costanti. Polinomio caratteristico e equazione caratteristica. Fattorizzazione dell'operatore differenziale. I fattori sono commutativi. Sistema completo delle soluzioni dell'equazione omogenea (dim solo per 9 cfu). Determinazione di una soluzione particolare dell'equazione completa (sd). Nucleo risolvente. Per equazioni a coefficienti costanti $K(x, t) = K(x - t, 0)$ (dim solo per 9 cfu). Termini noti di tipo particolare (sd). Sistemi di due equazioni in due funzioni incognite lineari a coefficienti costanti. Abbassamento dell'ordine di un'equazione differenziale lineare. Equazioni lineari del tipo di Eulero.

6 Curve e superficie.

6.1 Curve

Curve in $\mathbb{R}^m$, $(m = 2, 3, ..)$. Curve continue, regolari, generalmente regolari. Curve chiuse e non chiuse. Semplici e intrecciate. Archi di curva. Archi consecutivi. Curve equivalenti. Versore tangente di curve equivalenti equiorientate o orientate in senso opposto (dim). Lunghezza di una curva. Alcune proprietà della lunghezza (sd). Rettificabilità delle curve di classe $\mathcal{C}^1$ (sd). Integrale di Riemann come limite (sd). Lemma di Duhamel (sd). Lunghezza di curve regolari e generalmente regolari (sd). Integrali di linea per campi scalari (o di prima specie) per curve regolari e generalmente regolari. L'integrale è invariante per curve equivalenti (dim). Integrali curvilinei di campi vettoriali (o di seconda specie) per curve regolari e generalmente regolari. Dipendenza dall'orientazione delle curve (dim). Campi conservativi. Un campo $g : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, A aperto, è conservativo se e solo se $\int_\gamma \langle g, \tau \rangle ds$ dipende solo dai punti estremi della curva γ (dim sufficienza per tutti; necessità solo per 9 cfu); se e solo se $\int_\gamma \langle g, \tau \rangle ds = 0$ per ogni curva chiusa generalmente regolare con sostegno contenuto in A. Rotore di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ e in $\mathbb{R}^2$. Esempi di campo irrotazionale non conservativo. Insiemi stellati. Lemma di Poincaré (dim solo per 9 cfu). Teorema di Green (dim). Interpretazione come formula di Stokes in $\mathbb{R}^2$. Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$. Applicazione al calcolo dell'area di figure piane.

6.2 Superficie

Rappresentazione parametrica delle superficie. Superficie regolari. Un esempio di superficie non regolare (cono). Superficie date in forma cartesiana. Superficie date in forma implicita. Linee coordinate. Vettori tangenti e piano tangente. Vettore normale e sua norma $||N|| + \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{||\sigma_u||^2 \cdot ||\sigma_v||^2 - \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle^2}$. Elemento d'area e area di una superficie regolare. Area di una superficie in forma cartesiana. Area di una superficie cilindrica. Area di una superficie di rotazione: Primo teorema di Pappo-Guldino (dim solo per 9 cfu). Volume di figure di rotazione: secondo teorema di Pappo-Guldino (dim solo per 9 cfu). Integrali di superficie. Alcuni esempi importanti: area della superficie sferica, del toro, dell'elicoide. Momento d'inerzia di lamine.

7 Esercitazioni

Esempi di norme e metriche diverse da quella euclidea in $\mathbb{R}^n$. Esempio di norme non deducibili da un prodotto scalare. Piano tangente ad una superficie e vettore normale ad una superficie. Gradiente e linee di livello. Esercizi sugli estremi relativi liberi di una funzione di due o piú variabili. Esercizi sugli estremi vincolati di una funzione. Convergenza puntuale e uniforme di una successione di funzioni. Raggio di convergenza di una serie di potenze. Calcolo di integrali definiti usando la derivata sotto il segno. In particolare calcolo di $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Calcolo di integrali doppi e tripli. Aree e volumi di semplici figure geometriche. Risoluzione di equazioni differenziali dei tipi: a variabili separabili, omogenee, di Bernoulli, lineari del primo ordine e problemi di Cauchy relativi. Sistemi di due equazioni lineari a coefficienti costanti del primo ordine e equazioni differenziali lineari d'ordine 2 e superiore a coefficienti costanti. Caso di riduzione dell'ordine per equazioni differenziali lineari a coefficienti continui del secondo ordine. Esercizi sulle equazioni d'Eulero. Oscillazioni forzate. Fenomeni di battimento e di risonanza. Il crollo del ponte di Tacoma. Caduta di gravi con resistenza idraulica. Tiri al bersaglio. Lunghezza di curve: arco di parabola, spirale di Archimede, cardioide. Calcolo di aree di figure piane. Calcolo di integrali di linea usando il teorema di Stokes e della divergenza in $\mathbb{R}^2$. Area di alcune superficie e applicazione dei teoremi della divergenza (di Gauss) e del rotore (di Kelvin - Stokes) in $\mathbb{R}^3$.