

Capitolo 3

Un'introduzione alle serie di Fourier

3.1 Considerazioni preliminari

Dato un sistema numerabile di funzioni $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x), \dots$ definite su un intervallo $[a, b]$ di \mathbf{R} e una funzione $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbf{R} (\mathbf{C})$, ci poniamo il problema di approssimare $f(x)$ con una serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$, essendo i coefficienti c_n scelti opportunamente.

Cioè, considerata la somma parziale $s_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(x)$, ci poniamo il problema di indagare che cosa accade facendo tendere N a $+\infty$, nel senso di vari tipi di convergenza: puntuale, uniforme o in *media quadratica*, come viene meglio precisato di seguito.

Precisamente, diremo che la somma $s_N(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ se $\forall x \in [a, b]$, si ha che $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = f(x)$.

Se il limite è uniforme rispetto a x , cioè se $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon$, tale che $\forall N > N_\varepsilon$ e $\forall x \in [a, b]$ si ha

$$|s_N(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

diremo che la convergenza è *uniforme*.

Data una funzione $w(x)$ definita su $[a, b]$, per la quale, in generale, è $w(x) \geq 0$ e che chiameremo *funzione peso*, consideriamo l'integrale

$$\int_a^b |f(x) - s_N(x)|^2 w(x) dx \quad .$$

Diremo che $s_N(x)$ converge in *media quadratica* a $f(x)$ se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - s_N(x)|^2 w(x) dx = 0.$$

Quest' integrale è detto *deviazione quadratica media* o *scarto quadratico medio* di $s_N(x)$ da $f(x)$.

Due funzioni $\phi(x)$ e $\psi(x)$ sono *ortogonali* su $[a, b]$ rispetto al peso $w(x)$ se

$$\int_a^b \phi(x) \cdot \psi(x) \cdot w(x) dx = 0 \quad .$$

Per esempio, le funzioni 1 e x sono ortogonali rispetto al peso $w(x) = 1$ su $[-1, 1]$.

Considereremo data, d'ora in poi, una successione di funzioni $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x), \dots$ definite su $[a, b]$ e a due a due ortogonali rispetto al peso $w(x)$. Possiamo allora porci il problema di determinare i coefficienti c_n in modo tale che per la funzione integrabile $f(x)$ lo scarto quadratico medio sia minimo. Cioè che sia minimo:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(f(x) - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(x) \right)^2 w(x) dx = \int_a^b f^2(x) w(x) dx \\ & - 2 \sum_{n=1}^N c_n \int_a^b f(x) \phi_n(x) w(x) dx + \sum_{n=1}^N c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx = \\ & = \sum_{n=1}^N \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx \left[c_n - \frac{\int_a^b f(x) \phi_n(x) w(x) dx}{\int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx} \right]^2 + \\ & + \int_a^b f^2(x) w(x) dx - \sum_{n=1}^N \frac{[\int_a^b f(x) \phi_n(x) w(x) dx]^2}{\int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx} \end{aligned}$$

Si vede facilmente che lo scarto è minimo se

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x) \phi_n(x) w(x) dx}{\int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx} \quad (3.1)$$

e in questo caso vale

$$\int_a^b f^2(x) w(x) dx - \sum_{n=1}^N \frac{[\int_a^b f(x) \phi_n(x) w(x) dx]^2}{\int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx}$$

I coefficienti così determinati si dicono i *coefficienti di Fourier* di $f(x)$ rispetto alle funzioni ortogonali $\phi_n(x)$. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad (3.2)$$

si dice la *serie di Fourier* di $f(x)$.

Se al posto di c_n si pone il suo valore sopra calcolato, si trova

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b [f(x) - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(x)]^2 w(x) dx = \\ &\int_a^b f^2(x) w(x) dx - \sum_{n=1}^N c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dunque, per ogni $N \in \mathbf{N}$ vale

$$\sum_{n=1}^N c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx \leq \int_a^b f^2(x) w(x) dx.$$

Se $f(x)$ è a quadrato sommabile su $[a, b]$, prendendo il limite per $N \rightarrow \infty$, si vede che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx$$

converge e inoltre

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx \leq \int_a^b f^2(x) w(x) dx. \quad (3.4)$$

Questa disuguaglianza è detta *disuguaglianza di Bessel*.

Un'ulteriore conseguenza è che

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx = \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\int_a^b f(x) \phi_n(x) w(x) dx)^2}{\int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx} = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Se, per il sistema di funzioni considerato, la serie ha somma $\int_a^b f^2(x) w(x) dx$, cioè se

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx = \int_a^b f^2(x) w(x) dx, \quad (3.6)$$

allora si dice che vale l'equazione di Parseval.

In questo caso il sistema $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x), \dots$ si dice *completo* su $[a, b]$ rispetto al peso $w(x)$.

3.2 Lemma di Riemann-Lebesgue

Abbiamo appena constatato che se $\int_a^b f^2(x)w(x)dx$ è finito e se $(\phi_n(x))_{n=1}^\infty$ è un sistema ortogonale, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)w(x)dx}{\sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x)w(x)dx}} = 0.$$

In realtà si può ottenere un risultato più forte, che qui riportiamo senza dimostrazione

Lemma 3.2.1 [di Riemann–Lebesgue] *Se la famiglia di funzioni $\frac{\phi_n(x)}{\sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x)w(x)dx}}$ è uniformemente limitata, cioè se esiste una costante $K > 0$ tale che*

$$\forall x \in [a, b], \forall n \in \mathbf{N}, \left| \frac{\phi_n(x)}{\sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x)w(x)dx}} \right| \leq K,$$

e se $f(x)$ è assolutamente integrabile, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)w(x)dx}{\sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x)w(x)dx}} = 0.$$

3.3 Serie di Fourier trigonometriche

Le funzioni $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ sono ortogonali su $-\pi \leq x \leq \pi$, con peso $w = 1$. Lo si vede facilmente calcolando (per parti) gli integrali

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \sin mx dx &= \frac{n^2}{m^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \sin mx dx \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos mx dx &= -\frac{n}{m} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \sin mx dx \end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, dx = \frac{n^2}{m^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, dx$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} nx \cos nx \, dx = \frac{\operatorname{sen}^2 nx}{2n} \Big|_{-\pi}^{+\pi} = 0 \quad .$$

Dunque si trova

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx \, dx = 0 \quad \text{se } n \neq m; \quad (3.7)$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0 \quad \text{se } n \neq m; \quad (3.8)$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, dx = 0 \quad \forall n, m \in \mathbf{N} \quad . \quad (3.9)$$

Vale poi $\int_{-\pi}^{+\pi} 1 \, dx = 2\pi$, $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen}^2 nx \, dx = \pi$.

Diremo serie di Fourier trigonometrica per una funzione $f(x)$ definita su $[-\pi, \pi]$ e scriveremo

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + \dots + a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx + \dots \quad (3.10)$$

una serie di funzioni trigonometriche nella quale

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \quad ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \quad , \quad (3.11)$$

in accordo con il valore di c_n ottenuto in generale:

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x) \phi_n(x) w(x) \, dx}{\int_a^b \phi_n^2(x) w(x) \, dx} \quad .$$

Qui si è preferito scrivere $\frac{a_0}{2}$ al posto di c_0 , per consentire una maggiore simmetria nelle formule.

Ora

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N (\cos nx \cdot \cos nt + \sin nx \cdot \sin nt) \right\} dt = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(x-t) \right\} dt .
\end{aligned}$$

Si osservi che

$$\begin{aligned}
&\left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos ny \right\} \cdot \sin \left(\frac{1}{2} y \right) = \frac{1}{2} \sin \left(\frac{1}{2} y \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N [\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) y - \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) y] = \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sin \left(\frac{1}{2} y \right) + \sin \left(\frac{3}{2} y \right) - \sin \left(\frac{1}{2} y \right) + \dots + \sin \left(N + \frac{1}{2} \right) y - \sin \left(N - \frac{1}{2} \right) y \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \sin \left(N + \frac{1}{2} \right) y .
\end{aligned}$$

Dunque

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos ny = \frac{1}{2} \frac{\sin \left(N + \frac{1}{2} \right) y}{\sin \left(\frac{1}{2} y \right)} \quad (3.12)$$

e quindi

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \left(N + \frac{1}{2} \right) (t-x)}{\sin \left(\frac{t-x}{2} \right)} dt .$$

Se poniamo $t = x + \tau$, allora $\tau \in [-\pi - x, \pi - x]$ e si trova

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau) \frac{\sin \left(N + \frac{1}{2} \right) \tau}{\sin \left(\frac{\tau}{2} \right)} d\tau .$$

Prolungando per periodicit  $f(x)$ fuori da $[-\pi, \pi]$, avendo definito $f(x + 2\pi n) = f(x)$, per $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, allora anche $s_N(x)$   periodica di periodo 2π e l'integrale esteso a $[-\pi - x, \pi - x]$   uguale all'integrale esteso a $[-\pi, \pi]$. Cio 

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau) \frac{\sin \left(N + \frac{1}{2} \right) \tau}{\sin \left(\frac{\tau}{2} \right)} d\tau . \quad (3.13)$$

3.4 Convergenza puntuale

Integrando l'equazione (3.12) su $[-\pi, \pi]$, si trova

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \left(N + \frac{1}{2} \right) \tau}{\sin \left(\frac{\tau}{2} \right)} d\tau .$$

Tenendo conto di quest'uguaglianza e della (3.13) si ottiene

$$\begin{aligned} s_N(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \tau) \frac{\operatorname{sen}(N + \frac{1}{2})\tau}{\operatorname{sen}(\frac{\tau}{2})} d\tau - \\ &- f(x) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(N + \frac{1}{2})\tau}{\operatorname{sen}(\frac{\tau}{2})} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x + \tau) - f(x)] \frac{\operatorname{sen}(N + \frac{1}{2})\tau}{\operatorname{sen}(\frac{\tau}{2})} d\tau. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Le funzioni $\operatorname{sen}(N + \frac{1}{2})\tau$, $N = 0, 1, 2, \dots$ sono ortogonali e soddisfano le condizioni del Lemma di Riemann - Lebesgue. Allora, se

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x + \tau) - f(x)}{\operatorname{sen}(\frac{\tau}{2})} \right| d\tau < +\infty \quad ,$$

ossia se, equivalentemente,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x + \tau) - f(x)}{\tau} \right| d\tau < +\infty \quad , \quad (3.15)$$

si trova che, per ogni $x \in \mathbf{R}$, vale

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = f(x) \quad . \quad (3.16)$$

Dunque c'è convergenza puntuale della serie di Fourier a $f(x)$ se la funzione periodica di periodo 2π soddisfa la condizione (3.15) detta *Criterio di Dini*. Osserviamo che, affinché valga la (3.15), non è sufficiente che $f(x)$ sia continua nel punto x . Infatti una serie di Fourier può divergere in punti nei quali $f(x)$ è continua se la condizione di Dini è violata. Se $f(x)$ è assolutamente integrabile e derivabile in un punto x , allora la serie di Fourier converge a $f(x)$. Più in generale, se in un intorno di x la funzione è hölderiana, cioè se esistono $M > 0$ e $\alpha > 0$ (e $\alpha \leq 1$) tali che $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$, allora la serie di Fourier è convergente.

Si può dimostrare che se f non è continua in x , ma ha limiti finiti da destra e da sinistra, che indicheremo rispettivamente con $f(x+)$ e $f(x-)$, e vale la condizione di Dini generalizzata

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x + \tau) - f(x+) + f(x - \tau) - f(x-)}{\tau} \right| d\tau < +\infty \quad , \quad (3.17)$$

allora

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] \quad . \quad (3.18)$$

3.5 Convergenza uniforme

Da quanto abbiamo appena detto segue che, affinché $s_N(x)$ converga uniformemente a $f(x)$ la funzione *deve* essere continua e inoltre *deve valere* $f(-\pi) = f(\pi)$. Queste condizioni non sono tuttavia sufficienti.

Supponiamo che $f(x)$ sia continua, periodica di periodo 2π e che $f'(x)$ sia continua tranne che in un numero finito di punti dove può non essere definita. Supponiamo inoltre che sia finito $\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx$ e che valga la

formula $f(x) - f(-\pi) = \int_{-\pi}^x f'(t) dt$. Sia

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots;$$

calcoliamo i coefficienti di F. di $f'(x)$.

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \{f(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \cos n\pi \{f(\pi) - f(-\pi)\} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = nb_n. \end{aligned}$$

Analogamente $\beta_n = -na_n$. Dunque

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx).$$

La disuguaglianza di Bessel dà

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx \quad . \quad (3.19)$$

Ora $s_N(x) - s_M(x) = \sum_{n=N+1}^M (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ e $|s_N(x) - s_M(x)| \leq$
 $(\sum_{n=N+1}^M n^2 (a_n^2 + b_n^2))^{1/2} \cdot (\sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n^2})^{1/2}$, per la disuguaglianza di Cauchy -
 Buniakovski-Schwarz. Dunque

$$|s_N(x) - s_M(x)| \leq \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x) dx} \cdot \sqrt{\sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n^2}}. \quad (3.20)$$

Poiché la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, possiamo concludere che, per il criterio generale di convergenza di Cauchy, la successione $s_N(x)$ converge uniformemente alla sua somma. Si trova poi che la somma è proprio $f(x)$. Infatti si ha

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} f'(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} |f'^2(t)| dt} \cdot \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} 1 dt} \\ &\leq |x_2 - x_1|^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\int_a^b |f'^2(t)| dt} \leq K \cdot |x_2 - x_1|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dunque $f(x)$ è hölderiana con esponente $\alpha = \frac{1}{2}$ e quindi la serie di Fourier, per ogni x , converge a $f(x)$.

In particolare, c'è convergenza uniforme a $f(x)$ se $f'(x)$ è hölderiana o se nel numero finito di punti nei quali non è continua ha limiti finiti da destra e da sinistra.

Si dimostra poi che la serie di Fourier di una funzione a quadrato sommabile converge in media quadratica. Cioè che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_N(x)|^2 dx = 0 \quad ,$$

se $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < \infty$.

Ciò significa che il sistema ortogonale $\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$ è *completo*.

3.6 Cambiamento di scala

Finora abbiamo supposto $f(x)$ definita su $[-\pi, \pi]$. Supponiamo ora che sia definita su un generico intervallo $[a, b]$. La sostituzione di variabile

$$\bar{x} = \frac{2\pi(x - \frac{a+b}{2})}{b-a} \quad ,$$

porta $[a, b]$ in $[-\pi, \pi]$. Si trova poi

$$x = \frac{b-a}{2\pi} \bar{x} + \frac{1}{2}(a+b) \quad .$$

Data $f(x)$ su $[a, b]$, $F(\bar{x}) = f(\frac{b-a}{2\pi} \bar{x} + \frac{1}{2}(a+b))$ è definita su $[-\pi, \pi]$. La serie di Fourier di $F(\bar{x})$ sia

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots \quad ,$$

con

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\bar{x}) \cos n\bar{x} d\bar{x} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\bar{x}) \operatorname{sen} n\bar{x} d\bar{x}. \end{aligned}$$

Allora

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx \quad (3.21)$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx. \quad (3.22)$$

In particolare, se $f(x)$ è definita tra 0 e l e la prolunghiamo per parità (disparità) tra $-l$ e l ,

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l}(x) dx \quad (3.23)$$

$$(b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l}(x) dx). \quad (3.24)$$

3.7 Qualche esempio

Sia $f(x) = x$ su $[-\pi, \pi]$. Allora $a_n = 0$ per ogni n e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx = -2 \frac{(-1)^n}{n}.$$

Perciò

$$x \sim -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} nx = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{3} \operatorname{sen} 3x - \frac{2}{4} \operatorname{sen} 4x + \dots$$

In questo caso l'uguaglianza di Parseval fornisce

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2$$

Dunque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Se $f(x) = x^2$ su $[-\pi, \pi]$, $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$ e $a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}$, per $n \geq 1$, mentre $b_n = 0$ per ogni n . Allora

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \cos 2x - \frac{4}{9} \cos 3x + \dots$$

In $x = 0$ la serie converge e si trova $0 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cdot (1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots)$. Cioè

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad .$$

Bibliografia

1. L. Amerio, *Elementi di analisi superiore*, Tamburini, Milano (1960).
2. R. Courant e D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Vol. I, Interscience, New York (1962).
3. V. Smirnov, *Cours de mathématiques supérieures*, Vol. II, Éditions MIR, Moscou (1970)
4. A. Sommerfeld, *Partial differential equations in physics*, Academic Press Publ., New York (1949).
5. H. F. Weinberger, *A first course in partial differential equations*, John Wiley & Sons, New York (1965).