

Capitolo Quattordicesimo

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

§ 1. INTRODUZIONE

DEFINIZIONE. Sono dette *equazioni funzionali* quelle equazioni in cui l'incognita è una funzione.

ESEMPIO. 1) Trovare una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(2x) = f^2(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Come subito si vede, ogni funzione del tipo $f(x) = a^x$, con $a > 0$, è soluzione del nostro problema.

DEFINIZIONE. Dicesi *equazione differenziale* un'equazione funzionale in cui compaiono una o più derivate della funzione incognita.

DEFINIZIONE. Un'equazione differenziale è detta *ordinaria* se la sua incognita è funzione di una sola variabile; in caso contrario, si parla di equazione differenziale *alle derivate parziali*.

ESEMPLI. 2) Data $f: I(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con I intervallo, trovare le funzioni $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili tali che $F'(x) = f(x)$, per ogni $x \in I$. La soluzione è, come ben si sa, data dalle funzioni del tipo $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt + c$, con $x_0 \in I$ fissato e $c \in \mathbb{R}$ arbitrario.

3) Trovare le funzioni $u: A(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabili sull'insieme aperto A e tali che

$$x \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$$

per ogni $(x,y)^T \in A$. Si constata facilmente che è soluzione ciascuna delle funzioni $u_1(x,y) = 1$, $u_2(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$, $u_3(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ e (cfr. § 8, Esercizio 7) ogni altra funzione u che sia *positivamente omogenea*, ossia tale che

$$u(tx,ty) = u(x,y), \quad \forall t > 0, \forall (x,y)^T \in A.$$

DEFINIZIONE. L'ordine massimo di derivazione con cui la funzione incognita compare in un'equazione differenziale è detto l'*ordine dell'equazione differenziale*.

ESEMPLI. 4) L'equazione differenziale ordinaria $y'(x) = xy^2(x)$ è del *primo* ordine.

5) L'equazione differenziale ordinaria $y'''(x) = y'(x)y(x)$ è del *terzo* ordine.

6) L'equazione differenziale alle derivate parziali $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$ è del *secondo* ordine.

DEFINIZIONE. Un'equazione differenziale ordinaria si dice espressa in *forma normale* se è esplicitata rispetto alla derivata di ordine massimo.

ESEMPLI. 7) L'equazione differenziale ordinaria $y'(x) = xy(x)$ è in forma normale.

8) L'equazione differenziale ordinaria $e^{y''(x)} + y''(x) = y(x)$ non è in forma normale.

§ 2. EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL PRIMO ORDINE

È data l'equazione differenziale

$$(*) \quad y'(x) = f(x, y(x)) \quad [o \quad y' = f(x, y)],$$

con $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ definita su un aperto A di \mathbb{R}^2 .

DEFINIZIONE. Si dice che una funzione $y: I(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, con I intervallo, è una *soluzione* della (*) se:

- 1) $y(x)$ è derivabile in I ;
- 2) $(x, y(x))^T \in A$ per ogni $x \in I$;
- 3) $y'(x) = f(x, y(x))$, $\forall x \in I$.

PROBLEMA. Data un'equazione differenziale, si chiede di rispondere a tre questioni:

- 1) Esistenza di soluzioni.
- 2) Numero delle soluzioni (in particolare, se c'è unicità).
- 3) Calcolo (eventualmente approssimato) delle soluzioni.

ESEMPIO. 1) Data $f: I(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ continua, le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x) = f(x)$ sono date dalle funzioni del tipo $y(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + c$, con $x_0 \in I$ fissato e $c \in \mathbb{R}$ arbitrario. Ci sono, quindi, infinite soluzioni. Per individuarne una, basta fissare il suo valore nel punto x_0 : $y(x_0) = y_0 = c$.

DEFINIZIONE. La condizione $y(x_0) = y_0$ è detta *condizione iniziale*.

Problema di Cauchy

DEFINIZIONE. È detto *Problema di Cauchy* un problema del tipo

$$(1) \quad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

con $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ definita su un sottoinsieme aperto A di \mathbb{R}^2 e $(x_0, y_0)^T$ punto fissato di A .

DEFINIZIONE. Dicesi *soluzione locale* del problema (1) ogni funzione $y: I \rightarrow \mathbb{R}$, definita su un intervallo I tale che:

- 1) $y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale su I ;
- 2) $x_0 \in \text{int } I$;
- 3) $y(x_0) = y_0$.

TEOREMA 1. (Di esistenza e unicità locali) - Se $f: A(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora esistono un $h > 0$ ed una funzione $y: I =]x_0 - h, x_0 + h[\rightarrow \mathbb{R}$ soluzione del problema (1). Se, inoltre, esiste ed è continua la derivata della f rispetto a y $f_y: A(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$, allora la soluzione è unica. ■

DEFINIZIONE. Sia $f: A =]a, b[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (potendo anche essere $a = -\infty$ e $b = +\infty$) e sia $x_0 \in I$. Dicesi *soluzione globale* del problema (1) ogni soluzione y definita su tutto $]a, b[$.

TEOREMA 2. (Di esistenza e unicità globali) - Se $f: A =]a, b[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e se $\frac{\partial f}{\partial y}: A =]a, b[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e limitata, allora esiste una e una sola soluzione globale $y:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ del problema (1). ■

ESEMPIO. 2) Si consideri il Problema di Cauchy: $y' = \frac{y}{1+y^2} = f(x, y)$; $y(0) = 1$. Si vede subito che la funzione f è continua su tutto \mathbb{R}^2 , derivabile rispetto a y con

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| = \frac{|1 - y^2|}{(1 + y^2)^2} \leq 1.$$

Per il Teor. 2, esiste perciò una e una sola soluzione $y:]a, b[= \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ del nostro problema.

N.B. Non sempre il problema (1) ha una soluzione globale.

ESEMPIO. 3) Si consideri il Problema di Cauchy: $y' = y^2$; $y(0) = 1$ e si osservi che la funzione $f(x, y) = y^2$ è definita su $]a, b[\times \mathbb{R}$ (con $]a, b[= \mathbb{R}$) e soddisfa alle condizioni di esistenza e unicità locali. È subito visto che la soluzione del problema dato è $y(x) = \frac{1}{1-x}$ che è definita nell'intervallo $] -\infty, 1[$ contenuto propriamente nell'intervallo $]a, b[= \mathbb{R}$.

N.B. Non sempre il problema (1) ha un'unica soluzione.

ESEMPIO. 4) Si consideri il Problema di Cauchy: $y' = 2\sqrt{|y|}$; $y(0) = 0$. Si vede subito che sono soluzioni di (1) sia $y_1(x) = 0$, sia $y_2(x) = x^2 \text{sign}(x)$. Notiamo che sono soluzioni tutte e sole le funzioni

$$y(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } \alpha \leq x \leq \beta \\ -(x - \alpha)^2, & \text{per } x < \alpha \\ (x - \beta)^2, & \text{per } x > \beta \end{cases}, \quad \text{con } \alpha \leq 0 \leq \beta.$$

Equazioni a variabili separabili

Sono così dette le equazioni del tipo

$$y'(x) = g(x) h(y) \quad [= f(x, y(x))],$$

con $g:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continua, [potendo eventualmente essere $a = -\infty$, $b = +\infty$],
e $h:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , [potendo eventualmente essere $c = -\infty$, $d = +\infty$].

Per ogni $x_0 \in]a, b[$ e ogni $y_0 \in]c, d[$, il Problema di Cauchy $\begin{cases} y'(x) = g(x)h(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ha, per il Teorema 1, una e una sola soluzione locale $y(x): I \rightarrow \mathbb{R}$, con $I =]x_0 - h, x_0 + h[\subset]a, b[$.

1) Se è $h(y_0) = 0$, si ha $y(x) \equiv y_0$ (soluzione costante).

2) Sia $h(y_0) \neq 0$. Se $y(x)$ è la soluzione, allora si ha $h(y(x)) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Infatti, se esistesse un $x_1 \in I$ con $h(y(x_1)) = 0$, il problema di Cauchy $\begin{cases} z'(x) = g(x)h(z) \\ z(x_1) = y(x_1) \end{cases}$ ammetterebbe le

116 - Capitolo Quattordicesimo

due soluzioni locali $y(x)$ e $z(x) \equiv y(x_1)$, contro il Teorema 1.

Dall'uguaglianza $y'(t) = g(t)h(y(t))$, dividendo per $h(y(t))$ [$\neq 0$], si ottiene $\frac{y'(t)}{h(y(t))} = g(t)$. Integrando, si ricava:

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(t)}{h(y(t))} dt = \int_{x_0}^x g(t) dt,$$

ossia $H(y(x)) - H(y_0) = G(x) - G(x_0)$,

essendo $H(y)$ una primitiva di $\frac{1}{h(y)}$ e $G(x)$ una primitiva di $g(x)$. Poiché $H(y)$ è dotata di inversa (essendo $\frac{1}{h(y)}$ di segno costante), si ottiene

$$y(x) = H^{-1}(G(x) - G(x_0) + H(y_0)).$$

ESEMPLI. 4) Riesaminiamo l'equazione differenziale $y' = y^2$ vista sopra, con la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$. Questa è del tipo "a variabili separabili" con $g(x) = 1$ e $h(y) = y^2$. Se è $y_0 = 0$, si ha la soluzione nulla $y(x) \equiv 0$; in caso contrario, si divide per y^2 ottenendo l'equazione $\frac{y'}{y^2} = 1$. Integrando da x_0 a x i due membri, si ottiene $\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(x)} = x - x_0$, e quindi

$$y(x) = \frac{y_0}{1 + y_0(x_0 - x)}$$

definita nell'intervallo $]-\infty, \frac{1}{y_0} + x_0[$ se è $y_0 > 0$ e nell'intervallo $]\frac{1}{y_0} + x_0, +\infty[$ se è $y_0 < 0$.

5) Studiamo il Problema di Cauchy;
$$\begin{cases} y' = -2xy^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$$

È dunque $g(x) = -2x$ e $h(y) = y^2$. Se è $y_0 = 0$, da cui $h(y_0) = 0$, si ha la soluzione nulla $y(x) \equiv 0$. In caso contrario, dividendo per y^2 e integrando, si ricava $y(x) = \frac{y_0}{y_0 x^2 + 1}$. Se è $y_0 > 0$, si ottiene una funzione definita su tutto \mathbb{R} , mentre, nel caso $y_0 < 0$, la soluzione è definita solo tra $-\sqrt{\frac{-1}{y_0}}$ e $\sqrt{\frac{-1}{y_0}}$.

6) Trovare le traiettorie ortogonali alla famiglia di parabole $y = y_a(x) = ax^2$, con a parametro reale. Si cercano cioè curve $u = u_c(x)$, con c parametro reale, tali che, per ogni c fissato, si abbia che, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dall'essere $u_c(x) = y_a(x)$, per qualche $a \neq 0$, segua

$$u'_c(x) = \frac{-1}{y'_a(x)} = \frac{-1}{2ax}.$$

Poiché risulta

$$a = \frac{y_a(x)}{x^2} = \frac{u_c(x)}{x^2},$$

si ottiene l'equazione differenziale

$$u'_c(x) = \frac{-x}{2u_c(x)}.$$

Moltiplicando per $2u_c(x)$ e integrando, si ha:

$$u_c^2(x) = -\frac{x^2}{2} + c.$$

In conclusione, si ottiene la famiglia di ellissi

$$u^2 + \frac{x^2}{2} = c, \quad \text{con } c = u_c^2(x_0) + \frac{1}{2} x_0^2.$$

Equazioni omogenee

Sono così dette le equazioni del tipo $y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)$ con $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ funzione di classe C^1 sull'intervallo I .

Si effettua il cambio di variabile $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, ottenendo l'equazione

$$y'(x) = \frac{d}{dx}(x u(x)) = x u'(x) + u(x) = f(u(x)),$$

da cui
$$u'(x) = \frac{1}{x}(f(u(x)) - u(x)),$$

che è a variabili separabili.

ESEMPLI. 7) Si consideri l'equazione $y'(x) = \frac{y(x)}{x + y(x)} \left[= \frac{y(x)/x}{1 + y(x)/x} \right]$.

Posto $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, si ottiene l'equazione a variabili separabili $u' = -\frac{1}{x} \frac{u^2}{u+1}$. Per $x > 0$ e $y(x_0) > 0$, si ha

$$-\frac{1}{u(x)} + \log u(x) = -\log x + c \quad \text{e} \quad -\frac{x}{y(x)} + \log y(x) = c.$$

8) Si consideri l'equazione $y'(x) = \frac{y(x)}{x} + \text{tg} \frac{y(x)}{x}$.

Posto $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, si ottiene l'equazione a variabili separabili $u' = \frac{1}{x} \text{tg} u$. Per $x > 0$ e $\frac{y}{x} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, si ha

$$\log \sin u(x) = \log x + c = \log kx; \quad \sin u(x) = kx \quad \text{e} \quad \sin \frac{y(x)}{x} = kx.$$

§ 3. EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL PRIMO ORDINE

DEFINIZIONE. Un'equazione differenziale del tipo

$$y'(x) = a(x) y(x) + b(x) \quad [= f(x, y(x))],$$

con $a(x), b(x): I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni *continue*, su un *intervallo* I , è detta equazione differenziale *lineare (completa) del primo ordine*. L'equazione

$$y'(x) = a(x) y(x)$$

è detta equazione differenziale lineare *omogenea associata* all'equazione completa.

TEOREMA 3. *Le soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine costituiscono un sottospazio S di dimensione 1 dello spazio vettoriale $C^1(I, \mathbb{R})$. Si ha inoltre $S = \{ce^{A(x)} : c \in \mathbb{R}\}$, dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ su I .*

DIM. Che S sia uno spazio vettoriale è di verifica immediata. Sia ora $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ su I . Dall'uguaglianza $y'(x) - a(x)y(x) = 0$, moltiplicando ambo i membri per $e^{-A(x)}$, si ottiene

$$y'(x)e^{-A(x)} - a(x)y(x)e^{-A(x)} = \frac{d}{dx}(y(x)e^{-A(x)}) = 0.$$

Si ha dunque $y(x)e^{-A(x)} = c$, da cui $y(x) = ce^{A(x)}$. ■

TEOREMA 4. *Le soluzioni di un'equazione differenziale lineare completa del primo ordine sono date dalle funzioni del tipo $y(x) = z(x) + \bar{y}(x)$, essendo $z(x)$ una generica soluzione dell'equazione omogenea associata e $\bar{y}(x)$ una soluzione particolare dell'equazione completa.*

DIM. È immediato constatare che una funzione del tipo $z(x) + \bar{y}(x)$ è soluzione dell'equazione completa. Se $y(x)$ e $\bar{y}(x)$ sono due soluzioni della completa, si constata immediatamente che $y(x) - \bar{y}(x)$ è una soluzione dell'omogenea associata. ■

TEOREMA 5. *Una soluzione particolare dell'equazione differenziale lineare completa è data da*

$$\bar{y}(x) = \int_{x_0}^x e^{A(x)-A(t)} b(t) dt,$$

con x_0 prefissato punto di I e $A(u)$ primitiva di $a(u)$.

DIM. (Metodo di variazione delle costanti). Cerchiamo soluzioni del tipo $\bar{y}(x) = c(x)e^{A(x)}$, con $c(x)$ funzione incognita di classe C^1 . Una funzione di questo tipo è soluzione se e solo se

$$c'(x)e^{A(x)} + c(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)c(x)e^{A(x)} + b(x),$$

ossia se e solo se

$$c'(x)e^{A(x)} = b(x).$$

e quindi

$$c'(x) = b(x)e^{-A(x)},$$

da cui si ottiene

$$c(x) = \int_{x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt.$$

Ne viene che è

$$\bar{y}(x) = c(x)e^{A(x)} = \int_{x_0}^x e^{A(x)-A(t)} b(t) dt, \blacksquare$$

DEFINIZIONE. Il fattore $e^{A(x)-A(t)}$ prende il nome di *nucleo risolvete*.

TEOREMA 6. *Per ogni $x_0 \in I$, e per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$, il Problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione $y(x)$ definita su tutto I .

DIM. La generica soluzione dell'equazione completa è

$$y(x) = ce^{A(x)} + \int_{x_0}^x e^{A(x)-A(t)} b(t) dt$$

che è definita su I . La soluzione del Problema di Cauchy è univocamente determinata dalla condizione iniziale $y(x_0) = y_0$, dalla quale si ricava $c = y_0 e^{-A(x_0)}$. ■

ESEMPLI. 1) Si vuol risolvere l'equazione $y' = y + x$.

In questo caso, è $a(x) = 1$, $b(x) = x$ e $A(x) = x$. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono dunque le funzioni del tipo ce^x . Una soluzione particolare della completa è data da

$$\bar{y}(x) = \int_0^x e^{x-t} t dt = e^x \int_0^x t e^{-t} dt = e^x [-te^{-t} - e^{-t}]_0^x = -x - 1 + e^x.$$

La generica soluzione è dunque $y(x) = ce^x - x - 1 + e^x$.

2) Si vuol risolvere l'equazione $y' = \frac{1}{x}y + \frac{1}{x^2}$; su $I =]0, +\infty[$.

In questo caso, è $a(x) = \frac{1}{x}$, e $b(x) = \frac{1}{x^2}$. Si vede subito che è $A(x) = \log x$; le soluzioni dell'equazione omogenea sono dunque le funzioni del tipo cx . Una soluzione particolare della completa è data da

$$\bar{y}(x) = \int_1^x e^{\log x - \log t} \frac{1}{t^2} dt = x \int_1^x \frac{1}{t^3} dt = x \left[\frac{-1}{2t^2} \right]_1^x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}.$$

La generica soluzione è dunque $y(x) = cx + \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$.

3) Si vuol risolvere l'equazione $y' = -2e^x y + e^x$.

In questo caso, è $a(x) = -2e^x$ e $b(x) = e^x$. Si vede subito che è $A(x) = -2e^x$; le soluzioni dell'equazione omogenea sono dunque le funzioni del tipo $c \exp(-2e^x)$. Una soluzione particolare della completa è data da

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) &= \int_0^x \exp(-2e^x + 2e^t) e^t dt = \frac{\exp(-2e^x)}{2} \int_0^x \exp(2e^t) 2e^t dt = \\ &= \frac{\exp(-2e^x)}{2} [\exp(2e^t)]_0^x = \frac{1}{2} [1 - \exp(2 - 2e^x)]. \end{aligned}$$

La generica soluzione è dunque

$$y(x) = c \exp(-2e^x) + \frac{1}{2} [1 - \exp(2 - 2e^x)].$$

Equazioni di Bernoulli

Sono dette così le equazioni del tipo

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^\gamma,$$

con $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ e $a(x), b(x): I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue, con I intervallo aperto.

120 - Capitolo Quattordicesimo

Se è $\gamma \in]0,1[$, non è garantita l'unicità della soluzione. (f_y non è sempre definita!)

Se è $\gamma > 0$, la funzione nulla $y(x) \equiv 0$ è una soluzione.

Supponiamo $y(x) \neq 0$. Dividendo per $y(x)^\gamma$, si ottiene:

$$\frac{y'(x)}{y(x)^\gamma} = a(x)y(x)^{1-\gamma} + b(x).$$

Posto $u(x) = y(x)^{1-\gamma}$, si ottiene

$$u'(x) = (1-\gamma)a(x)u(x) + (1-\gamma)b(x),$$

che è un'equazione lineare e che quindi sappiamo risolvere.

ESEMPIO. 4) Si vuole risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = 2y(x) \operatorname{tg} x + \sqrt{y(x)} \\ y(0) = 1 \end{cases}, \text{ con } |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Si ha:
$$\frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}} = \operatorname{tg} x \sqrt{y(x)} + \frac{1}{2},$$

da cui, ponendo $u(x) = \sqrt{y(x)}$, si ottiene: $u'(x) = u(x) \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}.$

Questa è un'equazione lineare, con $a(x) = \operatorname{tg} x$, $b(x) = \frac{1}{2}$, $A(x) = -\log \cos x$. Le soluzioni dell'omogenea sono le funzioni $z(x) = \frac{c}{\cos x}$. Una soluzione della completa è

$$\bar{u}(x) = \int_0^x e^{A(x)-A(t)} b(t) dt = \frac{1}{2 \cos x} \int_0^x \cos t dt = \frac{1}{2 \cos x} \sin x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

La soluzione generale è dunque

$$u(x) = \frac{c}{\cos x} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} x, \quad \text{da cui} \quad y(x) = \left(\frac{c}{\cos x} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \right)^2.$$

La condizione iniziale ci dice poi che deve essere $c = 1$.

§ 4. EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL SECONDO ORDINE

È data l'equazione differenziale

$$(*) \quad y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \quad [o \quad y'' = f(x, y, y')],$$

con $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, definita su un aperto A di \mathbb{R}^3 .

DEFINIZIONE. Si dice che una funzione $y(x): I =]a, b[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una soluzione della (*) se:

- 1) $y(x)$ è due volte derivabile in I ;
- 2) $(x, y(x), y'(x))^T \in A$ per ogni $x \in I$;
- 3) $y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \forall x \in I$.

ESEMPIO. 1) Si consideri la *Seconda Legge della Dinamica*: $\underline{F} = m\underline{a}$. Pensiamo pure ad un moto rettilineo. La funzione $y(x)$ che descrive il moto in funzione del tempo x deve soddisfare all'equazione $my''(x) = F(x, y(x), y'(x))$, in quanto la forza può dipendere dal tempo, dalla posizione e dalla velocità del corpo. Il moto è determinato da questa legge e dalle *condizioni iniziali*: posizione ($y(x_0) = y_0$) e velocità ($y'(x_0) = z_0$).

Problema di Cauchy

DEFINIZIONE. È detto *Problema di Cauchy* un problema del tipo

$$(1) \quad \begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases},$$

con $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, definita sul sottoinsieme aperto A di \mathbb{R}^3 e $(x_0, y_0, z_0)^T$ prefissato punto di A .

DEFINIZIONE. Si dice *soluzione locale* del problema (1) ogni funzione $y: I \rightarrow \mathbb{R}$, definita su un intervallo I tale che:

- 1) $y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale;
- 2) $x_0 \in \text{int } I$;
- 3) $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = z_0$.

TEOREMA 7. Se $f: A(\subset \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora esistono un $h > 0$ ed una funzione $y: I =]x_0 - h, x_0 + h[\rightarrow \mathbb{R}$ soluzione del problema (1). Se, inoltre, la funzione $f(x, y, z)$ è dotata di derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}: A \rightarrow \mathbb{R}$ continue, allora la soluzione è unica. ■

Equazioni del tipo $y'' = f(y)$

Si consideri un'equazione differenziale del secondo ordine del tipo

$$y''(x) = f(y(x)), \text{ con } f: J(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \text{ di classe } C^1, \text{ e } J \text{ intervallo aperto.}$$

Moltiplicando ambo i membri per $y'(x)$ e integrando, si ottiene

$$\int_{x_0}^x y''(t)y'(t)dt = \int_{x_0}^x f(y(t))y'(t)dt, \text{ con } x_0 \in J \text{ fissato,}$$

da cui

$$\frac{1}{2} (y'(x))^2 - \frac{1}{2} (y'(x_0))^2 = F(y(x)) - F(y(x_0)),$$

con $F'(u) = f(u)$. In conclusione, si ha

$$(y'(x))^2 = 2[F(y(x)) - F(y(x_0))] + (y'(x_0))^2,$$

che è un'equazione differenziale del primo ordine (e che, con cautela, si può ricondurre ad equazioni a variabili separabili).

ESEMPIO. 2) Si consideri il seguente Problema di Cauchy:

$$y''(x) = 3y^2(x); \quad y(0) = \sqrt[3]{1/2}; \quad y'(0) = 1.$$

Moltiplicando per $y'(x)$ e integrando, si ottiene

$$\int_0^x y''(t)y'(t)dt = 3\int_0^x y^2(t)y'(t)dt,$$

da cui

$$\frac{1}{2} (y'(x))^2 - \frac{1}{2} = y^3(x) - \frac{1}{2}.$$

Essendo $y'(0) > 0$, cerchiamo soluzioni con derivata positiva ottenendo il Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{2y^3(x)} \\ y(0) = \sqrt[3]{1/2} \end{cases}.$$

§ 5. EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL SECONDO ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI

DEFINIZIONE. Un'equazione differenziale del tipo

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x),$$

con $c(x): I \rightarrow \mathbb{R}$ funzione *continua* su un *intervallo aperto* I , e con $a, b \in \mathbb{R}$, è detta equazione differenziale *lineare (completa) del secondo ordine a coefficienti costanti*. L'equazione

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

è detta equazione differenziale lineare *omogenea associata* all'equazione completa.

Con un ragionamento analogo a quello usato per il Teorema 4, si prova il

TEOREMA 8. *Le soluzioni di un'equazione differenziale lineare completa del secondo ordine sono date dalle funzioni del tipo $y(x) = z(x) + \bar{y}(x)$, essendo $z(x)$ una generica soluzione dell'equazione omogenea associata e $\bar{y}(x)$ una soluzione particolare dell'equazione completa.* ■

Sussiste poi il seguente risultato simile a quello della prima parte del Teorema 3:

TEOREMA 9. *Le soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine costituiscono un sottospazio S di dimensione 2 di $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.* ■

PROBLEMA. Trovare una base di S , cioè una coppia di funzioni $y_1, y_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ tali che ogni soluzione $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ sia una loro combinazione lineare.

DEFINIZIONE. Data l'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$, si chiama sua *equazione caratteristica* l'equazione di secondo grado

$$(*) \quad z^2 + az + b = 0.$$

TEOREMA 10. Sia data un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$; si indichi con S lo spazio vettoriale delle sue soluzioni e si ponga $\Delta = a^2 - 4b$. Allora:

1) $\Delta > 0$. Se $\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2}$ sono le due radici dell'equazione caratteristica (*), una base di S è data dalle funzioni $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$.

2) $\Delta = 0$. Se $\lambda = \frac{-a}{2}$ è l'unica radice (doppia) dell'equazione caratteristica (*), una base di S è data dalle funzioni $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$.

3) $\Delta < 0$. Siano $\alpha = \frac{-a}{2}$ e $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. (Le radici complesse dell'equazione caratteristica sono perciò $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.) Una base di S è allora $\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$. ■

TEOREMA 11. Sia data un'equazione differenziale lineare del secondo ordine e sia $\{y_1, y_2\}$ una base dello spazio S delle soluzioni dell'equazione omogenea associata. Allora una soluzione particolare dell'equazione completa è data da

$$\bar{y}(x) = \int_{x_0}^x K(x,t) c(t) dt,$$

dove il "nucleo risolvete" $K(x,t)$ è dato da

$$K(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(x-t) & y_2(x-t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix}}.$$

Senno di dimostrazione. (Metodo di variazione delle costanti) Cerchiamo soluzioni del tipo $\bar{y}(x) = d_1(x)y_1(x) + d_2(x)y_2(x)$, con $d_1(x)$ e $d_2(x)$ funzioni incognite di classe C^2 . Si constata che è sufficiente imporre a $d_1(x)$ e $d_2(x)$ di soddisfare al sistema

$$\begin{cases} d_1'(x) y_1(x) + d_2'(x) y_2(x) = 0 \\ d_1'(x) y_1'(x) + d_2'(x) y_2'(x) = c(x) \end{cases}$$

da cui si ricava

$$d_1'(x) = \frac{-y_2(x)c(x)}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}; \quad d_2'(x) = \frac{y_1(x)c(x)}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}.$$

Integrando da x_0 a x e sostituendo, si trovano $d_1(x)$ e $d_2(x)$ e quindi $\bar{y}(x)$.

Per provare l'ultima uguaglianza, osserviamo che, per ogni t , la funzione $z(x) = K(x,t)$ è combinazione lineare di $y_1(x)$ e $y_2(x)$ ed è, pertanto, una soluzione dell'equazione omogenea associata, e soddisfa alle condizioni iniziali $z(t) = 0$ e $z'(t) = 1$. In particolare, è soluzione dell'omogenea anche la funzione $w(x) = K(x,0)$. L'equazione omogenea è del tipo $y'' = -ay' - by$ (equazione *autonoma*); si constata facilmente che, per tali equazioni, se $y(x)$ è soluzione, lo

124 - Capitolo Quattordicesimo

è anche $y(x+k)$. Si ottiene così che la funzione $\bar{z}(x) = K(x-t, 0)$ è una soluzione dell'omogenea per cui è ancora $\bar{z}(t) = 0$ e $\bar{z}'(t) = 1$. Per l'unicità della soluzione del Problema di Cauchy (Teorema 7), si ha $z(x) = \bar{z}(x)$. ■

Casi particolari

Se la funzione $c(x)$ è di tipo particolare, la ricerca di una soluzione $\bar{y}(x)$ può risultare facilitata.

1) Sia $c(x) = P(x)e^{\lambda x}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $P(x)$ polinomio.

- Se λ non è radice dell'equazione caratteristica, \bar{y} può essere ricercata fra le funzioni del tipo

$$\bar{y}(x) = Q(x)e^{\lambda x}, \text{ con } Q(x) \text{ polinomio e } \text{gr}Q(x) = \text{gr}P(x).$$

- Se λ è radice dell'equazione caratteristica con molteplicità $\gamma (\leq 2)$, \bar{y} può essere ricercata fra le funzioni del tipo

$$\bar{y}(x) = x^\gamma Q(x)e^{\lambda x}, \text{ con } Q(x) \text{ polinomio e } \text{gr}Q(x) = \text{gr}P(x).$$

2) Sia $c(x) = e^{\alpha x}P(x) \cos \beta x$ [o $c(x) = e^{\alpha x}P(x) \sin \beta x$] con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P(x)$ polinomio.

- Se $\alpha + i\beta$ non è radice dell'equazione caratteristica, \bar{y} può essere ricercata fra le funzioni del tipo

$$\bar{y}(x) = e^{\alpha x}(Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x), \text{ con } \text{gr}Q_1(x) = \text{gr}Q_2(x) = \text{gr}P(x).$$

- Se $\alpha + i\beta$ è radice dell'equazione caratteristica (necessariamente di molteplicità $\gamma = 1$, dato che deve essere radice anche $\alpha - i\beta$), \bar{y} può essere ricercata fra le funzioni del tipo

$$\bar{y}(x) = xe^{\alpha x}(Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x), \text{ con } \text{gr}Q_1(x) = \text{gr}Q_2(x) = \text{gr}P(x).$$

Sarà poi utile tener presente il seguente risultato di immediata verifica noto col nome di *Principio di sovrapposizione*:

Posto $L(y) = y'' + ay' + by$, da $L(y_1) = c_1$ e $L(y_2) = c_2$, segue $L(y_1 + y_2) = c_1 + c_2$,

che permette, spezzando il termine noto nella somma dei suoi eventuali addendi, di ricondurre il problema della ricerca di \bar{y} a sottoproblemi più semplici.

ESEMPLI. 1) Risolvere l'equazione $y'' + y' - 2y = xe^x$.

Le radici dell'equazione caratteristica sono 1 e -2; quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni $c_1e^x + c_2e^{-2x}$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa. Siccome il termine noto è xe^{1x} e il numero 1 è radice semplice dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\bar{y}(x) = xe^x(ax + b) = e^x(ax^2 + bx)$.

Sostituendo nell'equazione data, si trovano i valori $a = \frac{1}{6}$ e $b = -\frac{1}{9}$. Le soluzioni dell'equazione completa sono perciò le funzioni

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + e^x \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{9} \right).$$

2) Risolvere l'equazione $y'' - y = x^3 - 2 + e^x$.

Le radici dell'equazione caratteristica sono 1 e -1; quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni $c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa. Siccome il termine noto è la somma di un polinomio e di e^{1x} , per il *Principio di sovrapposizione*, risolviamo separatamente i due problemi che si ottengono con $c_1(x) = x^3 - 2$ e $c_2(x) = e^x$. Nel primo caso, cerchiamo soluzioni del tipo $e^{0x} Q(x)$, con $Q(x)$ polinomio di terzo grado: si trova il polinomio $Q(x) = -x^3 - 6x + 2$. Nel secondo caso, siamo in una situazione analoga a quella dell'esempio precedente: cerchiamo perciò una soluzione del tipo $\bar{y}(x) = kxe^x$; si trova il valore $k = \frac{1}{2}$. Le soluzioni dell'equazione completa sono quindi le funzioni

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x^3 - 6x + 2 + \frac{1}{2} x e^x.$$

3) Risolvere l'equazione $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$, su $I =]0, \pi[$.

Le radici dell'equazione caratteristica sono $\pm i$; quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni $c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa; in questo caso, utilizziamo il metodo generale, assumendo $x_0 = \pi/2$. Si ha

$$\bar{y}(x) = \int_{\pi/2}^x K(x,t) \frac{1}{\sin t} dt,$$

con

$$K(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}} = \sin x \cos t - \cos x \sin t.$$

È dunque:

$$\bar{y}(x) = \int_{\pi/2}^x \frac{\sin x \cos t - \cos x \sin t}{\sin t} dt = \sin x \log \sin x - 0 - (x - \pi/2) \cos x.$$

Le soluzioni dell'equazione completa sono perciò le funzioni

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \sin x \log \sin x - (x - \pi/2) \cos x.$$

§ 6. EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DI ORDINE n A COEFFICIENTI COSTANTI

DEFINIZIONE. Un'equazione differenziale del tipo

$$(*) \quad y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \dots + a_n y(x) = c(x),$$

con $c(x): I \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua, I intervallo, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, è detta equazione differenziale lineare (completa) di ordine n a coefficienti costanti. L'equazione

$$y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + a_2y^{(n-2)}(x) + \dots + a_ny(x) = 0$$

è detta equazione differenziale *omogenea associata* all'equazione completa.

DEFINIZIONE. Si dice che una funzione $y: I(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ è una soluzione della (*) se:

- 1) $y(x)$ è n volte derivabile in I ;
- 2) $y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + a_2y^{(n-2)}(x) + \dots + a_ny(x) = c(x), \forall x \in I$.

TEOREMA 12. *Le soluzioni di un'equazione differenziale lineare completa di ordine n sono date dalle funzioni del tipo $y(x) = z(x) + \bar{y}(x)$, con $z(x)$ generica soluzione dell'equazione omogenea associata e $\bar{y}(x)$ soluzione particolare dell'equazione completa. ■*

TEOREMA 13. *Le soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti di ordine n costituiscono un sottospazio S di dimensione n dello spazio vettoriale $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. ■*

PROBLEMA. Trovare una base di S , cioè n funzioni $y_1, y_2, \dots, y_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ tali che ogni soluzione $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ sia una loro combinazione lineare.

DEFINIZIONE. Data l'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti $y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + a_2y^{(n-2)}(x) + \dots + a_ny(x) = 0$, si chiama sua *equazione caratteristica* l'equazione di grado n

$$(*) \quad z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

TEOREMA 14. *Sia data un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n a coefficienti costanti $y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + a_2y^{(n-2)}(x) + \dots + a_ny(x) = 0$. Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ sono le radici reali della (*) e $\beta_1 \pm i\gamma_1, \beta_2 \pm i\gamma_2, \dots, \beta_s \pm i\gamma_s$ quelle complesse (a due a due coniugate), di molteplicità rispettive $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ e $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s$, una base dello spazio vettoriale S è data dalle funzioni:*

$$\begin{aligned} & e^{\alpha_1 x}, xe^{\alpha_1 x}, \dots, x^{\mu_1-1} e^{\alpha_1 x}, \\ & e^{\alpha_2 x}, xe^{\alpha_2 x}, \dots, x^{\mu_2-1} e^{\alpha_2 x}, \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ & e^{\alpha_r x}, xe^{\alpha_r x}, \dots, x^{\mu_r-1} e^{\alpha_r x}, \\ & e^{\beta_1 x} \cos \gamma_1 x, xe^{\beta_1 x} \cos \gamma_1 x, \dots, x^{\nu_1-1} e^{\beta_1 x} \cos \gamma_1 x, \\ & e^{\beta_1 x} \sin \gamma_1 x, xe^{\beta_1 x} \sin \gamma_1 x, \dots, x^{\nu_1-1} e^{\beta_1 x} \sin \gamma_1 x, \\ & e^{\beta_2 x} \cos \gamma_2 x, xe^{\beta_2 x} \cos \gamma_2 x, \dots, x^{\nu_2-1} e^{\beta_2 x} \cos \gamma_2 x, \\ & e^{\beta_2 x} \sin \gamma_2 x, xe^{\beta_2 x} \sin \gamma_2 x, \dots, x^{\nu_2-1} e^{\beta_2 x} \sin \gamma_2 x, \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ & e^{\beta_s x} \cos \gamma_s x, xe^{\beta_s x} \cos \gamma_s x, \dots, x^{\nu_s-1} e^{\beta_s x} \cos \gamma_s x, \blacksquare \\ & e^{\beta_s x} \sin \gamma_s x, xe^{\beta_s x} \sin \gamma_s x, \dots, x^{\nu_s-1} e^{\beta_s x} \sin \gamma_s x. \end{aligned}$$

TEOREMA 15. *Sia data un'equazione differenziale lineare di ordine n e sia $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ una base dello spazio S delle soluzioni dell'equazione omogenea associata. Allora una soluzione particolare dell'equazione completa è data da*

$$\bar{y}(x) = \int_{x_0}^x K(x,t) c(t) dt,$$

dove il "nucleo risolvete" $K(x,t)$ è dato da

$$K(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y'_1(t) & \dots & y'_n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1(x) & \dots & y_n(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y'_1(t) & \dots & y'_n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}}.$$

Casi particolari

1) Sia $c(x) = P(x) e^{\lambda x}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $P(x)$ polinomio.

- Se λ non è radice dell'equazione caratteristica, \bar{y} può essere ricercata fra le funzioni del tipo

$$\bar{y}(x) = Q(x) e^{\lambda x}, \text{ con } Q(x) \text{ polinomio e } \text{gr}Q(x) = \text{gr}P(x).$$

- Se λ è radice dell'equazione caratteristica con molteplicità γ , \bar{y} può essere ricercata fra le funzioni del tipo

$$\bar{y}(x) = x^\gamma Q(x) e^{\lambda x}, \text{ con } Q(x) \text{ polinomio e } \text{gr}Q(x) = \text{gr}P(x).$$

2) Sia $c(x) = e^{\alpha x} P(x) \cos \beta x$ [o $c(x) = e^{\alpha x} P(x) \sin \beta x$] con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P(x)$ polinomio.

- Se $\alpha + i\beta$ non è radice dell'equazione caratteristica, \bar{y} può essere ricercata fra le funzioni del tipo

$$\bar{y}(x) = e^{\alpha x} (Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x), \text{ con } \text{gr}Q_1(x) = \text{gr}Q_2(x) = \text{gr}P(x).$$

- Se $\alpha + i\beta$ è radice dell'equazione caratteristica con molteplicità γ , \bar{y} può essere ricercata fra le funzioni del tipo

$$\bar{y}(x) = x^\gamma e^{\alpha x} (Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x), \text{ con } \text{gr}Q_1(x) = \text{gr}Q_2(x) = \text{gr}P(x).$$

Sussiste ancora il *Principio di sovrapposizione*:

Posto $L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y$, da $L(y_1) = c_1$ e $L(y_2) = c_2$, segue
 $L(y_1 + y_2) = c_1 + c_2$,

che permette, spezzando il termine noto nella somma dei suoi eventuali addendi, di ricondurre il problema della ricerca di \bar{y} a sottoproblemi più semplici.

ESEMPLI.- 1) Risolvere l'equazione $y''' - y'' + y' - y = e^x$.

Le radici dell'equazione caratteristica sono 1 e $\pm i$; quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni $c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa. Siccome il termine noto è e^{1x} e il numero 1 è radice semplice dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione del tipo $\bar{y}(x) = axe^x$. Sostituendo nell'equazione data, si trova il valore $a = \frac{1}{2}$. Le soluzioni dell'equazione completa sono perciò le funzioni

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{2} x e^x.$$

2) Risolvere l'equazione $y^{(4)} + 2y'' + y = 1$.

Le radici dell'equazione caratteristica sono $\pm i$; ciascuna con molteplicità 2 ; quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni $c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x$. Si vede poi subito che la funzione $\bar{y}(x) = 1$ è una soluzione particolare dell'equazione completa. Le soluzioni dell'equazione completa sono perciò le funzioni

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x + 1.$$

3) Risolvere l'equazione $y''' - y' = \frac{1}{1 + e^x}$.

Le radici dell'equazione caratteristica sono 0 e ± 1 ; quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni $c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa. Assumendo $x_0 = 0$, si ha

$$\bar{y}(x) = \int_0^x K(x,t) \frac{1}{1 + e^t} dt,$$

con

$$K(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & e^t & e^{-t} \\ 0 & e^t & -e^{-t} \\ 1 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^t & e^{-t} \\ 0 & e^t & -e^{-t} \\ 0 & e^t & e^{-t} \end{vmatrix}} = \frac{e^{t-x} + e^{x-t} - 2}{2}.$$

È dunque:

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) &= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{e^{t-x} + e^{x-t} - 2}{1 + e^t} dt = \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x \frac{e^t}{1 + e^t} dt + \frac{e^x}{2} \int_0^x \frac{e^{-t}}{1 + e^t} dt - \int_0^x \frac{1}{1 + e^t} dt = \\ &= \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x \frac{e^t}{1 + e^t} dt + \frac{e^x}{2} \int_0^x \frac{e^t}{e^{2t}(1 + e^t)} dt + \int_0^x \frac{-e^{-t}}{1 + e^{-t}} dt = \\ &= \frac{e^{-x}}{2} [\log(1 + e^x) - \log 2] + \frac{e^x}{2} [\log(1 + e^x) - x - e^{-x} - \log 2 + 1] + \\ &\quad + [\log(1 + e^{-x}) - \log 2]. \end{aligned}$$

[Per il calcolo del secondo integrale, si effettua la sostituzione $e^x = u$.]

Equazioni di Eulero

Sono dette così le equazioni del tipo

$$x^n y^{(n)}(x) + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} x y'(x) + a_n y(x) = c(x),$$

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $c(x): I \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua, I intervallo. Si effettua la sostituzione $x = e^t$, se è $x > 0$ [$x = -e^t$, se è $x < 0$], ottenendo un'equazione lineare a coefficienti costanti.

Proviamolo per $n = 2$ e $n = 3$. Posto, per $x > 0$, $u(t) = y(e^t)$, si ha:

$$u'(t) = y'(e^t)e^t, \quad u''(t) = y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t, \quad u'''(t) = y'''(e^t)e^{3t} + 3y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t,$$

da cui $y(e^t) = u(t)$, $y'(e^t) = u'(t)e^{-t}$,

$$y''(e^t) = [u''(t) - u'(t)]e^{-2t}, \quad y'''(e^t) = [u'''(t) - 3u''(t) + 2u'(t)]e^{-3t}.$$

Posto, per $x < 0$, $u(t) = y(-e^t)$, si ha:

$$u'(t) = -y'(-e^t)e^t, \quad u''(t) = y''(-e^t)e^{2t} - y'(-e^t)e^t, \quad u'''(t) = -y'''(-e^t)e^{3t} + 3y''(-e^t)e^{2t} - y'(-e^t)e^t,$$

da cui $y(-e^t) = u(t)$, $y'(-e^t) = -u'(t)e^{-t}$,

$$y''(-e^t) = [u''(t) - u'(t)]e^{-2t}, \quad y'''(-e^t) = [-u'''(t) + 3u''(t) - 2u'(t)]e^{-3t}.$$

L'equazione $x^2 y''(x) + a_1 x y'(x) + a_2 y(x) = c(x)$ diventa, nei due casi,

$$u''(t) + [a_1 - 1]u'(t) + a_2 u(t) = c(e^t) \quad [= c(-e^t)].$$

L'equazione $x^3 y'''(x) + a_1 x^2 y''(x) + a_2 x y'(x) + a_3 y(x) = c(x)$ diventa, nei due casi,

$$u'''(t) + [a_1 - 3]u''(t) + [a_2 - a_1 + 2]u'(t) + a_3 u(t) = c(e^t) \quad [= c(-e^t)].$$

ESEMPLI. 1) Risolvere l'equazione $x^2 y''(x) + x y'(x) - y(x) = 1$.

Posto, per $x > 0$, $x = e^t$, si ottiene l'equazione

$$u''(t) - u(t) = 1$$

che ha per soluzioni le funzioni $c_1 e^t + c_2 e^{-t} - 1$; si ricava che le soluzioni dell'equazione data sono le funzioni

$$c_1 x + c_2 \frac{1}{x} - 1.$$

2) Risolvere l'equazione $x^3 y'''(x) - x y'(x) + y(x) = \log x$; $x > 0$.

Posto $x = e^t$, si ottiene l'equazione $u'''(t) - 3u''(t) + u'(t) + u(t) = t$.

L'equazione caratteristica ha le radici 1 e $1 \pm \sqrt{2}$; sono dunque soluzioni dell'equazione omogenea le funzioni $c_1 e^t + c_2 e^{(1+\sqrt{2})t} + c_3 e^{(1-\sqrt{2})t}$. Si vede poi che una soluzione dell'equazione completa è data dalla funzione $\bar{u}(t) = t - 1$. In conclusione, le soluzioni dell'equazione data sono le funzioni

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^{(1+\sqrt{2})} + c_3 x^{(1-\sqrt{2})} + \log x - 1.$$

§ 7. SISTEMI DI DUE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL PRIMO ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI

Ci occuperemo di sistemi del tipo

$$\begin{cases} u'(x) = au(x) + bv(x) + f(x) \\ v'(x) = cu(x) + dv(x) + g(x) \end{cases}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $f, g: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , I intervallo.

Una soluzione del sistema è una coppia di funzioni $(u(x), v(x))$ con $u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili che soddisfano su I alle equazioni date.

Si vede anzi che una soluzione $(u(x), v(x))$ deve essere formata da funzioni di classe C^2 su I . Derivando i due membri della prima equazione e sfruttando la seconda, si ottiene:

$$\begin{aligned} u''(x) &= au'(x) + bv'(x) + f'(x) = \\ &= au'(x) + b(cu(x) + dv(x) + g(x)) + f'(x) = \\ &= au'(x) + bcu(x) + d(u'(x) - au(x) - f(x)) + bg(x) + f'(x). \end{aligned}$$

In conclusione, si ha

$$u''(x) = (a + d)u'(x) + (bc - ad)u(x) + bg(x) - df(x) + f'(x).$$

Questa è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. La si risolve e si sostituiscono le espressioni di $u(x)$ e $u'(x)$ nella prima equazione ricavando così anche $v(x)$.

ESEMPLI. 1) Si vuol risolvere il sistema

$$\begin{cases} u'(x) = u(x) + v(x) + 1 \\ v'(x) = u(x) - v(x) + x \end{cases}$$

Derivando la prima e sfruttando la seconda, si ha

$$u''(x) = u'(x) + v'(x) = u'(x) + u(x) - v(x) + x = 2u(x) + x + 1.$$

Si ottiene così l'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti

$$u''(x) - 2u(x) = x + 1$$

la cui soluzione generale è $u(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} - \frac{1}{2}(x + 1)$.

Sostituendo nella prima equazione, si ottiene

$$\begin{aligned} v(x) = u'(x) - u(x) - 1 &= \sqrt{2}c_1 e^{\sqrt{2}x} - \sqrt{2}c_2 e^{-\sqrt{2}x} - \frac{1}{2} - c_1 e^{\sqrt{2}x} - c_2 e^{-\sqrt{2}x} + \frac{1}{2}(x + 1) - 1 = \\ &= (\sqrt{2} - 1)c_1 e^{\sqrt{2}x} - (\sqrt{2} + 1)c_2 e^{-\sqrt{2}x} + \frac{1}{2}x - 1. \end{aligned}$$

2) Si vuol risolvere il sistema

$$\begin{cases} u'(x) = u(x) + e^x \\ v'(x) = u(x) - v(x) + \cos x \end{cases}$$

In questo caso si può procedere in maniera più diretta, dato che nella prima equazione compare una sola delle due incognite. Procedendo come ormai ben sappiamo, si trova facilmente che le soluzioni della prima equazione sono le funzioni

$$u(x) = (c_1 + x)e^x.$$

Sostituendo nella seconda equazione, si ottiene

$$v'(x) + v(x) = (c_1 + x)e^x + \cos x,$$

da cui

$$\begin{aligned} v(x) &= c_2 e^{-x} + \int_{x_0}^x e^{-x+t} [(c_1 + t)e^t + \cos t] dt = \\ &= c_2 e^{-x} + e^{-x} \int_{x_0}^x [e^{2t} (c_1 + t) + e^t \cos t] dt = c_2 e^{-x} + e^{-x} [F(x) - F(x_0)], \end{aligned}$$

con

$$F(t) = \frac{1}{4} e^{2t} (2t + 2c_1 - 1) + \frac{1}{2} e^t (\cos t + \sin t).$$

§ 8. ESERCIZI

1) Risolvere i seguenti Problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} \\ y(1) = y_0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y' = \frac{2x-3}{y+2} \\ y(1) = y_0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y' = 2x \sin y \\ y(0) = y_0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y' = \frac{y}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y' = e^{x-y} \\ y(0) = y_0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y'' = 2x(y')^2 \\ y(1) = y'(1) = 1 \end{cases} \quad [\text{Si ponga } u = y'.]$$

2) Trovare le traiettorie ortogonali alle famiglie di curve:

$$a) y = ax; \quad b) xy = a.$$

3) Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari:

$$y' = -xy + x^3; \quad y' = y \sin x + \sin 2x; \quad y'' + y' = \sin x;$$

$$y'' - 4y = 4e^{-2x}; \quad y'' - 2y' + y = 0; \quad y'' - y = xe^x;$$

$$y'' + y = x \cos x; \quad y'' - 2y' + 2y = e^x + 1; \quad y''' - y' = (3-x)e^{-2x}; \quad y''' - y'' + y' - y = xe^x + 1;$$

$$y''' - 2y'' + y' = x; \quad y^{(4)} - y = 1 + e^x; \quad y''' + 3y'' = 0; \quad y^{(4)} + 2y'' + y = 1.$$

4) Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

$$y' = 2y(1 - 2y); \quad y' = 2 \frac{1+y^2}{1+x^2}; \quad y' = xy \log y;$$

132 - Capitolo Quattordicesimo

$$y' = (1 + y^2)\operatorname{arctg}y; \quad y' = \frac{1-y}{x}; \quad y' = y^2 \log x;$$

$$y' = 2\sqrt{y}(x+1); \quad y' = \frac{x+1}{y-1}; \quad y' = xy^2 + y;$$

$$y' = \frac{x+y}{x-y}; \quad x^3 y''' + xy' - y = 0; \quad y' = \frac{y}{x} + y^2 \sin x;$$

$$y' = 2xy + x^3 y^3; \quad x^2 y'' + 4xy' + 2y = \frac{1}{x};$$

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = \log x; \quad (x+1)y'' + y' - \frac{4y}{x+1} = 0.$$

5) Risolvere i seguenti sistemi di equazioni differenziali lineari:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -u \end{cases}; \quad \begin{cases} u' = -v - 1 \\ v' = u + x \end{cases}; \quad \begin{cases} u' = u - v + 2 \\ v' = -u + v + x \end{cases};$$

$$\begin{cases} v' + u' + v + 2u = 0 \\ v' - u' + 3v + 4u = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} u' + u - v = e^x \\ v' + 4v + u = x + 3 \end{cases}.$$

6) si risolvano i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' = e^{2y} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y'' - 2y' + 2y = e^x + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases};$$

7) Si provi che ogni funzione $u: A(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile sull'insieme aperto A e positivamente omogenea, ossia tale che

$$u(tx, ty) = u(x, y), \quad \forall t > 0, \forall (x, y)^T \in A,$$

è soluzione dell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0.$$

[\mathfrak{R} . Per ipotesi, la funzione u è costante sulle semirette $\{(tx, ty)^T: t > 0\}$; è dunque costante la funzione $F:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(t) = u(tx, ty)$. La F è derivabile, con derivata identicamente nulla.]