Capitolo Tredicesimo
INTEGRALE DI RIEMANN

§ 1. LA DEFINIZIONE DI INTEGRALE

Potremmo dare un'unica definizione ma, per chiarezza, distinguiamo i casi $n = 1, 2, 3$.

A) $\boxed{\boldsymbol{n = 1}}$

Sia $R = [a, b]$ ($\subset \mathbb{R}$) un intervallo. Si fissano $n + 1$ punti di $[a, b]$: $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ e si pone $R_i = [x_{i-1}, x_i]$, con $i = 1, 2, \ldots, n$.

DEFINIZIONE. La collezione degli R_i è detta *decomposizione* di R. La indicheremo scrivendo $\delta := \{R_i\}$. Indicheremo, inoltre, con $m(R_i)$ l'ampiezza dell'intervallo R_i o, ciò che è lo stesso, la sua *misura*; è dunque $m(R_i) := x_i - x_{i-1}$.

DEFINIZIONE. Siano date le due decomposizioni δ e δ' di R, individuate rispettivamente dalle due collezioni di punti $\{x_0, \ldots, x_n\}$ e $\{x'_0, \ldots, x'_m\}$. Se è $\{x_0, \ldots, x_n\} \subset \{x'_0, \ldots, x'_m\}$, si dice che δ' è *più fine* di δ e si scrive $\delta \leqq \delta'$.

È di immediata verifica il seguente

TEOREMA 1. *Quella ora definita è una relazione d'ordine parziale nell'insieme $\Delta(R)$ di tutte le possibili decomposizioni di R. Inoltre, date le due decomposizioni δ e δ' di R individuate dagli insiemi di punti* $\{x_0, \ldots, x_n\}$ e $\{x'_0, \ldots, x'_m\}$, *esiste una decomposizione più fine di entrambi; anzi, la decomposizione δ'' che si ottiene dai punti dell'insieme* $\{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{x'_0, \ldots, x'_m\}$ *è la minima seguente comune di δ e δ'.* ∎

DEFINIZIONE. Data una funzione f: R ($\subset \mathbb{R}$) $\to \mathbb{R}$ che sia *limitata*, per ogni decomposizione δ di R, si definiscono la *somma inferiore* $s(\delta,f)$ e la *somma superiore* $S(\delta,f)$ ponendo:

$$s(\delta,f) := \sum_{i=1}^{n} l_i\, m(R_i), \qquad S(\delta,f) := \sum_{i=1}^{n} L_i\, m(R_i),$$

essendo
$$l_i := \inf f(R_i), \quad L_i := \sup f(R_i).$$

Si prova poi il

TEOREMA 2. 1) *$s(\delta,f) \le S(\delta,f)$, per ogni $\delta \in \Delta(R)$.*
2) *Se è $\delta \leqq \delta'$, allora è $s(\delta,f) \le s(\delta',f)$* e *$S(\delta,f) \ge S(\delta',f)$.*
3) *Quali che siano le decomposizioni δ' e δ'' di R, si ha $s(\delta',f) \le S(\delta'',f)$.*

DIM. La (1) è immediata. Proviamo la (2). Per passare da una decomposizione δ di R a una più fine δ', bisogna aggiungere ai punti x_i che individuano δ un numero finito di ulteriori punti; possiamo pensare di procedere a tappe, aggiungendo un punto alla volta; basta provare che la tesi sussiste per ciascuno di questi passi. Supponiamo dunque assegnata la decomposizione δ individuata dai punti $\{x_0, \ldots, x_n\}$ e aggiungiamo un punto $y \in \,]x_{i-1}, x_i[$. Siano:

$$R'_i := [x_{i-1}, y], \quad R''_i := [y, x_i], \quad l'_i := \inf f(R'_i), \; l''_i := \inf f(R''_i).$$

Si ha immediatamente: $l'_i \geq l_i$ e $l''_i \geq l_i$, da cui

$$l'_i\, m(R'_i) + l''_i m(R''_i) \geq l_i\,(m(R'_i) + m(R''_i)) = l_i m(R_i)$$

e quindi la tesi. Si procede analogamente per le somme superiori.

Proviamo ora la (3). Date due decomposizioni δ' e δ'' di R, sia δ una decomposizione più fine di entrambi. Si ha:

$$s(\delta',f) \leq s(\delta,f) \leq S(\delta,f) \leq S(\delta'',f). \blacksquare$$

La (3) si esprime dicendo che: *Le classi numeriche* $\sigma(f) = \{s(\delta,f)\}$ e $\Sigma(f) = \{S(\delta,f)\}$ *sono separate.*

DEFINIZIONE. Se le classi numeriche $\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ sono *contigue*, cioè se è $\sup\, \sigma(f) = \inf\, \Sigma(f)$, si dice che f è *integrabile (secondo Riemann) su R*. Il numero $\sup\, \sigma(f) = \inf\, \Sigma(f)$ è detto l'*integrale* della f su R e lo si indica col simbolo

$$\int_R f\, dm; \quad \int_R f(x)\, dx.$$

ESEMPI. 1) Sia f: $R = [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione che vale 1 nei punti razionali e vale 0 in quelli irrazionali. Qualunque sia la decomposizione δ di R, si ha, per ogni i, $l_i = 0$ e $L_i = 1$, da cui $s(\delta,f) = 0$ e $S(\delta,f) = 1$. Dunque la funzione data, che è detta funzione di Dirichlet, *non è* integrabile su R.

2) Sia f: $R = [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione che vale costantemente 1. Qualunque sia la decomposizione δ di R, si ha, per ogni i, $l_i = L_i = 1$, da cui $s(\delta,f) = S(\delta,f) = 1$. Dunque la funzione data *è* integrabile su R e si ha $\int_R f\, dm = 1$.

3) Sia f: $R = [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$. Decomponiamo R in n intervalli di uguale ampiezza $\rho = \frac{1}{n}$. Si ha:

$$s(\delta,f) = \sum_{i=1}^{n} l_i\, m(R_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^2}\,\frac{n\,(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2n} < \frac{1}{2};$$

$$S(\delta,f) = \sum_{i=1}^{n} L_i\, m(R_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}\,\frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Si ha inoltre:

$$S(\delta,f) - s(\delta,f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{1}{n}.$$

Le classi numeriche delle somme inferiori e delle somme superiori sono dunque contigue e l'unico elemento separatore è $\frac{1}{2}$. La f è quindi integrabile su R e si ha $\int_R f\, dm = \frac{1}{2}$.

4) Sia f: $R = [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Decomponiamo R in n intervalli di uguale ampiezza $\rho = \frac{1}{n}$. Si ha:

$$s(\delta,f) = \sum_{i=1}^{n} l_i m(R_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} < \frac{1}{3};$$

$$S(\delta,f) = \sum_{i=1}^{n} L_i m(R_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L_i = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} > \frac{1}{3}.$$

Si ha inoltre:

$$S(\delta,f) - s(\delta,f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}[i^2 - (i-1)^2] =$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(2i-1) < \frac{(2n-1)n}{n^3} < \frac{2}{n}.$$

Le classi numeriche delle somme inferiori e delle somme superiori sono dunque contigue e l'unico elemento separatore è $\frac{1}{3}$. La f è quindi integrabile su R e si ha $\int_R f\, dm = \frac{1}{3}$.

B) $\boxed{n = 2}$

Sia $R = [a, b] \times [c, d]$ un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Si fissano $n + 1$ punti di $[a, b]$: $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ e $p + 1$ punti di $[c, d]$: $y_0 = c < y_1 < \ldots < y_p = d$. Si pone $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, con $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, p$.

DEFINIZIONE. La collezione degli R_{ij} è detta *decomposizione* di R. La indicheremo scrivendo $\delta := \{R_{ij}\}$. Indicheremo, inoltre, con $m(R_{ij})$ la misura del rettangolo R_{ij}; è dunque $m(R_{ij}) := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$.

DEFINIZIONE. Siano date le due decomposizioni δ e δ' di R, individuate rispettivamente dalle due collezioni di punti $\{x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_p\}$ e $\{x'_0, \ldots, x'_m, y'_0, \ldots, y'_q\}$. Se è $\{x_0, \ldots, x_n\} \subset \{x'_0, \ldots, x'_m\}$ e $\{y_0, \ldots, y_p\} \subset \{y'_0, \ldots, y'_q\}$, si dice che δ' è *più fine* di δ e si scrive $\delta \leqq \delta'$.

È di immediata verifica il seguente

TEOREMA 1'. *Quella ora definita è una relazione d'ordine parziale nell'insieme $\Delta(R)$ di tutte le possibili decomposizioni di R. Inoltre, date le due decomposizioni δ e δ' di R individuate dagli insiemi di punti* $\{x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_p\}$ e $\{x'_0, \ldots, x'_m, y'_0, \ldots, y'_q\}$, *esiste una decomposizione più fine di entrambi; anzi, la decomposizione δ'' che si ottiene dagli insiemi* $\{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{x'_0, \ldots, x'_m\}$ e $\{y_0, \ldots, y_p\} \cup \{y'_0, \ldots, y'_q\}$ *è la minima seguente comune di δ e δ'.* ∎

DEFINIZIONE. Data una funzione f: $R(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ che sia *limitata*, per ogni decomposizione δ di R, si definiscono la *somma inferiore* $s(\delta,f)$ e la *somma superiore* $S(\delta,f)$ ponendo:

$$s(\delta,f) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} l_{ij}\, m(R_{ij}),\quad S(\delta,f) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} L_{ij}\, m(R_{ij}),$$

essendo $\quad l_{ij} := \inf f(R_{ij}), \quad L_{ij} := \sup f(R_{ij}).$

Si vede subito che, analogamente al caso $n = 1$, sussiste il

TEOREMA 2'. 1) $s(\delta,f) \leq S(\delta,f)$, *per ogni* $\delta \in \Delta(R)$.
2) *Se è* $\delta \leqq \delta'$, *allora è* $s(\delta,f) \leq s(\delta',f)$ *e* $S(\delta,f) \geq S(\delta',f)$.
3) *Quali che siano le decomposizioni* δ' e δ'' *di* R, *si ha* $s(\delta',f) \leq S(\delta'',f)$. ∎

La (3) si esprime dicendo che: *Le classi numeriche* $\sigma(f) = \{s(\delta,f)\}$ e $\Sigma(f) = \{S(\delta,f)\}$ *sono separate.*

DEFINIZIONE. Se le classi numeriche $\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ sono *contigue*, cioè se è $\sup \sigma(f) = \inf \Sigma(f)$, si dice che f è *integrabile (secondo Riemann) su R*. Il numero $\sup \sigma(f) = \inf \Sigma(f)$ è detto l'*integrale* della f su R e lo si indica con uno dei simboli

$$\int_R f\, dm; \quad \iint_R f(x,y)\, dxdy.$$

C) $\boxed{n = 3}$

Sia $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ un rettangolo di $\mathbb{R}^3$ (cioè un parallelepipedo). Si fissano $n + 1$ punti di $[a_1, b_1]$: $x_0 = a_1 < x_1 < \ldots < x_n = b_1$, $p + 1$ punti di $[a_2, b_2]$: $y_0 = a_2 < y_1 < \ldots < y_p = b_2$ e $r + 1$ punti di $[a_3, b_3]$: $z_0 = a_3 < z_1 < \ldots < z_r = b_3$. Si pone $R_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$, con $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, p$ e $k = 1, 2, \ldots, r$.

DEFINIZIONE. La collezione degli R_{ijk} è detta *decomposizione* di R. La indicheremo scrivendo $\delta = \{R_{ijk}\}$. Indicheremo, inoltre, con $m(R_{ijk})$ la misura del rettangolo R_{ijk}; è dunque $m(R_{ijk}) := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$.

DEFINIZIONE. Siano date le due decomposizioni δ e δ' di R, individuate rispettivamente dalle due collezioni di punti $\{x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_p, z_0, \ldots, z_r\}$ e $\{x'_0, \ldots, x'_m, y'_0, \ldots, y'_q, z'_0, \ldots, z'_s\}$. Se è $\{x_0, \ldots, x_n\} \subset \{x'_0, \ldots, x'_m\}$, $\{y_0, \ldots, y_p\} \subset \{y'_0, \ldots, y'_q\}$ e $\{z_0, \ldots, z_r\} \subset \{z'_0, \ldots, z'_s\}$ si dice che δ' è *più fine* di δ e si scrive $\delta \leqq \delta'$.

È di immediata verifica il seguente

TEOREMA 1''. *Quella ora definita è una relazione d'ordine parziale nell'insieme* $\Delta(R)$ *di tutte le possibili decomposizioni di R. Inoltre, date le due decomposizioni* δ *e* δ' *di R individuate dagli insiemi di punti* $\{x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_p, z_0, \ldots, z_r\}$ *e* $\{x'_0, \ldots, x'_m, y'_0, \ldots, y'_q, z'_0, \ldots, z'_s\}$, *esiste una decomposizione più fine di entrambi; anzi, la decomposizione* δ'' *che si ottiene dagli insiemi* $\{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{x'_0, \ldots, x'_m\}$, $\{y_0, \ldots, y_p\} \cup \{y'_0, \ldots, y'_q\}$ *e* $\{z_0, \ldots, z_r\} \cup \{z'_0, \ldots, z'_s\}$ *è la minima seguente comune di* δ *e* δ'. ∎

DEFINIZIONE. Data una funzione f: $R(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ che sia *limitata*, per ogni decomposizione δ di R, si definiscono la *somma inferiore* $s(\delta,f)$ e la *somma superiore* $S(\delta,f)$ ponendo:

$$s(\delta,f) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} l_{ijk}\, m(R_{ijk}), \qquad S(\delta,f) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} L_{ijk}\, m(R_{ijk}),$$

essendo $$l_{ijk} := \inf f(R_{ijk}), \qquad L_{ijk} := \sup f(R_{ijk}).$$

Si vede subito che, analogamente ai casi $n = 1$ e $n = 2$, sussiste il

TEOREMA 2". 1) $s(\delta,f) \leq S(\delta,f)$, *per ogni* $\delta \in \Delta(R)$.
2) *Se è* $\delta \leqq \delta'$, *allora è* $s(\delta,f) \leq s(\delta',f)$ *e* $S(\delta,f) \geq S(\delta',f)$.
3) *Quali che siano le decomposizioni* δ' e δ'' *di R, si ha* $s(\delta',f) \leq S(\delta'',f)$. ∎

La (3) si esprime dicendo che: *Le classi numeriche* $\sigma(f) = \{s(\delta,f)\}$ e $\Sigma(f) = \{S(\delta,f)\}$ *sono separate.*

DEFINIZIONE. Se le classi numeriche $\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ sono *contigue*, cioè se è $\sup \sigma(f) = \inf \Sigma(f)$, si dice che f è *integrabile (secondo Riemann) su R*. Il numero $\sup \sigma(f) = \inf \Sigma(f)$ è detto l'*integrale* della f su R e lo si indica con uno dei simboli

$$\int_R f\, dm, \qquad \iiint_R f(x,y,z)\, dxdydz.$$

§ 2. PROPRIETÀ DELL' INTEGRALE

Gli esempi prodotti mostrano come già per le funzioni di una variabile possa essere faticoso decidere direttamente, cioè in base alla definizione, se una funzione è integrabile e, in caso affermativo, calcolarne l'integrale. Per le funzioni di più variabili, le cose diventano ancora più complicate. Sarà perciò più che mai utile avere dei criteri di integrabilità e delle tecniche di calcolo.

LEMMA 3. *Una funzione* f: $R(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *è integrabile su R se e solo se*

(*) $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta \in \Delta(R))(S(\delta,f) - s(\delta,f) < \varepsilon).$$

DIM. Se è verificata la (*), le due classi numeriche $\sigma(f) = \{s(\delta,f)\}$ e $\Sigma(f) = \{S(\delta,f)\}$ sono ovviamente contigue e la f è integrabile.

Viceversa, se la f è integrabile, le classi numeriche $\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ sono contigue; dunque, fissato un $\varepsilon > 0$, esistono una somma superiore $S(\delta',f)$ e una somma inferiore $s(\delta'',f)$ tali che $S(\delta',f) - s(\delta'',f) < \varepsilon$. Se δ è una decomposizione di R più fine di δ' e δ'', si ha

$$s(\delta',f) \leq s(\delta,f) \leq S(\delta,f) \leq S(\delta'',f),$$

da cui $$S(\delta,f) - s(\delta,f) < \varepsilon. ∎$$

TEOREMA 4. *Se* f: $R(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *è continua, allora è integrabile su R.*

DIM. Proviamolo per $n = 1$; per $n > 1$, si procede in modo perfettamente analogo. Per il Teorema di Heine (Cap. 12, Teor. 15), la f è uniformemente continua su R. Dunque, per ogni

$\varepsilon > 0$, esiste un $\rho > 0$ tale che da $|x - y| < \rho$ segue $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$. Fissato un $\varepsilon > 0$, ripartiamo R in sottointervalli tutti di ampiezza minore del corrispondente ρ. Si ha, per ogni i, $L_i - l_i < \varepsilon$, dato che, per la continuità della f sugli intervalli chiusi R_i, i numeri L_i e l_i sono, rispettivamente, il massimo e il minimo valore della f sui singoli sottointervalli. È dunque:

$$S(\delta,f) - s(\delta,f) = \sum_{i=1}^{n} (L_i - l_i)m(R_i) < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{n} m(R_i) = \varepsilon. \blacksquare$$

OSSERVAZIONE. Più avanti (§ 5, Teor. 24) daremo una generalizzazione di questo Teorema; per ora ci limitiamo a segnalare che

TEOREMA 4'. *Sia data una funzione f: $R(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ limitata. Se f è continua, tranne che in un numero finito di punti, allora è integrabile su R.* $\blacksquare$

ESEMPI. 1) Siano: $R = [a, b]$ $(\subset \mathbb{R})$, $c \in\ ]a, b[$ e f: $R \to \mathbb{R}$ la funzione (a scala) che vale costantemente α su $[a, c[$ e costantemente β su $[c, b]$ e sia, per esempio $\alpha < \beta$. Per il Teorema precedente, la f è integrabile. Sia $\delta = \{R_i$: $i = 1, 2, \ldots, n\}$ una decomposizione di R; possiamo sempre supporre che c sia uno dei punti della decomposizione; sia dunque $c = x_j$. Si ha: $l_i = \alpha$ per $i \le j$ e $l_i = \beta$ per $i > j$, $L_i = \alpha$ per $i < j$ e $L_i = \beta$ per $i \ge j$, da cui:

$$s(\delta,f) = \alpha(c - a) + \beta(b - c); \quad S(\delta,f) = \alpha[(c - a) - m(R_j)] + \beta[(b - c) + m(R_j)].$$

Quindi, dato che $m(R_j)$ può essere reso arbitrariamente piccolo, si ottiene

$$\int_R f\, dm = \alpha(c - a) + \beta(b - c).$$

Lo stesso procedimento si può applicare alle funzioni costanti a tratti con un numero finito di valori assunti.

2) Siano: $R = [a, b]$ $(\subset \mathbb{R})$, $c \in\ ]a, b[$ e f: $R \to \mathbb{R}$ la funzione che vale α in c mentre assume il valore β in tutti gli altri punti di R; sia per esempio $\alpha < \beta$. Per il Teorema precedente, la f è integrabile. Sia $\delta = \{R_i$: $i = 1, 2, \ldots, n\}$ una decomposizione di R; possiamo sempre supporre che c sia uno dei punti della decomposizione; sia dunque $c = x_j$. Si ha subito $L_i = \beta$ per ogni i, da cui $S(\delta,f) = \beta(b - a)$. Si vede poi che è: $l_i = \alpha$ per $i = j - 1$ e $i = j$, $l_i = \beta$ per tutti gli altri valori di i; si ottiene: $s(\delta,f) = \alpha(m(R_{j-1}) + m(R_j)) + \beta[(b - a) - m(R_{j-1}) - m(R_j)]$. Si conclude che è $\int_R f\, dm = \beta(b - a)$. Lo stesso procedimento si può applicare alle funzioni costanti su R, tranne che in un numero finito di punti.

OSSERVAZIONE. *(Il significato geometrico dell'integrale)* - Sia f: $I = [a,b]$ $(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa e integrabile (per esempio continua). Resta individuato il *trapezoide* $T := \{(x,y)$: $a \le x \le b,\ \ 0 \le y \le f(x)\}$. Come possiamo definire l'area di T? Un'idea è quella di approssimare T mediante figure più semplici date dall'unione di uno o più rettangoli (*plurirettangoli*) di cui sappiamo calcolare l'area per via elementare. Poiché le somme inferiori e le somme superiori esprimono l'area di plurirettangoli rispettivamente inscritti e circoscritti a T, è naturale assumere l'integrale della f come *misura* di T.

Se f: R $(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ è una funzione non negativa e integrabile, l'integrale si assume come misura del solido $T = \{(x,y,z)$: $(x,y) \in R,\ \ 0 \le z \le f(x,y)\}$.

Più avanti (§ 5) definiremo le misure di una classe più generale di figure piane o solide.

TEOREMA 5. *Se* f: $R = [a, b]$ $(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *è monotona, allora è integrabile su R.*

DIM. Supponiamo la f non - decrescente. Dunque da $x < y$ segue $f(x) \leq f(y)$. Qualunque sia la decomposizione δ di R, si ha per ogni i: $l_i = f(x_{i-1})$ e $L_i = f(x_i)$. Fissato un $\varepsilon > 0$, sia δ una decomposizione di R in intervalli di ampiezza minore di $\dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Si ha:

$$S(\delta,f) - s(\delta,f) = \sum_{i=1}^{n}(L_i - l_i)m(R_i) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}[f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(b) - f(x_{n-1})] = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}[f(b) - f(a)] = \varepsilon. \blacksquare$$

N.B. Per $n > 1$, quest'ultimo Teorema perde significato.

TEOREMA 6. 1) (*Linearità) - Se* f, g: $R(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *sono integrabili su R, allora, quali che siano* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, *la funzione* $\alpha f + \beta g$ *è integrabile su R e si ha:*

$$\int_R(\alpha f + \beta g)dm = \alpha\int_R f\, dm + \beta \int_R g\, dm.$$

2) (*Monotonia*) - *Se* f, g: $R(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *sono integrabili su R e se è* $f(x) \leq g(x)$ *per ogni* $x \in R$, *allora si ha*

$$\int_R f\, dm \leq \int_R g\, dm.$$

In particolare, se f è integrabile su R e se è $f(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in R$, *si ha* $\int_R f\, dm \geq 0$.

3) (*Integrabilità della restrizione*) - *Se* f: $R(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *è integrabile su R e se R' è un sottorettangolo di R, allora f è integrabile anche su R'* (ossia: *è integrabile su R' la restrizione della f*).

4) (*Additività rispetto al dominio*) - *Sia* f: $R(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$; *se è* $R = R' \cup R''$, *con* $\text{int}\, R' \cap \text{int}\, R'' = \varnothing$, *allora, la f è integrabile su R se e solo se le restrizioni della f a R' e R'' sono integrabili, e si ha:*

$$\int_R f\, dm = \int_{R'} f\, dm + \int_{R''} f\, dm.$$

5) (*Integrabilità del valore assoluto*) - *Se* f: $R(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *è integrabile su R, allora è integrabile su R anche la funzione* $|f|$ *e si ha:*

$$\left|\int_R f\, dm\right| \leq \int_R |f|\, dm.$$

6) *Se* f, g: $I(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *sono integrabili, sono tali anche le funzioni* $f \vee g$ e $f \wedge g$.

DIM. 1) Siano f e g due funzioni integrabili su un rettangolo R. Fissato un $\varepsilon > 0$, esistono due decomposizioni δ' e δ'' di R tali che, $S(\delta',f) - s(\delta',f) < \varepsilon/2$ e $S(\delta'',g) - s(\delta'',g) < \varepsilon/2$.

Sussistono analoghe disuguaglianze anche per ogni decomposizione δ più fine di δ' e δ''. Per una tale δ, è dunque:

$$S(\delta,f) + S(\delta,g) - (s(\delta,f) + s(\delta,g)) < \varepsilon.$$

Essendo

$$s(\delta,f) + s(\delta,g) \leq s(\delta,f + g) \leq S(\delta,f + g) \leq S(\delta,f) + S(\delta,g),$$

si ottiene che è anche $S(\delta,f + g) - s(\delta,f + g) < \varepsilon$; dunque anche la funzione $f + g$ è integrabile su R e si ha:

$$s(\delta,f) + s(\delta,g) \leq \int_R (f + g)dm \leq S(\delta,f) + S(\delta,g).$$

Dall'unicità dell'elemento separatore di una coppia di classi contigue, si ottiene in fine

$$\int_R (f + g)dm = \int_R f\,dm + \int_R g\,dm.$$

È ora facile provare che se f è integrabile su R e α è un numero reale positivo, allora è integrabile anche αf e si ha $\int_R (\alpha f)\,dm = \alpha\int_R f\,dm$. In fine, si prova ancora che, se f è integrabile su R, è tale anche l'opposta $-f$ e si ha $\int_R (-f)\,dm = -\int_R f\,dm$. La tesi segue ora facilmente.

2) Caso $n = 2$. Data una decomposizione $\delta = \{R_{ij}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, p\}$ di R, per ogni i e j sia $l_{ij}(f) := \inf f(R_{ij})$ e $l_{ij}(g) := \inf g(R_{ij})$. Dall'ipotesi si ottiene $l_{ij}(f) \leq l_{ij}(g)$ per ogni $i \leq n$ e $j \leq p$. Si ha dunque

$$s(\delta,f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} l_{ij}(f)\,m(R_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} l_{ij}(g)\,m(R_{ij}) = s(\delta,g),$$

da cui $\sup \{s(\delta,f)\} \leq \sup \{s(\delta,g)\}$ che è la tesi. Per $n = 1$ o $n = 3$, non c'è che da adattare la simbologia.

3) Per $n = 1$. Sia f integrabile su R. Fissato un $\varepsilon > 0$, esiste, per il Lemma 3, una decomposizione δ di R tale che $S(\delta,f) - s(\delta,f) < \varepsilon$. Se R' è un sottointervallo di R, è possibile costruire una decomposizione $\delta^* = \{R_i\}$ di R più fine di δ in modo che R' sia la riunione di un certo numero degli R_i. Essendo $S(\delta^*,f) - s(\delta^*,f) < \varepsilon$, è anche $S'(\delta',f) - s'(\delta',f) < \varepsilon$, dove si sono indicate con $S'(\delta',f)$ e $s'(\delta',f)$ la somma superiore e quella inferiore della restrizione della f a R' relative alla decomposizione δ' indotta da δ^* su R'.

4) Per la (3), basta provare il "*se*". Siano f' e f'' le restrizioni della f a R' e, rispettivamente, a R''. Dato un $\varepsilon > 0$, siano δ' una decomposizione di R' e δ'' una di R'' tali che $S(\delta',f') - s(\delta',f') < \varepsilon/2$, $S(\delta'',f'') - s(\delta'',f'') < \varepsilon/2$. La riunione di δ' e δ'' fornisce una decomposizione δ di R per cui risulta $S(\delta,f) - s(\delta,f) < \varepsilon$. Si ha, inoltre, $\sup s(\delta',f') + \sup s(\delta'',f'') = \sup s(\delta,f)$ che è l'ultima parte della tesi.

5) Proviamola per $n = 1$. Fissato un $\varepsilon > 0$, esiste una decomposizione $\delta = \{R_i\}$ di R per cui è $S(\delta,f) - s(\delta,f) < \varepsilon$. Per ogni i, siano $l_i' := \inf |f|(R_i)$ e $L'_i := \sup |f|(R_i)|$ Si costata facilmente che è $L'_i - l'_i \leq L_i - l_i$, da cui $S(\delta,|f|) - s(\delta,|f|) < \varepsilon$. Si ha così l'integrabilità di $|f|$. Essendo poi $f \leq |f|$ e $-f \leq |f|$, l'ultima parte della tesi segue direttamente dalla (2).

6) Basta ricordare che si ha:

$$f \vee g = \frac{1}{2}[f + g + |f - g|] \quad \text{e} \quad f \wedge g = \frac{1}{2}[f + g - |f - g|]. \blacksquare$$

N.B. Non sussistono le implicazioni opposte della (2) e della (5).

ESEMPI. 3) Siano f, g: $R = [0, 2]$ ($\subset \mathbb{R}$) $\to \mathbb{R}$ le due funzioni così definite:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{per } 1 < x \leq 2 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{per } 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Si ha $\int_R f\, dm = 2 > 0$, pur non essendo la f sempre positiva e $\int_R f\, dm = 2 > 1 = \int_R g\, dm$, pur non avendosi $f(x) \geq g(x)$ per ogni x di R.

4) Siano f, g: $R = [a, b]$ ($\subset \mathbb{R}$) $\to \mathbb{R}$ due funzioni che assumono su R lo stesso valore, tranne che in un insieme finito di punti. Allora se la f è integrabile su R è tale anche la g e si ha $\int_R f\, dm = \int_R g\, dm$. In effetti, la funzione $h = f - g$ assume su R sempre il valore 0, tranne che in un numero finito di punti; essa è dunque integrabile e si ha $\int_R h\, dm = 0$ (cfr. Teor. 4' e il successivo Esempio 2). Essendo $g = f - h$ si ha la tesi in virtù della Proposizione 6.1.

5) Sia f: $R = [0,1]$ ($\subset \mathbb{R}$) $\to \mathbb{R}$ la funzione che vale 1 nei punti razionali e vale -1 in quelli irrazionali. Procedendo come nel caso della funzione di Dirichlet (cfr. Es. 1 del §1), si vede che la funzione data *non è* integrabile su R. Per contro, la funzione $|f|$ assume costantemente il valore 1; essa è perciò integrabile e il valore dell'integrale è, come si è visto, uguale a 1.

TEOREMA 7. 1) (*Integrabilità del prodotto*) ¤ *Se* f, g: $I(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *sono integrabili su* I, *allora è integrabile su* I *anche la funzione prodotto* fg.

2) (*Integrabilità del quoziente*) - *Se* f, g: $I(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *sono integrabili su* I *e se* $1/g$ *è ivi limitata, allora è integrabile su* I *anche la funzione quoziente* f/g.

DIM. Ci limiteremo a provare la (1) e con $n = 1$.

Cominciamo col provare che, se f: $I(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è integrabile su I, è tale anche la funzione f^2. Avendosi $f^2 = |f|^2$, è lecito supporre che sia $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$. Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Data una decomposizione $\delta = \{I_k\}$ di I, poniamo $l_k := \inf f(I_k)$, $L_k := \sup f(I_k)$, e $L := \sup f(I)$. Si constata facilmente che è $l_k^2 = \inf f^2(I_k)$ e $L_k^2 = \sup f^2(I_k)$. Si ottiene:

$$S(\delta, f^2) - s(\delta, f^2) = \sum_{k=1}^{n} (L_k^2 - l_k^2) m(I_k) = \sum_{k=1}^{n} (L_k - l_k)(L_k + l_k) m(I_k) \leq$$

$$\leq 2L \sum_{k=1}^{n} (L_k - l_k) m(I_k) = 2L\, (S(\delta, f) - s(\delta, f)).$$

Affinché sia $S(\delta, f^2) - s(\delta, f^2) < \varepsilon$, è sufficiente che sia $S(\delta, f) - s(\delta, f) < \frac{\varepsilon}{2L}$.

Siano ora f, g: $I(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili. Per constatare che è tale anche la funzione prodotto, basta osservare che si ha

$$fg = \frac{1}{2}[(f + g)^2 - (f - g)^2]$$

e applicare il risultato precedente, unitamente a quelli delle Proposizioni 6.1 e 6.5. $\blacksquare$

TEOREMA 8. (*Della media*) - *Sia* $f\colon (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *integrabile su* R *e si ponga* $l := \inf f(R)$ *e* $L := \sup f(R)$. *Allora esiste* $k \in \mathbb{R}$, *con* $l \le k \le L$ *tale che:*

$$(*) \qquad \int_R f\,dm = k\,m(R).$$

Se la f *è continua, esiste* $\underline{x}^0 \in R$ *tale che:*

$$(**) \qquad \int_R f\,dm = f(\underline{x}^0)\,m(R).$$

DIM. La più semplice decomposizione di R è data da R stesso. È dunque:

$$l\,m(R) \le \int_R f\,dm \le L\,m(R).$$

Per ottenere la (*) si pone

$$k = \frac{\int_R f\,dm}{m(R)}.$$

Se la f è continua, esiste, per i Teoremi di Weierstrass e di connessione, almeno un punto $\underline{x}^0 \in R$ tale che $f(\underline{x}^0) = k$, da cui si ottiene subito la validità della (**). ▮

DEFINIZIONE. Sia $f\colon (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ integrabile su R; si chiama *valor medio* o *media integrale* di f su R il numero reale

$$k = \frac{\int_R f\,dm}{m(R)}.$$

ESEMPIO. 6) Sia f la funzione dell'Esempio 3. Il suo valor medio è 1, che però *non è* uno dei valori assunti dalla funzione. (La funzione non è continua su R.).

§ 3. LA FUNZIONE INTEGRALE E IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

In questo paragrafo ci occuperemo soltanto di funzioni di una variabile.

DEFINIZIONE. (Integrale *orientato*) - Sia data una funzione $f\colon I\ (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ integrabile su I (e quindi su ogni suo sottointervallo). Quali che siano i punti $a, b \in I$, si pone:

$$\int_a^b f(x)dx := \begin{cases} \int_{[a,b]} f\,dm, & \text{se è } a < b \\ 0, & \text{se è } a = b \\ -\int_{[b,a]} f\,dm, & \text{se è } a > b \end{cases}.$$

Il numero $\int_a^b f(x)dx$ si legge "integrale da a a b della f".

Con tale convenzione, si ottiene il seguente risultato che generalizza la Proposizione 6.4 sull'additività dell'integrale rispetto al dominio.

TEOREMA 9. *(di Chasles) - Sia* $f\colon I\ (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *integrabile. Quali che siano i punti* $a, b, c \in I$ *si ha:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

DIM. Se è $a < c < b$, basta applicare la Proposizione 6.4. Se è $b < a < c$, si ha:

$$\int_b^c f(x)dx = \int_b^a f(x)dx + \int_a^c f(x)dx,$$

da cui

$$-\int_b^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Gli altri quattro casi si provano in modo perfettamente analogo. ∎

DEFINIZIONE. Sia data una funzione $f\colon I = [a,b]\ (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ integrabile su I e si fissi un punto $x_0 \in I$. La f è integrabile su ogni sottointervallo di I; dunque, per ogni $x \in I$, esiste, per la precedente definizione, l'integrale da x_0 a x della f. Resta così definita la funzione di I in $\mathbb{R}$

$$F_{x_0}(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

che prende il nome di *funzione integrale* (o *integral funzione*) della f con *punto iniziale* x_0.

Naturalmente, sostituendo il punto iniziale x_0 con un altro punto x_1, si ottiene una nuova funzione integrale.

LEMMA 10. *Se* $f\colon I = [a, b]\ (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *è integrabile, allora due sue funzioni integrali differiscono per una costante additiva.*

DIM. Fissati due punti x_0 e $x_1 \in I$, si ha:

$$F_{x_1}(x) = \int_{x_1}^{x} f(t)dt = \int_{x_1}^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x} f(t)dt = F_{x_0}(x) + k,$$

con $k := \int_{x_1}^{x_0} f(t)dt \in \mathbb{R}$. ∎

TEOREMA 11. *Se* $f\colon I = [a, b]\ (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *è integrabile, allora, qualunque sia il punto* $x_0 \in I$, *la funzione integrale* $F_{x_0}(x)$ *è continua su I.*

DIM. La f è, per ipotesi, limitata; sia $M := \sup\ \{|f(x)|\colon x \in I\}$. Fissato un $x \in I$, si ha

$$|F_{x_0}(x + h) - F_{x_0}(x)| = \left| \int_{x_0}^{x+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x+h} f(t)dt + \int_{x}^{x_0} f(t)dt \right| =$$

$$= \left| \int_x^{x+h} f(t)dt \right| \le \left| \int_x^{x+h} |f(t)|dt \right| \le \left| \int_x^{x+h} M\, dt \right| = M\,|h|,$$

che tende a 0 a tendere di h a 0. ▮

N.B. La funzione integrale è continua anche se la funzione integranda non lo è.

ESEMPIO. 1) Sia f: $I = [0, 2]$ $(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la funzione che vale 1 su [0,1[e vale 2 su [1,2]; si assuma poi $x_0 = 0$. Si ha $F_0(x) = x$ su [0,1[e $F_0(x) = 1 + 2(x - 1)$ su [1,2]. Si vede subito che la F_0 è continua, pur non essendolo la f.

TEOREMA 12. *(Teorema fondamentale del Calcolo) - Sia* f: $I = [a, b]$ $(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *una funzione continua, allora, qualunque sia il punto* $x_0 \in I$, *la funzione integrale* F_{x_0} *è derivabile e si ha* $F'_{x_0}(x) = f(x)$, *per ogni* $x \in I$.

DIM. Fissiamo un punto x e valutiamo il rapporto incrementale della funzione F_{x_0} relativamente ad esso. Si ha

$$\frac{F_{x_0}(x+h) - F_{x_0}(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{x_0}^{x+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\left[\int_{x_0}^{x+h} f(t)dt + \int_{x}^{x_0} f(t)dt\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi)$$

per un opportuno ξ compreso tra x e $x + h$. Nell'ultimo passaggio, si è ovviamente sfruttato il Teorema della media per funzioni continue. Siccome la f è continua, $f(\xi)$ tende a $f(x)$ al tendere di h a 0. ▮

Possiamo finalmente stabilire un risultato che ci permetterà di calcolare l'integrale di una vasta classe di funzioni, riconducendolo al problema della ricerca di una primitiva o, equivalentemente, al calcolo dell'integrale indefinito.

TEOREMA 13. *(Formula di Torricelli - Barrow) - Sia* f: $I = [a, b]$ $(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e sia G una sua primitiva. Allora si ha*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

DIM. Sia G una primitiva di f e fissiamo un punto $x_0 \in I$. Siccome, per il Teorema precedente, anche la funzione integrale F_{x_0} è una primitiva di f, si ha $G(x) = F_{x_0}(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$. Si ottiene:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx = \int_{x_0}^b f(x)dx - \int_{x_0}^a f(x)dx =$$

$$= F_{x_0}(b) - F_{x_0}(a) = G(b) - c - G(a) + c = G(b) - G(a). \; ▮$$

DEFINIZIONE. L'espressione $G(b) - G(a)$ si scrive spesso nella forma $[G(x)]_a^b$ che si legge "*G(x) incrementata fra a e b*".

ESEMPIO. 2) Si ha $\int_0^\pi (3\sin x + 2x^3)dx = [-3\cos x + \frac{1}{2}x^4]_0^\pi = 3 + \frac{1}{2}\pi^4 + 3 - 0 = 6 + \frac{1}{2}\pi^4$.

TEOREMA 14. *(Metodo di integrazione per parti) - Siano f,g*: $I = [a, b]$ $(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *due funzioni continue e siano F e G due primitive di f e, rispettivamente, di g. Allora si ha*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = [F(x)\,G(x)]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

DIM. Basta integrare da a a b i due membri dell'uguaglianza

$$F(x)\,g(x) = \frac{d}{dx}[F(x)\,G(x)] - f(x)\,G(x). \blacksquare$$

ESEMPIO. 3) Si ha $\int_0^\pi (x\sin x)dx = [-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi + 0 = \pi$.

TEOREMA 15. *(Metodo di integrazione per sostituzione) - Siano date le funzioni f*: $I = [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua e* φ: J $(\subset \mathbb{R}) \to I$ *di classe* C^1 *sull'intervallo J, e i punti* $\alpha, \beta \in J$, *con* $\varphi(\alpha) = a$ *e* $\varphi(\beta) = b$. *Si ha:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

DIM. Dalle ipotesi fatte su f e φ, si ha intanto che entrambi gli integrali hanno senso. Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora $F(\varphi(t))$ è una primitiva di $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Si ha dunque:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \blacksquare$$

Notiamo esplicitamente che non si richiede che la φ sia biiettiva tra J ed I.

ESEMPI. 4) Si voglia calcolare $\int_{-1}^2 x\sqrt[3]{x^2 - 1}dx$. Posto $x^2 - 1 = t$, essendo $t(-1) = 0$ e $t(2) = 3$, si ha:

$$\int_{-1}^2 x\sqrt[3]{x^2 - 1}dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt[3]{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{t^4}\right]_0^3 = \frac{9}{8}\sqrt[3]{3}.$$

5) Si voglia calcolare $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$. Posto $x = \sin t$, essendo $-1 = \sin\frac{-\pi}{2}$ e $1 = \sin\frac{\pi}{2}$, si ha:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi!2} \cos^2 t\,dt = \left[\frac{t + \sin t\,\cos\,t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

6) Si voglia calcolare l'area della regione piana T compresa fra le curve di equazione $y = x^2$ e $y = x^3$, con $0 \le x \le 2$. Siccome si ha $x^3 \le x^2$ se è $0 \le x \le 1$ e $x^3 \ge x^2$ se è $1 \le x \le 2$, bisogna spezzare il problema in due parti, lavorando prima in [0,1] e poi in [1,2]. Si ha:

$$m(T) = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx + \int_1^2 (x^3 - x^2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{3}{2}.$$

§ 4. FORMULE DI RIDUZIONE SU RETTANGOLI PER INTEGRALI DOPPI E TRIPLI

I seguenti risultati, dei quali tralasciamo le dimostrazioni, sono importanti per il calcolo degli integrali di funzioni di più variabili. L'idea è quella di ricondurre il calcolo di un integrale multiplo a quello di più integrali semplici, ossia di funzioni di un'unica variabile.

$\boxed{n = 2}$ **TEOREMA 16** *(di Fubini) - Sia* f: $R = [a, b] \times [c, d]$ $(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$. *Se* f *è integrabile su* R *ed è tale che, per ogni* $\overline{x} \in [a, b]$, *la funzione* $f(\overline{x}, y)$ *è integrabile su* $[c, d]$, *allora la funzione* $g(x) = \int_c^d f(x,y)dy : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è integrabile su* $[a, b]$ *e si ha*

$$\int_a^b g(x)dx = \iint_R f(x,y)dxdy,$$

cioè

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx. \blacksquare$$

Un analogo teorema si ottiene scambiando i ruoli delle variabili x e y.

ESEMPI. 1) Si vuole calcolare

$$\iint_R \sin(x + y)dxdy, \qquad \text{con } R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2].$$

Si ha $\displaystyle\iint_R \sin(x + y)dxdy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2} \sin(x + y)dy\right)dx = \int_0^{\pi/2} [- \cos(x + \pi/2) + \cos(x + 0)]dx =$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x)dx = \Big[- \cos x + \sin x\Big]_0^{\pi/2} = 2.$$

2) Si vuole calcolare $\displaystyle\iint_R e^{y/x} x^{-3}dxdy$, con $R = [1,2] \times [0, 1]$.

Si ha $\displaystyle\iint_R e^{y/x} x^{-3}dxdy = \int_1^2\left(\int_0^1 e^{y/x} \frac{1}{x^3} dy\right)dx = \int_1^2 dx \left[e^{y/x} \frac{1}{x^2}\right]_{y=0}^{y=1} =$

$$= \int_1^2 \left[e^{1/x} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right]dx = \left[-e^{1/x} + \frac{1}{x}\right]_1^2 = - e^{1/2} + \frac{1}{2} + e - 1 = e - \sqrt{e} - \frac{1}{2}.$$

3) Si vuole calcolare $\displaystyle\int_R f\, dm = \iint_R \frac{x^2}{x^2 + y^2} dxdy$, con $R = [1,2] \times [0, 2]$.

Si ha
$$\int_R f\, dm = \int_1^2\left(\int_0^2 \frac{x^2dy}{x^2 + y^2}\right)dx .$$

Calcoliamo, intanto, $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{x^2 + y^2} dy$. Effettuando la sostituzione $y = tx$, si ottiene:

$$\int_0^2 \frac{x^2}{x^2 + y^2} dy = \int_0^2 \frac{dy}{1 + (y/x)^2} = \int_0^{2/x} \frac{x}{1 + t^2} dt = x \left[\text{arctg} \frac{2}{x} - 0\right] = x \,\text{arctg} \frac{2}{x}.$$

È dunque
$$\int_R f\, dm = \int_1^2 x \,\text{arctg} \frac{2}{x} dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{x}\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\cdot\frac{-(2/x^2)}{1+(2/x)^2}\right)dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,2 + \int_1^2 \frac{x^2}{x^2+4}\,dx\,.$$

Essendo
$$\int_1^2 \frac{x^2}{x^2+4}\,dx = \int_1^2 dx - \int_1^2 \frac{4}{x^2+4}dx = 1 - 2\int_1^2 \frac{(1/2)dx}{1+(x/2)^2} =$$
$$= 1 - 2\,\left[\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}\right]_1^2 = 1 - \frac{\pi}{2} + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2},$$

si conclude che è
$$\int_R f\,dm = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,2 + 1 - \frac{\pi}{2} + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} = 1 + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,2.$$

$\boxed{n = 3}$ **TEOREMA 17.** *(Formula di riduzione per corde) - Sia f*: $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] = R\ (\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$. *Se f è integrabile su R e se, per ogni* $(\overline{x},\overline{y}) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = T$, *la funzione* $f(\overline{x},\overline{y}, z)$ *è integrabile su* $[a_3, b_3]$, *allora la funzione* $g(x,y) = \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz$: $T \to \mathbb{R}$ *è integrabile su T e si ha*

$$\iint_T g(x,y)\,dxdy = \iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz,$$

cioè

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_T \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz\right)dxdy. \blacksquare$$

Analoghi teoremi si ottengono scambiando i ruoli delle variabili.

ESEMPIO. 4) Si vuole calcolare

$$\int_R f\,dm = \iiint_R \frac{dxdydz}{\sqrt{1+x+y+z}},\quad \text{con } R = [0,1]\times[0,1]\times[0,1].$$

Posto $T = [0, 1] \times [0, 1]$, si ha $\int_R f\,dm = \iint_T \left(\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1+x+y+z}}\right)dxdy.$

Essendo
$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1+x+y+z}} = 2\int_0^1 \frac{dz}{2\sqrt{1+x+y+z}} =$$
$$= 2\left[\sqrt{1+x+y+z}\right]_{z=0}^{z=1} = 2\left[\sqrt{2+x+y} - \sqrt{1+x+y}\right],$$

si ottiene
$$\int_R f\,dm = 2\iint_T \left[\sqrt{2+x+y} - \sqrt{1+x+y}\right]dxdy =$$
$$= 2\int_0^1\left(\int_0^1 \left[\sqrt{2+x+y} - \sqrt{1+x+y}\right]dx\right)dy = \frac{4}{3}\int_0^1 dy\left[\sqrt{(2+x+y)^3} - \sqrt{(1+x+y)^3}\right]_{x=0}^{x=1} =$$
$$= \frac{4}{3}\int_0^1 dy\left[\sqrt{(3+y)^3} - 2\sqrt{(2+y)^3} + \sqrt{(1+y)^3}\right] =$$
$$= \frac{8}{15}\left[\sqrt{(3+y)^5} - 2\sqrt{(2+y)^5} + \sqrt{(1+y)^5}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{8}{15}\left[2^5 - 3\sqrt{3^5} + 3\sqrt{2^5} - 1\right].$$

$\boxed{n = 3}$ **TEOREMA 18.** *(Formula di riduzione per sezioni) - Sia* f: $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] = R\ (\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$. *Se* f *è integrabile su* R *e se, per ogni* $\overline{z} \in [a_3, b_3]$, *la funzione* $f(x,y,\overline{z})$ *è integrabile su* $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = T$, *allora la funzione* $h : [a_3, b_3] \to \mathbb{R}$ *definita da* $h(z)= \iint_T f(x,y,z)\, dxdy$ *è integrabile su* $[a_3, b_3]$ *e si ha*

$$\int_{a_3}^{b_3} h(z)dz = \iiint_R f(x,y,z)\, dxdydz,$$

cioè

$$\iiint_R f(x,y,z)\, dxdydz = \int_{a_3}^{b_3} \Big(\iint_T f(x,y,z)\, dxdy\Big)dz\ . \blacksquare$$

Analoghi teoremi si ottengono scambiando i ruoli delle variabili.

ESEMPIO. 5) Si vuole calcolare

$$\int_R f\, dm = \iiint_R x^3(y^2 + z)dxdydz, \qquad \text{con } R = [0,1] \times [0, 2] \times [0, 3].$$

Posto $T = [0, 1] \times [0, 2]$, si ha

$$\int_R f\, dm = \int_0^3 dz \iint_T x^3(y^2 + z)dxdy = \int_0^3 dz \int_0^2 dy \int_0^1 x^3(y^2 + z)dx = \int_0^3 dz \int_0^2 dy \Big[\frac{x^4}{4}(y^2 + z)\Big]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^3 dz \int_0^2 (y^2 + z)dy = \frac{1}{4}\int_0^3 dz \Big[\frac{y^3}{3} + yz\Big]_{y=0}^{y=2} = \frac{1}{4}\int_0^3 \Big[\frac{8}{3} + 2z\Big]dz = \frac{1}{4}\Big[\frac{8}{3}z + z^2\Big]_0^3 = \frac{17}{4}.$$

È immediato constatare che

TEOREMA 19. *Se la funzione* f: $R \to \mathbb{R}$ *è continua in* R, *con* R *rettangolo di* $\mathbb{R}^2$ [di $\mathbb{R}^3$] *allora* f *soddisfa alle ipotesi del Teorema* 16 [*dei Teoremi* 17 *e* 18]. $\blacksquare$

§ 5. INTEGRALI SU INSIEMI LIMITATI LA MISURA DI PEANO - JORDAN

Ricordiamo che un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ è detto *limitato* se esiste una sfera S ($\subset \mathbb{R}^n$) che lo contiene. Si vede subito che E è limitato se e solo se è contenuto in un rettangolo R di $\mathbb{R}^n$.

DEFINIZIONE. Sia f: $E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ una funzione *limitata* e definita su un sottoinsieme *limitato* E di $\mathbb{R}^n$. Si dice che f è integrabile su E se, dato un rettangolo R contenente E, è integrabile su R la funzione

$$\overline{f}(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}), & \text{se } \underline{x} \in E \\ 0, & \text{se } \underline{x} \notin E \end{cases}$$

e si pone

$$\int_E f\, dm = \int_R \overline{f}\, dm.$$

PROBLEMA. In generale, la funzione $\bar{f}$ non è continua su R; bisogna quindi trovare delle condizioni più generali della continuità che assicurino l'integrabilità di $\bar{f}$ in R e quindi di f su E.

Sappiamo che, per $n = 1$, se una funzione f definita e limitata su un intervallo I è continua, tranne che in un numero finito di punti di I, allora essa è integrabile su I. Vogliamo generalizzare questo risultato.

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme *limitato* E di $\mathbb{R}^n$ è detto *misurabile (secondo Peano - Jordan)* se la funzione $f(x) = 1$ è integrabile su E e si pone

$$m(E) = \int_E 1 dm = \int_R \chi_E \, dm,$$

essendo la funzione $\chi_E : R \to \mathbb{R}$ definita da: $\chi_E(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \underline{x} \in E \\ 0, & \text{se } \underline{x} \notin E. \end{cases}$

Si vede facilmente che le due precedenti definizioni non dipendono dal particolare rettangolo considerato.

Se è $n = 1, 2, 3$, il numero reale $m(E)$ prende rispettivamente il nome di *lunghezza*, *area* e *volume* di E.

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme T di $\mathbb{R}^n$ è detto un *plurirettangolo* se è un rettangolo o la riunione di un numero finito di rettangoli privi a 2 a 2 di punti interni in comune.

È importante osservare che se E è un rettangolo o un plurirettangolo di $\mathbb{R}^n$, il numero $m(E)$ sopra definito coincide con l'usuale misura elementare.

Sussiste il seguente risultato di cui tralasciamo la dimostrazione

TEOREMA 20. *Un sottoinsieme limitato E di $\mathbb{R}^n$ è misurabile se e solo se lo è la sua frontiera $\mathcal{F}E$ ed è $m(\mathcal{F}E) = 0$.* ∎

OSSERVAZIONE. Non tutti i sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}^n$ sono misurabili. Sia, per esempio, $E = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ($\subset \mathbb{R}$). Si ha $\mathcal{F}E = [0, 1]$ che non è un insieme di misura nulla. Si badi che lo stesso insieme E, pensato come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, è misurabile ed ha misura nulla.

DEFINIZIONE. Se per un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ è $m(E) = 0$, esso è detto *trascurabile.*

Ci sarà utile il seguente

TEOREMA 21. *Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ è trascurabile se e solo se*

(*) *per ogni* $\varepsilon > 0$, *esiste un plurirettangolo T contenente E con* $m(T) < \varepsilon$.

DIM.- Per $n = 2$. Supponiamo E trascurabile e sia R un rettangolo che lo contiene. Per definizione, è dunque $\int_R \chi_E \, dm = 0$. Ciò significa che, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$, esiste una decomposizione $\delta = \{R_{ij}\}$ di R tale che $S(\delta,\chi_E) < \varepsilon$. Ora si ha $S(\delta,\chi_E) = \Sigma m(R_{ij})$, dove la sommatoria è estesa ai rettangoli R_{ij} che hanno intersezione non vuota con E. La riunione di questi rettangoli costituisce un plurirettangolo T contenente E con misura minore di ε.

Supponiamo ora verificata la (*) e diciamo R un rettangolo contenente E; è anzi lecito supporre che i punti di E siano tutti interni ad R. Fissato un $\varepsilon > 0$, esiste un plurirettangolo T

contenente E con misura minore di ε. È lecito supporre $T \subset R$. Esiste una decomposizione $\delta = \{R_{ij}\}$ di R tale che $S(\delta,\chi_T) < \varepsilon$. Essendo, per ogni $\underline{x} \in R$, $\chi_E(\underline{x}) \leq \chi_T(\underline{x})$, per la stessa decomposizione δ si ha anche $S(\delta,\chi_E) < \varepsilon$. Dunque E è trascurabile. ∎

TEOREMA 22. *Sia f una funzione a valori reali e integrabile sull'intervallo* $I \subset \mathbb{R}$ [*sul rettangolo* $R \subset \mathbb{R}^2$], *allora l'insieme (grafico di f)* $G = \{(\underline{x}, f(\underline{x})), \underline{x} \in I$, [risp. $\underline{x} \in R$]$\}$ *è un sottoinsieme trascurabile di* $\mathbb{R}^2$ [*di* $\mathbb{R}^3$]. *Ciò vale quindi, in particolare, per le funzioni continue.*

DIM. Per funzioni di una variabile. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ integrabile su $I = [a,b]$. Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una decomposizione δ generata dai punti $\{x_0, \ldots, x_n\}$ di I tale che $S(\delta,f) - s(\delta,f) < \varepsilon$, ossia

$$S(\delta,f) - s(\delta,f) = \sum_{i=1}^{n} (L_i - l_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Ma il numero $\sum_{i=1}^{n} (L_i - l_i)(x_i - x_{i-1})$ è la misura del plurirettangolo $\bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [l_i, L_i]$ che, per definizione, contiene il grafico G della f. Dunque, per il Teorema precedente, l'insieme G è trascurabile. ∎

TEOREMA 23. *La misura di Peano - Jordan gode delle seguenti proprietà:*
1) *Se A e B sono due insiemi misurabili, sono tali anche gli insiemi* $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$.
2) *Se A è un insieme misurabile, si ha* $m(A) \geq 0$; $\varnothing$ *è misurabile e si ha* $m(\varnothing) = 0$.
3) *Se A e B sono insiemi misurabili, con* $A \cap B = \varnothing$, *si ha* $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.
4) *Se A e B sono due insiemi misurabili, si ha* $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.
5) *Se A e B sono due insiemi misurabili, con* $A \subset B$, *si ha* $m(A) \leq m(B)$. ∎

DIM. 1) Si vede facilmente che si ha

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \wedge \chi_E; \quad \chi_{A \cup B} = \chi_A \vee \chi_E; \quad \chi_{A \setminus B} = (\chi_A - \chi_E) \vee 0.$$

La tesi segue ora dal Teorema 6.

La (2) è immediata. Per la (3) basta osservare che, se è $A \cap B = \varnothing$, si ha $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_E$.

La (4) Segue dall'uguaglianza $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_E - \chi_{A \cap B}$.

Per la (5) basta osservare che da $A \subset B$ segue $\chi_A \leq \chi_E$. ∎

Tornando al problema da cui siamo partiti, cioè quello di dare condizioni generali per l'integrabilità delle funzioni, enunciamo il seguente risultato:

TEOREMA 24. *Se una funzione* f: $R(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *è limitata e se i suoi punti di discontinuità costituiscono un insieme trascurabile, allora f è integrabile su R.* ∎

Ne segue il seguente Teorema molto utile nella pratica

TEOREMA 25. *Se E è un sottoinsieme misurabile di* $\mathbb{R}^n$ *e* f: $E \to \mathbb{R}$ *è una funzione continua e limitata su E, allora f è integrabile su E.*

DIM. Essendo E limitato, esiste un rettangolo R che lo contiene. Siccome E è misurabile, anche l'insieme $\mathcal{F}E$ è misurabile ed ha misura nulla. Ne viene che la funzione $\overline{f}$, essendo discontinua, al più, nei punti di $\mathcal{F}E$, è integrabile su R. Dunque la f è integrabile su E. ∎

§ 6. INTEGRALI SU DOMINI AMMISSIBILI DI $\mathbb{R}^2$

Domini ammissibili di $\mathbb{R}^2$

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^2$ del tipo

$$E = \{(x,y): a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\},$$

con φ e ψ funzioni continue di $I = [a, b]$ in $\mathbb{R}$, è detto *dominio normale rispetto all'asse x.* In modo analogo si dà la nozione di *dominio normale rispetto all'asse y.* Diremo che E è un *dominio normale* per esprimere il fatto che esso è normale rispetto ad almeno uno degli assi.

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^2$ è detto un *dominio ammissibile* se è un dominio normale o se è la riunione di un numero finito di domini normali e privi a 2 a 2 di punti interni in comune.

ESEMPI. 1) L'insieme $E = \{(x,y): x^2 + y^2 \le 1\}$ è un dominio normale rispetto all'asse x; si vede subito che è $I = [-1, 1]$, $\varphi(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ e $\psi(x) = \sqrt{1 - x^2}$. In modo analogo si constata che E è normale anche rispetto all'asse delle y.

2) L'insieme $E = \{(x,y): |x| \le y \le \frac{1}{2}(x^2 + 1),\ |x| \le 1\}$ è un dominio normale rispetto all'asse x; si ha $I = [-1, 1]$, $\varphi(x) = |x|$ e $\psi(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$.

3) L'insieme $E = \{(x,y): |y| \le \frac{1}{2}(x^2 + 1),\ |x| \le \frac{1}{2}(y^2 + 1),\ |x| \le 1,\ |y| \le 1\}$ non è normale rispetto a nessuno degli assi, ma è un dominio ammissibile. Infatti è la riunione di quattro insiemi analoghi a quello dell'Esempio precedente che si ottengono intersecando E con ciascuno dei quattro angoli retti formati dalle bisettrici degli assi.

Sussiste il seguente risultato analogo alla Proposizione 4 del Teorema 6:

LEMMA 26. *Una funzione* $f: E(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ *, con gli* E_i *domini normali e privi a 2 a 2 di punti interni in comune, è integrabile su E se e solo se lo è su ciascuno degli* E_i *e si ha*

$$\int_E f\, dm = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f\, dm. \ ∎$$

Formule di riduzione per gli integrali doppi su domini normali

TEOREMA 27. *Sia* $f: E(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ *una funzione continua sul dominio* $E = \{(x,y): a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ *normale rispetto all'asse x. Allora f è integrabile su E e si ha*

$$\int_E f\, dm = \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\Big)dx.$$

DIM. Siano $c = \min \varphi(I)$ e $d = \max \psi(I)$, con $I = [a,b]$. Risulta $E \subset R = [a,b] \times [c,d]$. La funzione $\overline{f}(x,y): R \to \mathbb{R}$ definita da

$$\overline{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{se } (x,y) \in E \\ 0, & \text{se } (x,y) \notin E \end{cases}$$

è continua su R tranne, eventualmente, nei punti del tipo $(x, \varphi(x))$ e del tipo $(x, \psi(x))$ che costituiscono un insieme trascurabile (Teoremi 22 e 23) ed è quindi integrabile su R (Teorema 24). Si ha:

$$\int_E f\, dm = \int_R \overline{f}\, dm = \int_a^b \left(\int_c^d \overline{f}(x,y)dy\right)dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^{\varphi(x)} \overline{f}(x,y)dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \overline{f}(x,y)dy + \int_{\psi(x)}^{d} \overline{f}(x,y)dy\right)dx = 0 + \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx + 0. \blacksquare$$

Un analogo teorema si ottiene scambiando i ruoli delle variabili x e y.

ESEMPI. 4) Si voglia calcolare $\iint_E (x + 2y)dxdy$, con $E = E_1 \cup E_2$,

essendo $E_1 = \{(x,y): 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x\}$, $E_2 = \{(x,y): 1 \le x \le 2, x \le y \le x^2\}$.

Si ha: $$\iint_E (x + 2y)dxdy = \iint_{E_1} (x + 2y)dxdy + \iint_{E_2} (x + 2y)dxdy =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} (x + 2y)dy\right) dx + \int_1^2 \left(\int_x^{x^2} (x + 2y)dy\right) dx = \int_0^1 dx\, [xy + y^2]_{y=x^2}^{y=x} + \int_1^2 dx\, [xy + y^2]_{y=x}^{y=x^2} =$$

$$= \int_0^1 [2x^2 - x^3 - x^4]dx + \int_1^2 [x^3 + x^4 - 2x^2]dx = \frac{11}{2}.$$

5) Si voglia calcolare $\iint_E xy\, dxdy$, con $E = \{(x,y): x \le y \le 2x, y \le \frac{1}{x}, x \ge 0\}$.

Si constata facilmente che è $E = E_1 \cup E_2$, essendo

$$E_1 = \{(x,y): 0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}, x \le y \le 2x\},\ E_2 = \{(x,y): \frac{\sqrt{2}}{2} \le x \le 1, x \le y \le \frac{1}{x}\}.$$

Si ha: $$\iint_E xy\, dxdy = \iint_{E_1} xy\, dxdy + \iint_{E_2} xy\, dxdy =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\int_x^{2x} xy\, dy\right) dx + \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \left(\int_x^{1/x} xy\, dy\right) dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} dx \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=x}^{y=2x} + \int_{\sqrt{2}/2}^{1} dx \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=x}^{y=1/x} =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\sqrt{2}/2} x^3 dx + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \left[\frac{1}{x} - x^3\right]dx = \frac{1}{4}\log 2.$$

Cambiamento di variabili per gli integrali doppi

Ricordiamo come stanno le cose nel caso delle funzioni di una variabile (cfr. Teor. 15). Date le funzioni f: $I = [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e φ: $J \to I$ di classe C^1 sull'intervallo J di $\mathbb{R}$, se α, $\beta \in J$, con $\varphi(\alpha) = a$ e $\varphi(\beta) = b$, si ha:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt.$$

Questo risultato non è però direttamente trasportabile al caso delle funzioni di più variabili. Notiamo intanto che il primo integrale può essere scritto nella forma $\int_I f\, dm$, mentre il secondo è un integrale orientato, potendo essere $\alpha < \beta$ o $\alpha > \beta$. Si verifica comunque facilmente che:

TEOREMA 15'. *Date le funzioni* $f\colon I = [a,\ b] \to \mathbb{R}$ *continua e* $\varphi\colon J \to I$, *con* J *intervallo di estremi* α *e* β, *tale che:*

1) φ *sia di classe* C^1 *su* J,

2) φ *sia biiettiva,*

3) *si abbia* $\varphi'(t) \neq 0$, *per ogni* $t \in J$,

allora si ha:

$$\int_I f(x)\, dx = \int_J f(\varphi(t))\, |\varphi'(t)|\, dt. \blacksquare$$

Passando a funzioni di più variabili, bisogna tener conto anche delle difficoltà derivanti dal tipo di insieme in cui sono definite le funzioni coinvolte.

Sussiste il seguente risultato del quale non riportiamo la dimostrazione.

TEOREMA 28. *Siano:* $f(x,y)\colon \overline{A} \to \mathbb{R}$ *continua,* A *aperto e misurabile,* $\Phi\colon \overline{B} \to \overline{A}$, *con* $\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$ B *aperto e misurabile. Se la funzione* Φ *soddisfa alle condizioni:*

1) *è di classe* C^1 *in* $\overline{B}$;

2) *è biiettiva tra* B *ed* A;

3) *si ha* $det(J\Phi)(u,v) \neq 0$, *per ogni* $(u,v)^T \in B$,

allora si ha:

$$\iint_{\overline{A}} f(x,y)\, dxdy = \iint_{\overline{B}} f(x(u,v),y(u,v))\, |det(J\Phi)(u,v)| dudv\ . \blacksquare$$

ESEMPIO. 6) Si vuol calcolare $m(E)$, essendo

$$E = \{(x,y)\colon 1 \le xy \le 2,\ x \le y \le 2x,\ x > 0,\ y > 0\}.$$

Effettuiamo la sostituzione $xy = u$, $\frac{y}{x} = v$. Si pone dunque

$$A = int\, E, \quad \Phi(u,v) = \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)^T, \qquad B = \Phi^{-1}(A), \quad K = \overline{B},$$

si constata che è $\quad K = \Phi^{-1}(E) = [0,1] \times [0,1],\ \ det(J\Phi)(u,v) = \frac{1}{2v} \neq 0$ in A.

Si ottiene $\qquad m(E) = \iint_E 1 dxdy = \iint_K \frac{1}{2v} dudv = \int_1^2 du \int_1^2 \frac{1}{2v} dv = \frac{1}{2}\log 2.$

CASI PARTICOLARI IMPORTANTI

Coordinate polari $\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}}$

Siano: $D =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ e $C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0): x \leq 0\}$. (È dunque $\overline{D} = [0, +\infty[\times [-\pi, \pi]$ e $\overline{C} = \mathbb{R}^2$.) L'applicazione $\Phi: \overline{D} \to \overline{C}$ definita da $\Phi(\rho,\vartheta) = \begin{pmatrix} \rho\cos\vartheta \\ \rho\sin\vartheta \end{pmatrix}$ è continua, biiettiva tra D e C, di classe C^1 e si ha $det(J\Phi)(\rho,\vartheta) = \rho$ ($\neq 0$ nei punti di D).

Sia ora $A \subset C$ un insieme aperto e misurabile e sia $B = \Phi^{-1}(A)$. Si può dimostrare che anche B è aperto e misurabile. Per ogni funzione continua f di $\overline{A}$ in $\mathbb{R}$, possiamo applicare il Teorema precedente e si ha

$$\iint_A f(x,y)\, dxdy = \iint_B f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)\, \rho d\rho d\vartheta.$$

ESEMPIO. 7) Si voglia calcolare $\displaystyle\iint_E x(x^2 + y^2)\, dxdy$,

con $\quad E = \{(x,y): 1 \leq (x^2 + y^2) \leq 4,\ 0 \leq y \leq x;\ x > 0\}$.

Posto $\quad A = int\, E, \quad \Phi(\rho,\vartheta) = \begin{pmatrix} \rho\cos\vartheta \\ \rho\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad B = \Phi^{-1}(A), \quad K = \overline{B},$

si constata che è $\quad K = \Phi^{-1}(E) = \{(\rho,\vartheta): 1 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}\}$.

Si ottiene $\quad \displaystyle\iint_E x(x^2 + y^2)\, dxdy = \iint_K \rho^4\cos\vartheta\, d\rho d\vartheta = \int_1^2 \rho^4 d\rho \int_0^{\pi/4} \cos\vartheta d\vartheta = \frac{31}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Coordinate ellittiche $\boxed{\begin{cases} x = a\rho\cos\vartheta \\ y = b\rho\sin\vartheta \end{cases}}$

Siano ancora: $D =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ e $C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0): x \leq 0\}$. L'applicazione $\Phi: \overline{D} \to \overline{C}$ definita da $\Phi(\rho,\vartheta) = \begin{pmatrix} a\rho\cos\vartheta \\ b\rho\sin\vartheta \end{pmatrix}$ con $a > 0$, $b > 0$, è continua, biiettiva tra D e C, di classe C^1 e si ha $det(J\Phi)(\rho,\vartheta) = ab\rho$ ($\neq 0$ nei punti di D).

Sia ora $A \subset C$ un insieme aperto e misurabile e sia $B = \Phi^{-1}(A)$. Si può dimostrare che anche B è aperto e misurabile. Per ogni funzione continua f di $\overline{A}$ in $\mathbb{R}$, possiamo applicare il Teorema precedente e si ha

$$\iint_A f(x,y)\, dxdy = ab \iint_B f(a\rho\cos\vartheta, b\rho\sin\vartheta)\, \rho d\rho d\vartheta.$$

ESEMPIO. 8) Si voglia calcolare l'area dell'ellisse

$$E = \{(x,y): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}.$$

Posto $\quad A = int\, E \setminus \{(x, 0): x \le 0\}, \quad \Phi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} 2\,\rho\,\cos\vartheta \\ 3\,\rho\,\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad B = \Phi^{-1}(A), \quad K = \overline{B},$

si constata che è: $\quad K = \Phi^{-1}(E) = \{(\rho,\vartheta): 0 \le \rho \le 1, -\pi \le \vartheta \le \pi\}.$

Si ottiene: $$\iint_E 1\, dxdy = 6\iint_K \rho\, d\rho\, d\vartheta = 6\int_0^1 \rho\, d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta = 6\pi.$$

§ 7. INTEGRALI SU DOMINI AMMISSIBILI DI $\mathbb{R}^3$

Domini ammissibili di $\mathbb{R}^3$

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^3$ del tipo

$$E = \{(x,y,z): (x,y) \in J, \Phi(x,y) \le z \le \Psi(x,y)\},$$

con J sottoinsieme *chiuso e misurabile* di $\mathbb{R}^2$, Φ e Ψ funzioni continue di J in $\mathbb{R}$, è detto *dominio normale rispetto al piano xy*. In modo perfettamente analogo si dà la nozione di *dominio normale rispetto al piano xz* e *rispetto al piano yz*. Diremo che E è un *dominio normale* per esprimere il fatto che esso è normale rispetto ad almeno uno dei piani coordinanti.

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^3$ è detto un *dominio ammissibile* se è un dominio normale o se è la riunione di un numero finito di domini normali e privi a 2 a 2 di punti interni in comune.

ESEMPI. 1) L'insieme $E = \{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ è un dominio normale rispetto al piano xy; si vede subito che è

$$J = \{(x,y): x^2 + y^2 \le 1\}\,,\ \Phi(x,y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ e } \Psi(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Si constata poi che E è normale anche rispetto a ciascuno degli altri piani coordinanti.

2) È immediato constatare che l'insieme $E = \{(x,y,z): x^2 + y^2 \le 1, \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2 - x^2 - y^2\}$ ("cono di gelato") è un dominio normale rispetto al piano xy.

3) Un esempio di insieme ammissibile ma non normale si ottiene immediatamente riunendo due insiemi come il precedente: $E = \{(x,y,z): x^2 + y^2 \le 1, \sqrt{x^2 + y^2} \le |z| \le 2 - x^2 - y^2\}$.

Anche in questo caso, sussiste un risultato analogo a quello del Lemma 26.

Formule di riduzione per gli integrali tripli

TEOREMA 29. *(Formula di riduzione per corde) - Sia $f: E(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ una funzione continua su E, con $E = \{(x,y,z): (x,y) \in J, \Phi(x,y) \le z \le \Psi(x,y)\}$ dominio normale rispetto al piano xy. Allora f è integrabile su E e si ha*

$$\int_E f\, dm = \iint_J \left(\int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy. \quad ∎$$

La dimostrazione si ottiene procedendo come nel caso del Teorema 27.
Analoghi teoremi si ottengono scambiando i ruoli delle variabili.

ESEMPI0. 4) Si voglia calcolare *m(E),* con

$$E = \{(x,y,z): x^2 + y^2 \leq 1,\ \ 0 \leq z \leq 2 - x\}.$$

Posto: $J = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $K = \{(\rho,\vartheta): 0 \leq \rho \leq 1, -\pi \leq \vartheta \leq \pi\}$, si ha:

$$\int_E 1\, dm = \iint_J \Big(\int_0^{2 - x} 1 dz\Big) dxdy = \iint_J (2 - x) dxdy = \iint_K (2 - \rho \cos \vartheta)\rho d\rho d\vartheta =$$

$$= \int_0^1 \Big(\int_{-\pi}^{\pi} (2\rho - \rho^2 \cos \vartheta) d\vartheta \Big) d\rho = \int_0^1 d\rho [2\rho\vartheta - \rho^2 \sin \vartheta]_{\vartheta = -\pi}^{\vartheta = \pi} = 4\pi \int_0^1 \rho\, d\rho = 2\pi.$$

TEOREMA 30 *(Formula di riduzione per sezioni) - Sia f*: $E(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ *una funzione continua su E, con E insieme chiuso e misurabile contenuto nel rettangolo* $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ con $a_3 =$ max min max min $\{z: \exists\, (x,y,z) \in E\}$, $b_3 = \max \{z: \exists\, (x,y,z) \in E\}$. *Se, per ogni* $\overline{z} \in [a_3, b_3]$, *la sezione* $S_{\overline{z}} = E \cap \{(x,y,\overline{z})\}$ *è misurabile, allora f è integrabile su E e si ha*

$$\int_E f\, dm = \int_{a_3}^{b_3} \Big(\iint_{S_z} f(x,y,z) dxdy\Big) dz \ ∎$$

ESEMPIO.- 5) (Volume del toro.) È dato il toro $E = \{(x,y,z): \big(R - \sqrt{x^2 + y^2}\big)^2 + z^2 \leq r^2\}$. Si vuol calcolare

$$m(E) = \int_E 1\, dm = 2 \int_0^r \Big(\iint_{S_z} 1 dxdy\Big) dz\ .$$

Essendo $\quad S_z = \{(x,y,z): R - \sqrt{r^2 - z^2} = \varphi(z) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R + \sqrt{r^2 - z^2} = \psi(z)\}$,

si ha $\quad m(E) = \int_E 1 dm = 2 \int_0^r \Big(\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \int_{\varphi(z)}^{\psi(z)} \rho d\rho \Big) dz = 2\pi \int_0^r dz [\rho^2]_{\rho = \varphi(z)}^{\rho = \Psi(z)} =$

$$= 2\pi \int_0^r [(R + \sqrt{r^2 - z^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - z^2})^2] dz = 8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - z^2} dz =$$

$$= 8\pi r R \int_0^r \sqrt{1 - (z/r)^2} dz = 8\pi r^2 R \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt = 8\pi r^2 R \int_0^{\pi/2} \cos^2\alpha d\alpha = 2\pi^2 r^2 R\ .$$

Cambiamento di variabili per gli integrali tripli

TEOREMA 31. *Siano:* $f(x,y,z)$: $\overline{A} \to \mathbb{R}$ *continua, A aperto e misurabile,* Φ: $\overline{B} \to \overline{A}$, *con* $\Phi(u,v,w) = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}$, *B aperto e misurabile. Se la funzione* Φ *soddisfa alle condizioni:*

1) *è di classe* C^1 *in* $\overline{B}$*;*

@ 2) *è biiettiva tra B e A;*

3) *si ha* $det(J\Phi)(u,v,w) \neq 0$, *per ogni* $(u,v,w)^T \in B$,

allora si ha:

$$\iiint\limits_A f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint\limits_B f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\, |det(J\Phi)(u,v,w)| dudvdw\ . \ ∎$$

CASI PARTICOLARI IMPORTANTI

Coordinate sferiche $\boxed{\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}}$

Siano: $D = \{(\rho,\varphi,\vartheta)\colon \rho > 0,\ 0 < \varphi < \pi,\ -\pi < \vartheta < \pi\}$ e $C = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z)\colon x \leq 0\}$. (È dunque $\overline{D} = [0, +\infty[\, \times [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$ e $\overline{C} = \mathbb{R}^3$.) L'applicazione $\Phi\colon\ \overline{D} \to \overline{C}$, definita da

$$\Phi(\rho,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ \rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ \rho \cos\varphi \end{pmatrix}$$

è continua, biiettiva tra D e C, di classe C^1 e si ha $det(J\Phi)(\rho,\varphi,\vartheta) = \rho^2 \sin\varphi$ ($\neq 0$ in D).

Sia ora $A \subset C$ un insieme aperto e misurabile e sia $B = \Phi^{-1}(A)$. Si può dimostrare che anche B è aperto e misurabile. Per ogni funzione continua f di $\overline{A}$ in $\mathbb{R}$, possiamo applicare il Teorema precedente e si ha

$$\iiint\limits_A f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_B f(\rho \sin\varphi \cos\vartheta, \rho \sin\varphi \sin\vartheta, \rho \cos\varphi))\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\vartheta.$$

ESEMPIO. 6) Si voglia calcolare $m(E)$,

con $$E = \{(x,y,z)\colon 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

Posto $$A = int\, E, \quad \Phi(\rho,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ \rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ \rho \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad B = \Phi^{-1}(A), \quad K = \overline{B},$$

si constata che è $K = \Phi^{-1}(E) = \{(\rho,\varphi,\vartheta)\colon 1 \leq \rho \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Si ha:

$$m(E) = \iiint\limits_E 1\, dxdydz = \iiint\limits_K \rho^2 \sin\varphi d\rho d\vartheta d\varphi = \int_1^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin\varphi d\varphi =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi \ = \ \frac{\pi}{6}[2\sqrt{2} - 1].$$

Coordinate ellissoidali $\boxed{\begin{cases} x = a\rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ y = b\rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ z = c\rho \cos\varphi \end{cases}}$

Siano ancora: $D =]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]-\pi, \pi[$ e $C = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z): x \le 0\}$. (È dunque $\overline{D} = [0, +\infty[\times [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$ e $\overline{C} = \mathbb{R}^3$.) L'applicazione Φ: $\overline{D} \to \overline{C}$ definita da

$$\Phi(\rho,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} a\rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ b\rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ c\rho \cos\varphi \end{pmatrix},$$

con $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, è continua, biiettiva tra D e C, di classe C^1 e si ha $det(J\Phi)(\rho,\varphi,\vartheta) = abc\rho^2 \sin\varphi$ ($\neq 0$ nei punti di D).

Sia ora $A \subset C$ un insieme aperto e misurabile e sia $B = \Phi^{-1}(A)$. Si può, al solito, dimostrare che anche B è aperto e misurabile. Per ogni funzione continua f di $\overline{A}$ in $\mathbb{R}$, possiamo applicare il Teorema precedente e si ha

$$\iiint_{\overline{A}} f(x,y,z)dxdydz = abc \iiint_{\overline{B}} f(a\rho \sin\varphi \cos\vartheta, b\rho \sin\varphi \sin\vartheta, c\rho \cos\varphi))\, \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\vartheta.$$

ESEMPIO. 7) (Volume dell'ellissoide.) Si voglia calcolare $m(E)$,

con $$E = \{(x,y,z): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\}.$$

Posto

$$A = int\, E \setminus \{(x,0,z): x \le 0\}, \quad \Phi(\rho,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} a\rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ b\rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ c\rho \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad B = \Phi^{-1}(A), \quad K = \overline{B},$$

si constata che è $K = \Phi^{-1}(E) = \{(\rho,\varphi,\vartheta): \rho \ge 0,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ -\pi \le \vartheta \le \pi\}$.

Si ha: $$m(E) = \iiint_E 1\, dxdydz = \iiint_K abc\rho^2 \sin\varphi d\rho d\vartheta d\varphi = abc \int_0^1 d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} \rho^2 \sin\varphi d\varphi =$$

$$= abc \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = \frac{4}{3}\pi abc.$$

§ 8. CENNO SUGLI INTEGRALI IMPROPRI UNIDIMENSIONALI

PROBLEMA. Come possiamo estendere la nozione di integrale al caso di funzioni illimitate o definite su domini illimitati?

Ci limiteremo al caso delle funzioni di una variabile distinguendo due tipi di situazioni.

DEFINIZIONE. Sia data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, chiuso o no, limitato o no. Si dice che la f è *localmente integrabile* in I se f è integrabile in ogni sottointervallo $[\alpha, \beta]$ di I.

Ovviamente, ogni funzione continua $f\colon I \to \mathbb{R}$ è localmente integrabile su I.

È localmente integrabile anche la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = n(x)$ [= parte intera di x].

Primo tipo

DEFINIZIONE. Sia $f\colon I = [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile. Essendo, in particolare, f integrabile sugli intervalli del tipo $[a,c]$, ha senso ricercare il

$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)dx.$$

Se il limite esiste, esso prende il nome di *integrale improprio* della f su I e si indica con la scrittura $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Se il limite è finito, si dice che l'integrale improprio della f su I è *convergente* e che la f è *integrabile in senso improprio su I*, Il limite l si chiama l'*integrale improprio delle f su I* e lo si indica scrivendo $l = \int_a^{+\infty} f(x)dx$. Se il limite è infinito, si dice che l'integrale improprio della f è *divergente*.

In modo perfettamente analogo si dà la nozione di integrale improprio su intervalli del tipo $]-\infty,a]$.

Sia poi f definita e localmente integrabile su tutto $\mathbb{R}$; fissato $c \in \mathbb{R}$, si definisce

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx. \tag{*}$$

Dalla proprietà di additività dell'integrale si ha subito che, se esiste il valore del secondo membro della (*), esso è indipendente dal punto c.

ESEMPI. 1) Dato un numero $r > 0$, studiamo l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} x^{-r}dx$.

Se è $r \neq 1$, si ha:

$$\int_1^{+\infty} x^{-r}dx = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c x^{-r}dx = \frac{-1}{r-1} \lim_{c \to +\infty} [c^{1-r} - 1] = \begin{cases} \dfrac{1}{r-1} & \text{se è } r > 1 \\ +\infty & \text{se è } r < 1. \end{cases}$$

Per $r = 1$, si ha $\quad \int_1^{+\infty} x^{-1}dx = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c x^{-1}dx = \lim_{c \to +\infty} [\log c - 0] = +\infty.$

Si conclude che l'integrale improprio studiato converge per $r > 1$ e diverge per $r \leq 1$.

2) Dato un numero $r > 0$, studiamo il carattere dell'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log^r x}$.

Se è $r \neq 1$, si ha:

$$\lim_{c\to+\infty}\int_2^c \frac{dx}{x\log^r x} = \lim_{c\to+\infty}\left[\frac{1}{(1-r)\log^{r-1}x}\right]_2^c = \begin{cases} \dfrac{1}{(r-1)\log^{r-1}2} & \text{se è } r > 1 \\ +\infty & \text{se è } r < 1. \end{cases}$$

Per $r = 1$, si ha

$$\lim_{c\to+\infty}\int_2^c \frac{dx}{x\log x} = \lim_{c\to+\infty}[\log\log c - \log\log 2] = +\infty.$$

Si conclude che l'integrale improprio studiato converge per $r > 1$ e diverge per $r \leq 1$.

La situazione è, per molti versi, simile a quella delle serie numeriche. Sussistono, in particolare, i seguenti risultati:

TEOREMA 32. *Sia* f: $I = [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione localmente integrabile. Se è convergente su I l'integrale improprio della funzione* $|f|$, *è tale anche quello della funzione data e si ha*

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)dx\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|dx. \blacksquare$$

TEOREMA 33. *Siano* f,g: $I = [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ *due funzioni localmente integrabili, con* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *per ogni* $x \in I$. *Allora, se è convergente su I l'integrale improprio della g, è tale anche quello della f e si ha*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx. \blacksquare$$

TEOREMA 34. *Sia* f: $I = [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione localmente integrabile e infinitesima per x che tende a* $+\infty$, *con* $f(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in I$. *Allora esiste l'integrale improprio della f su I ed esso è convergente se è* $\operatorname{ord} f > 1 + \varepsilon$ *per un opportuno* $\varepsilon > 0$, *divergente se è* $\operatorname{ord} f \leq 1$. $\blacksquare$

Analoghi risultati si stabiliscono nei casi $I =]-\infty, a]$ o $I = \mathbb{R}$.

ESEMPIO. 3) L'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ è convergente, dato che la funzione integranda è positiva e infinitesima di ordine soprareale, sia per $x \to +\infty$, sia per $x \to -\infty$.

Sia ora data la serie numerica $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e si consideri la funzione f_S: $I = [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f_S(x) = a_{n(x)}, \quad \text{se è } n(x) \leq x < n(x) + 1.$$

Si è gia detto che la funzione $n(x)$ [= parte intera di x] è localmente integrabile.

TEOREMA 35. *Una serie* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge se e solo se converge l'integrale improprio della funzione* f_S. $\blacksquare$

ESEMPIO. 4) La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log^r n}$ converge se e solo se è $r > 1$. Per $x \geq 3$, si ha:

$$0 < g(x) = \frac{1}{x \log^r x} \leq \frac{1}{n(x) \log^r n(x)} = f_S(x) < \frac{1}{(x-1)\log^r(x-1)} = h(x).$$

Gli integrali impropri della g e della h sono convergenti se e solo se è $r > 1$. Dal Teorema 33, si ha poi che vale lo stesso risultato anche per l'integrale improprio della f_S.

Secondo tipo

DEFINIZIONE. Sia f: $I = [a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione illimitata, ma localmente integrabile. Ha senso ricercare il

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx.$$

Se il limite esiste, esso prende il nome di *integrale improprio* della f su I e si indica con la scrittura $\int_a^b f(x)dx$. Se il limite è finito, si dice che l'integrale improprio della f su I è *convergente* e che la f è *integrabile in senso improprio su I*, Il limite l si chiama l'*integrale improprio delle f su I* e lo si indica scrivendo $l = \int_a^b f(x)dx$. Se il limite è infinito, si dice che l'integrale improprio della f è *divergente*.

Un caso particolarmente interessanti è quello in cui si ha $\lim_{c \to b^-} f(x) = \infty$.

In modo perfettamente analogo si dà la nozione di integrale improprio su insiemi del tipo $]a,b]$.

Sia poi f è definita e localmente integrabile su $I =]a,b[$; fissato $c \in]a,b[$, si definisce

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (*)$$

Dalla proprietà di additività dell'integrale si ha subito che, se esiste il valore del secondo membro della (*), esso è indipendente dal punto c.

ESEMPIO. 5) Dato un numero $r > 0$, studiamo il carattere dell'integrale improprio

$$\int_0^1 x^{-r}dx.$$

Se è $r \neq 1$, si ha:

$$\int_0^1 x^{-r}dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 x^{-r}dx = \frac{1}{r-1} \lim_{c \to 0^+} [c^{1-r} - 1] = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{se è } r < 1 \\ +\infty & \text{se è } r > 1 \end{cases}$$

Per $r = 1$, si ha $\int_0^1 x^{-1}dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 x^{-1}dx = \lim_{c \to 0^+} [0 - \log c] = +\infty.$

Si conclude che l'integrale improprio studiato converge per $r < 1$ e diverge per $r \geq 1$.

Analogamente a quanto visto per gli integrali dei primo tipo, si può dimostrare che:

TEOREMA 36. *Sia* f: $I = [a,b[\to \mathbb{R}$ *una funzione localmente integrabile. Se è convergente su* I *l'integrale improprio della funzione* $|f|$, *è tale anche quello della funzione data e si ha*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \blacksquare$$

TEOREMA 37. *Siano* f,g: $I = [a,b[\to \mathbb{R}$ *due funzioni localmente integrabili, con* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *per ogni* $x \in I$. *Allora, se è convergente su* I *l'integrale improprio della* g, *è tale anche quello della* f *e si ha*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \blacksquare$$

TEOREMA 38. *Sia* f: $I = [a,b[\to \mathbb{R}$ *una funzione localmente integrabile, con* $f(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in I$ *e infinita per* x *che tende a* b^-. *Allora esiste l'integrale improprio della* f *su* I *ed esso è convergente se è* $\mathrm{Ord} f < 1 - \varepsilon$ *per un opportuno* $\varepsilon > 0$ *mentre è divergente se è* $\mathrm{Ord} f \geq 1$. $\blacksquare$

Analoghi risultati si stabiliscono nei casi $I =]a, b]$ o $I =]a, b[$.

ESEMPI. 6) L'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

è convergente, dato che la funzione integranda è continua e positiva in $]0,1[$ ed è infinita con Ordine 1/2, sia per x che tende a 0 da destra, sia per x che tende a 1 da sinistra.

7) Studiamo l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin^2\frac{1}{x}\, dx.$

La funzione integranda è illimitata su $I =]0, 1]$ e non è quindi integrabile in senso ordinario. Ora si ha:

$$0 \leq f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin^2\frac{1}{x} \leq g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

L'integrale improprio della g è convergente (Teorema 38); per il Teorema 37 è quindi convergente anche l'integrale di partenza.

8) Sia $E(\subset \mathbb{R}^2) = \{(x,z)\text{: } x \geq 1,\ 0 \leq z \leq 1/x\}$.

Si ha subito $m(E) = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c x^{-1}dx = +\infty.$

Sia ora T il solido che si ottiene ruotando la figura E attorno all'asse delle x. È dunque:

$$T = \{(x,y,z)\text{: } x \geq 1, \sqrt{y^2 + z^2} \leq 1/x\}.$$

Per ogni $x \geq 1$, sia S_x la corrispondente sezione di T. Si ha

$$m(T) = \int_1^{+\infty} m(S_x)dx = \pi \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \pi.$$

§ 9. E S E R C I Z I

1) Si calcolino i seguenti integrali:

$$a) \int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx; \quad b) \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6+4}}; \quad c) \int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}; \quad d) \int_0^1 \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}};$$

$$e) \int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx; \quad f) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}; \quad g) \int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx.$$

[$\Re$. $a)\ \frac{7}{4}$; $b)\ \frac{1}{3}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $c)\ \log\frac{9}{8}$; $d)$ arctg $e - \frac{\pi}{4}$; $e)\ -\log \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$; $f)$ log 2; $g)\ \frac{e^2-1}{4}$]

2) Si calcolino i seguenti integrali doppi:

$\iint_R (x^2+y^2)dxdy,$ con $R = [0,1]^2$. [$\Re$. 2/3]

$\iint_E x^2y\,dxdy,$ con $E = \{(x,y)\colon\ -2 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$. [$\Re$. 64/15]

$\iint_E (1-x-y)dxdy,$ con E = triangolo di vertici (0,0), (1,0), (0,1). [$\Re$. 1/6]

$\iint_E e^{(x^2+y^2)}dxdy,$ con $E = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \leq r^2\}$. [$\Re$. $\pi(e^{r^2}-1)$]

$\iint_E x^2y^2dxdy,$ con $E = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \geq 1,\ \frac{x^2}{4}+y^2 \leq 1\}$. [$\Re$. $7\pi/24$]

$\iint_E (x+2y)dxdy,$ con E = quadrato di vertici (1,0), (2,1), (1,2), (0,1).

[Sostituzione: $x = \frac{u-v}{2}$; $y = \frac{u+n}{2}$, $1 \leq u \leq 3$, $-1 \leq v \leq 1$. $\Re$. = 6]

$\iint_E xydxdy,$ con $E = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}$. [$\Re$. $\frac{5\sqrt{5}-7}{48}$]

$\iint_E \sqrt{x^2+y^2}dxdy,$ con $E = \{(x,y)\colon (x-1)^2+y^2 \leq 1;\ y \geq x\}$.

[Si passi a coordinate polari; si ha $\frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq 2\cos\vartheta$. $\Re$. $\frac{8}{3} \times \frac{8-5\sqrt{2}}{12}$]

3) Si calcolino i seguenti integrali tripli:

$m(E) = \iiint_E 1\,dxdydz$, con $E = \{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rx\}$. [ℜ. $\frac{5}{12}\pi R^3$]

$\iiint_E z\,dxdydz$, con $E = \{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 \le 3a^2,\ x^2 + y^2 \le 2az\}$. [ℜ. $\frac{5}{3}\pi a^4$]

$\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$, con $E = \{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 \le x\}$.

[Si passi a coordinate sferiche. Sia $P \in \mathcal{F}E \setminus O$; il piano per O, P e $K(0,0,1)$ interseca il piano xy lungo una retta r che incontra $\mathcal{F}E$ in un punto H. Si ha $\overline{OH} = \cos\vartheta$, da cui si ottiene $\overline{OP} = \cos\vartheta \sin\varphi$; in conclusione, è $0 \le \varphi \le \pi$; $-\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le \rho \le \cos\vartheta \sin\varphi$. ℜ. $\frac{\pi}{10}$]

4) Dato un sottoinsieme misurabile E di $\mathbb{R}^2$ [di $\mathbb{R}^3$], di densità $\rho(\underline{x})$ si prova che il suo baricentro ha coordinate $x_0 = \dfrac{\int_E x\rho(\underline{x})\,dm}{\int_E \rho(\underline{x})\,dm}$, $y_0 = \dots$, $z_0 = \dots$ I momenti d'inerzia rispetto agli assi sono definiti da: $I_x = \int_E (y^2 + z^2)\rho(\underline{x})\,dm$, $I_y = \dots$, $I_z = \dots$ (in $\mathbb{R}^2$ è $z = 0$).

Determinare baricentro e momento d'inerzia rispetto all'asse z dei seguenti insiemi (di densità unitaria):

$E = \{(x,y,z): x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1 + x^2 + y^2\}$. [ℜ. $x_0 = y_0 = 0$; $z_0 = 7/9$; $M_z = 5\pi/6$]

$E = \{(x,y,z): z \ge 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$. [ℜ. $x_0 = y_0 = 0$; $z_0 = 3/8$; $M_z = 4\pi/15$]

5) Si studino i seguenti integrali impropri

$$a)\ \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx; \qquad b)\ \int_0^{+\infty} e^{-2x}dx; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}dx;$$

$d)$ $m(E)$, con $E = \{(x,y): x^2 < y \le x^2 + e^{-x};\ x \ge 0\}$;

$e)$ $m(E)$, con $E = \{(x,y): 0 \le \frac{x}{1 + x^2} \le y \le \frac{2x}{1 + x^2}\}$.

[ℜ. $a)$ 0; $b)$ 1/2; $c)$ π; $d)$ 1; $e)$ $+\infty$]

6) Si calcoli $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + 2\cos x}$.

[La prima idea è quella di effettuare la sostituzione $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$; si trova come risultato 0 che è inaccettabile. Dov'è l'errore? Poi si osserva che la funzione integranda è simmetrica rispetto a π; l'integrale dato è dunque uguale a 2 volte l'integrale da 0 a π; la sostituzione di prima ora funziona, anche se dà luogo ad un integrale improprio. [ℜ. $\frac{2}{5}\pi\sqrt{5}$]