Capitolo Undicesimo

LO SPAZIO $\mathbb{R}^n$

§ 1. STRUTTURA METRICA DI $\mathbb{R}^n$

È ben nota la definizione di $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Ci interesseranno i casi $n = 1, 2, 3$.
In $\mathbb{R}^n$ sono definite le due seguenti operazioni:

1) *Somma:*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

2) *Prodotto per uno scalare:*

$$\lambda\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n), \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Gli elementi di $\mathbb{R}^n$ possono dunque essere interpretati come vettori (cfr. § 3). Usando notazioni vettoriali, conviene pensare gli x_i disposti in colonna, anziché in riga. Poniamo perciò:

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T.$$

Si tenga ben presente che, se è $n > 1$, l'insieme $\mathbb{R}^n$ non è ordinato, ossia: *Se è $n > 1$, non è possibile definire in $\mathbb{R}^n$ una relazione d'ordine totale che sia compatibile con le operazioni di somma e di prodotto per un numero reale e in modo che continui a valere la proprietà di esistenza dell'estremo superiore.*

In $\mathbb{R}^n$ si introduce la *distanza euclidea* data dalla seguente

DEFINIZIONE. Dati $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $\underline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, si definisce *distanza (euclidea)* tra $\underline{x}$ e $\underline{y}$ il numero reale

$$d(\underline{x}, \underline{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}\ .$$

Per $n = 1$, si ha: $\quad d(x, y) = |x - y|.$

TEOREMA 1. *(Proprietà della distanza) - La distanza è un'applicazione di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ che gode delle seguenti proprietà:*

1) $d(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0,\ \forall\, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, (*non negatività*);
2) $d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y},\ \forall\, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, (*non degeneratezza*);
3) $d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{y}, \underline{x}),\ \forall\, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, (*simmetria*);
4) $d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y}),\ \forall\, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$, (*disuguaglianza triangolare*). ∎

Le prime affermazioni sono ovvie; l'ultima verrà provata nel § 3, dopo il Teor. 19.
Questo risultato si esprime dicendo che $\mathbb{R}^n$ *è uno spazio metrico.*

DEFINIZIONE.
L'insieme $S(\underline{x}^0, r) := \{\underline{x} : d(\underline{x}, \underline{x}^0) < r\}$ è detto *sfera aperta* di *centro* $\underline{x}^0$ e *raggio* r.
L'insieme $S[\underline{x}^0, r] := \{\underline{x} : d(\underline{x}, \underline{x}^0) \leq r\}$ è detto *sfera chiusa* di *centro* $\underline{x}^0$ e *raggio* r.

Per $n = 1$, le sfere sono gli intervalli, per $n = 2$, i dischi, rispettivamente aperti o chiusi, di centro $\underline{x}^0$ e raggio r.

DEFINIZIONE. Un insieme $U \subset \mathbb{R}^n$ è detto un *intorno* di un punto $\underline{x}^0$ se esiste una sfera $S(\underline{x}^0, r)$ contenuta in U. L'insieme degli intorni del punto $\underline{x}$ sarà talvolta indicato con $\mathbb{U}(\underline{x})$.

TEOREMA 2. *Gli intorni di un punto godono delle seguenti proprietà:*
1) *Ogni intorno di un punto contiene il punto stesso.*
2) *Se U è un intorno di $\underline{x}^0$ e $V \supset U$, allora anche V è un intorno di $\underline{x}^0$.*
3) *Se U e V sono intorni di $\underline{x}^0$, allora è tale anche l'insieme $U \cap V$.*
4) *Se è $\underline{x}^0 \neq \underline{y}^0$, allora esistono un intorno U di $\underline{x}^0$ e uno V di $\underline{y}^0$ tali che $U \cap V = \emptyset$.*

DIM. Se U è in intorno di un punto $\underline{x}^0$, allora, per definizione, esiste una sfera aperta S di centro $\underline{x}^0$ contenuta in U; dunque $\underline{x}^0 \in U$ (Prop. 1). Se poi è $U \subset V$, si ha anche $S \subset V$, e quindi anche V è intorno di $\underline{x}^0$ (Prop. 2). Se U e V sono intorni di un punto $\underline{x}^0$, esistono una sfera S' contenuta in U e una sfera S'' contenuta in V, entrambi con centro in $\underline{x}^0$; quella delle due sfere che ha il raggio più piccolo è contenuta in $U \cap V$ che è dunque ancora un intorno del punto $\underline{x}^0$ (Prop. 3).

Passiamo alla (4). Siano $\underline{y}^0$ e $\underline{x}^0$ due punti distinti e sia δ un numero reale positivo e minore di $\frac{1}{2}\, d(\underline{y}^0, \underline{x}^0)$. Vogliamo mostrare che è $S(\underline{x}^0, \delta) \cap S(\underline{y}^0, \delta) = \emptyset$. Procediamo per assurdo. Se esistesse un $\underline{x} \in S(\underline{x}^0, \delta) \cap S(\underline{y}^0, \delta)$, si avrebbe:

$$d(\underline{y}^0, \underline{x}^0) \leq d(\underline{y}^0, \underline{x}) + d(\underline{x}, \underline{x}^0) < 2\delta < d(\underline{y}^0, \underline{x}^0). \blacksquare$$

DEFINIZIONE. Si dice che un punto $\underline{x}$ è *interno* a un insieme E se esiste una sfera aperta di centro $\underline{x}$ contenuta in E. L'insieme dei punti interni a un insieme E si chiama *interno* di E e si indica con *int E* o con $\mathring{E}$. Un punto $\underline{x}$ si dice *esterno* a un insieme E se è interno al complementare di E, ossia se esiste una sfera di centro $\underline{x}$ contenuta in $\complement E$.

DEFINIZIONE. Un insieme E è detto *aperto* se ogni suo punto gli è interno o, equivalentemente, se E è intorno di ogni suo punto.
In altre parole, un insieme E è detto *aperto* se è $E = int\, E$.

TEOREMA 3. *Una sfera aperta è un insieme aperto.*

DIM. Consideriamo una sfera aperta $S(\underline{x}^0, r)$ e un punto $\underline{y}^0 \in S$. Proviamo che S è intorno anche di $\underline{y}^0$. Sia δ un numero reale positivo e minore di $r - d(\underline{x}^0, \underline{y}^0)$; mostriamo che è $S(\underline{y}^0, \delta) \subset S(\underline{x}^0, r)$. Se è $\underline{x} \in S(\underline{y}^0, \delta)$, da cui $d(\underline{x}, \underline{y}^0) < \delta$, si ha:

$$d(\underline{x}, \underline{x}^0) \leq d(\underline{x}, \underline{y}^0) + d(\underline{y}^0, \underline{x}^0) < \delta + (r - \delta) = r. \blacksquare$$

DEFINIZIONE. Un punto $\underline{x}$ è detto *di accumulazione* per un insieme E se in *ogni* intorno di $\underline{x}$ cadono infiniti punti di E. L'insieme dei punti di accumulazione per un insieme E è detto il *derivato* di E e si indica con $\mathbb{D}E$.

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}^n$ è detto *limitato* se esiste una sfera S di centro nell'origine contenente E.

Sussiste al riguardo il seguente risultato del quale omettiamo la dimostrazione (cfr. Cap. 2, Teor. 22).

TEOREMA 4. *(di Bolzano - Weierstrass) - Ogni sottoinsieme infinito e limitato E di* $\mathbb{R}^n$ *ammette almeno un punto di accumulazione.* ∎

L'ipotesi che E sia infinito è banalmente necessaria. Sappiamo poi già dal caso $n = 1$ che, se E non è limitato, il Teorema precedente può cadere in difetto: basta prendere $E = \mathbb{N}$.

DEFINIZIONE. Un punto $\underline{x}$ è detto *aderente* a un insieme E se in ogni intorno di $\underline{x}$ cade *almeno un* punto di E. L'insieme dei punti aderenti a un insieme E è detto la *chiusura* di E e si indica con $cl\, E$ o con $\overline{E}$. Un insieme E è detto *chiuso* se è $E = cl\, E$.

TEOREMA 5. *Si ha* $cl\, E = E \cup \mathcal{D}E$.

DIM. Sia, intanto, $\underline{x} \in E \cup \mathcal{D}E$. Se è $\underline{x} \in E$, in ogni intorno di $\underline{x}$ c'è certamente almeno un punto di E, lui stesso. Se è $\underline{x} \in \mathcal{D}E$, in ogni intorno di $\underline{x}$ ci sono addirittura infiniti punti di E.

Proviamo il viceversa. Sia dunque $\underline{x} \in cl\, E$. Per raggiungere la tesi, basta mostrare che, se $\underline{x} \notin E$, deve essere $\underline{x} \in \mathcal{D}E$, In ogni intorno di $\underline{x}$ ci sono punti di E diversi da $\underline{x}$. Supponiamo, per assurdo, che in un intorno U di $\underline{x}$ cada solo un numero finito di punti di E; siano questi $\underline{x}^1$, $\underline{x}^2$, …, $\underline{x}^m$. Diciamo S la sfera di centro $\underline{x}$ e raggio r, con

$$r < \min\{d(\underline{x}^1, \underline{x}^0), d(\underline{x}^2, \underline{x}^0), \dots, d(\underline{x}^m, \underline{x}^0)\}.$$

Si vede subito che si ha $S \cap E = \emptyset$, contro l'ipotesi $\underline{x} \in cl\, E$. ∎

DEFINIZIONE. Un punto $\underline{x} \in E$ che non sia di accumulazione per E è detto un punto *isolato* di E.

ESEMPI. 1) $n = 1$. Ogni intervallo aperto è un insieme aperto e ogni intervallo chiuso è un insieme chiuso. Sia $I = [0,1[$. Si ha $int\, I =]0,1[\neq I$, dunque I *non* è aperto; si ha $cl\, I = [0,1] \neq I$, dunque I *non* è nemmeno chiuso.

Da tale esempio, si vede che:

Esistono insiemi che non sono né aperti né chiusi!

2) $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono sia aperti che chiusi (Esercizio!). Si potrebbe anzi dimostrare che in $\mathbb{R}^n$ non ci sono altri insiemi che risultino contemporaneamente aperti e chiusi.

3) $n = 2$. Sia $E = [0,1[\times [0,1[\cup \{(x,\ 0)^T: 1 \leq x \leq 2\}$. Si ha

$$int\, E =]0, 1[\times]0, 1[;\ cl\, E = [0, 1] \times [0, 1] \cup \{(x,\ 0))^T: 1 \leq x \leq 2\}.$$

4) $n = 1$. $E = \mathbb{Q}$. Si ha $int\, \mathbb{Q} = \emptyset$; $cl\, \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

5) L'intervallo aperto $I =]0,1[$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}$, ma $I' = \{(x, 0)^T: x \in I\}$ *non* è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$. L'intervallo chiuso $J = [0,1]$ è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$ e l'insieme $J' = \{(x, 0)^T: x \in J\}$ è chiuso in $\mathbb{R}^2$, ma, mentre è $int\, J =]0,1[$, si ha $int\, J' = \emptyset$.

TEOREMA 6. 1) *Se A è un insieme aperto, il suo complementare $\complement A$ è un insieme chiuso.*
2) *Se C è un insieme chiuso, il suo complementare $\complement C$ è un insieme aperto.*

DIM. 1) Sia A un insieme aperto. Se è $\underline{x} \in A$, esiste una sfera aperta S di centro $\underline{x}$ contenuta in A. In S non ci sono perciò punti di $\complement A$. Dunque $\underline{x}$ non è aderente a $\complement A$. Ne viene che i punti aderenti a $\complement A$ devono appartenere a $\complement A$ e che, di conseguenza, quest'ultimo insieme è chiuso.
2) Sia C un insieme chiuso. Dunque C contiene tutti i punti che gli sono aderenti. Ma allora, se è $\underline{x} \in \complement C$, $\underline{x}$ non può essere aderente a C. Deve perciò esistere una sfera S di centro $\underline{x}$ priva di punti di C, ma allora è $S \subset \complement C$. Si conclude che ogni punto di $\complement C$ gli è interno e che, pertanto, tale insieme è aperto. ∎

TEOREMA 7. 1) *L'unione di quanti si vogliano insiemi aperti è un insieme aperto.*
2) *L'intersezione di un numero (finito) di insiemi aperti è un insieme aperto.*
3) *L'unione di un numero (finito) di insiemi chiusi è un insieme chiuso.*
4) *L'intersezione di quanti si vogliano insiemi chiusi è un insieme chiuso.*

DIM. 1) Sia data una famiglia di insiemi aperti e sia A la loro riunione. Se è $\underline{x} \in A$, $\underline{x}$ deve appartenere ad almeno uno degli aperti dati; indichiamolo con A'. Esiste allora una sfera di centro $\underline{x}$ contenuta in A' e, quindi, in A.
2) Siano A e B due insiemi aperti e sia $\underline{x} \in A \cap B$. Allora $\underline{x}$ deve appartenere ad entrambi gli insiemi. Esistono perciò due sfere di centro $\underline{x}$ contenute una in A e l'altra in B, quindi la più piccola delle due è contenuta in $A \cap B$. Il ragionamento può essere facilmente esteso al caso di un numero (finito) qualunque di insiemi aperti.
3) Se A e B sono chiusi, $\complement A$ e $\complement B$ sono aperti ed è quindi aperto anche $\complement A \cap \complement B$. Ricordando che, per le formule di De Morgan, è $\complement A \cap \complement B = \complement(A \cup B)$, si conclude che $\complement(A \cup B)$ è aperto e che, pertanto, $A \cup B$ è chiuso. Il ragionamento si estende al caso di un numero (finito) qualunque di insiemi chiusi.
4) Si prova come la (3), sfruttando la (1) e ricordando che il complementare dell'unione di quanti si vogliano insiemi è uguale all'intersezione dei complementari. ∎

Si badi che l'intersezione di infiniti insiemi aperti può ben non essere un insieme aperto e, similmente, la riunione di infiniti insiemi chiusi può non essere un insieme chiuso, come appare dai seguenti

ESEMPI. 6) Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $I_n =]0, 1 + 1/n[$; si ha: $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n =]0, 1]$ che non è un insieme aperto, pur essendo tali gli I_n.

7) Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $I_n = [0, 1 - 1/n]$; si ha: $\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n = [0, 1[$ che non è un insieme chiuso, pur essendo tali gli I_n.

DEFINIZIONE. Dicesi *frontiera di un insieme E* l'insieme $\mathcal{F}E = cl\, E \cap cl\, (\complement E)$.

L'insieme $\mathcal{F}E$ è dunque formato dagli elementi che non sono né interni né esterni all'insieme E; cioè: $\underline{x} \in \mathcal{F}E$ *se e solo se in ogni intorno di $\underline{x}$ cadono sia punti di E sia punti di $\complement E$.* Ne viene subito che è $\mathcal{F}E = \mathcal{F}(\complement E)$. Sfruttando la definizione e il Teorema 6 si può poi dimostrare che (cfr. Esercizio 5): *La frontiera di un insieme E è un insieme chiuso.*

ESEMPI. 8) $n = 1$. Siano $I =]0,1[$; $J =]0,1]$, $K = [0,1]$. si ha: $\mathcal{F}I = \mathcal{F}J = \mathcal{F}K = \{0, 1\}$.

9) $n = 2$. Sia $E = [0,1[\times [0,1[\cup \{(x, 0)^T : 1 \le x \le 2\}$. Si ha:

$$\mathcal{F}E = \{(x, 0)^T : 0 \le x \le 2\} \cup \{(x, 1)^T : 0 \le x \le 1\} \cup \{(x, y)^T : x \in \{0, 1\};\ 0 \le y \le 1\}.$$

10) $n = 1$. $E = \mathbb{Q}$. Si ha $\mathcal{F}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

11) $n = 1$. Siano $E_1 = [-1, 0[$; $E_2 = [0, 1]$. Si ha:

$$\mathcal{F}E_1 = \{-1,\ 0\};\ \ \mathcal{F}E_2 = \{0,\ 1\};$$
$$\mathcal{F}E_1 \cup \mathcal{F}E_2 = \{-1,\ 0,\ 1\};\ \mathcal{F}(E_1 \cup E_2) = \{-1,\ 1\};$$
$$\mathcal{F}E_1 \cap \mathcal{F}E_2 = \{0\};\ \mathcal{F}(E_1 \cap E_2) = \varnothing.$$

Gli insiemi degli Esempi 8, 9, 11 sono limitati; quello dell'Esempio 10 non lo è.

DEFINIZIONE. Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^n$ è detto *compatto* se è *chiuso e limitato.*

ESEMPIO. 12) Sia $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$ non è compatto perché, pur essendo limitato, non è chiuso. Infatti, 0 è un punto di accumulazione per E, ma non gli appartiene. Essendo 0 l'unico punto di accumulazione per E, si ha subito che $E \cup \{0\}$ è compatto. Più in generale, si vede subito che la chiusura *cl* E di un insieme limitato E è un insieme compatto (cfr. Esercizio 5).

§ 2. A P P L I C A Z I O N I

Ricordiamo che, dato un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$, si dice *applicazione* o *funzione* di E in $\mathbb{R}^m$ una *legge* che a *ogni* elemento $\underline{x}$ di E associa *uno (e un solo)* elemento di $\mathbb{R}^m$, detto *immagine* di $\underline{x}$ tramite la f e indicato con $f(\underline{x})$. L'insieme E è detto il *dominio* della f; $\mathbb{R}^m$ è detto il *codominio* della f; l'insieme $\{f(\underline{x}) : \underline{x} \in E\}$ $(\subset \mathbb{R}^m)$ è detto l'*insieme immagine* di E tramite la f. Per esprimere il fatto che f è una *funzione* di $E(\subset \mathbb{R}^n)$ in $\mathbb{R}^m$ scriveremo $f : E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$.

Data $f : E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, ad ogni $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in E$ resta dunque associato un elemento $f(\underline{x}) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))^T \in \mathbb{R}^m$. È dunque:

$$f(\underline{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x}))^T = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots, \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Le funzioni $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) : E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, con $i = 1, 2, \dots, m$, sono dette le *componenti* di f.

Per determinare il dominio di una $f : E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, basta trovare i domini delle singole componenti e farne l'intersezione.

ESEMPIO. 1) Si cerca il dominio della funzione f di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$:

$$f(\underline{x}) = f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1} \\ \log(xy) \end{pmatrix}.$$

Il dominio di $f_1(x, y)$ è $\{(x, y))^T : |x| \le 1;\ |y| \ge 1\}$; quello di $f_2(x, y)$ è dato dal primo e dal terzo quadrante, assi esclusi. Il dominio della f è quindi:

$$E = \{(x, y)^T: 0 < x \leq 1, y \geq 1\} \cup \{(x, y)^T: -1 \leq x < 0, y \leq -1\}.$$

Le nozioni di limite e di funzione continua si estendono naturalmente al nuovo contesto.

DEFINIZIONE. Una funzione $f : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ è *continua* in un punto $\underline{x}^0 \in E$ se, per ogni intorno V di $f(\underline{x}^0)$, esiste un intorno U di $\underline{x}^0$ per cui si abbia $f(\underline{x}) \in V$ per ogni $\underline{x} \in E \cap U$, ossia se:

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta(\underline{x}^0, \varepsilon) > 0)(\forall\ x \in E)(d(\underline{x}, \underline{x}^0) < \delta \Rightarrow d(f(\underline{x}), f(\underline{x}^0)) < \varepsilon).$$

Ne viene che se $\underline{x}^0$ è un punto isolato di E, allora f è continua in $\underline{x}^0$.
La f è *continua in E* se è continua in ogni punto di E.

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione $f : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ e un punto $\underline{x}^0$ di accumulazione per E. Si dice che un punto $\underline{l} \in \mathbb{R}^m$ è il *limite di* $f(\underline{x})$ *per* $\underline{x} \to \underline{x}^0$, o che la *f tende a* $\underline{l}$ *per* $\underline{x}$ *che tende a* $\underline{x}^0$, se, per ogni intorno V di $\underline{l}$, esiste un intorno U di $\underline{x}^0$ per cui si abbia $f(\underline{x}) \in V$ per ogni $\underline{x} \in E \cap U \setminus \{\underline{x}^0\}$, ossia se:

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta(\underline{x}^0, \varepsilon) > 0)(\forall\ x \in E)(0 < d(\underline{x}, \underline{x}^0) < \delta \Rightarrow d(f(\underline{x}), \underline{l}) < \varepsilon).$$

In tal caso, si scrive $\qquad \lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} f(\underline{x}) = \underline{l}.$

OSSERVAZIONE. Sia $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in S(\underline{x}^0, r) \subset \mathbb{R}^n$, con $\underline{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)^T$. Essendo $\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2} < r$, deve essere $|x_i - x_i^0| < r$, per ogni $i \leq n$.

Viceversa, affinché sia $\underline{x} \in S(\underline{x}^0, r)$, è sufficiente che, per ogni $i \leq n$, si abbia $|x_i - x_i^0| < \dfrac{r}{\sqrt{n}}$.

Infatti, se così è, risulta: $\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2} < \sqrt{\dfrac{n\,r^2}{n}} = r.$

Da questo fatto segue subito il

TEOREMA 8. 1) *Una funzione* $f : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ *è continua in un punto* $\underline{x}^0 \in E$ *se e solo se è tale ogni sua componente.*

2) *Per una funzione* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ *si ha* $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} f(\underline{x}) = \underline{l}$, con $\underline{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_m)^T$, *se e solo se, per ogni* $i \leq m$, *si ha* $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} f_i(\underline{x}) = l_i$. ∎

Per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, si pone $\|\underline{x}\| = d(\underline{x}, \underline{0}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Torneremo su questo punto nel prossimo paragrafo. Per ora ci basta la notazione.

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione $f : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, con E insieme illimitato, e un punto $\underline{l} \in \mathbb{R}^m$. Diremo che la funzione *f tende a* $\underline{l}$ *per* $\|\underline{x}\|$ *che tende a infinito* se, per ogni intorno V di $\underline{l}$, esiste un $H \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $\underline{x}$ di E, con $\|\underline{x}\| > H$, si ha $f(\underline{x}) \in V$, ossia se:

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ H(\varepsilon) \in \mathbb{R})(\forall\ x \in E)(\|\underline{x}\| > H \Rightarrow d(f(\underline{x}), \underline{l}) < \varepsilon).$$

In tal caso, si scrive $\qquad \lim_{\|\underline{x}\| \to \infty} f(\underline{x}) = \underline{l}.$

La nozione di limite infinito può essere estesa al caso di funzioni di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$:

DEFINIZIONE. Siano dati una funzione $f : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ e un punto $\underline{x}^0$ di accumulazione per E. Si dice che la f *tende a più infinito* $(+\infty)$ o che *ha limite più infinito* per $\underline{x}$ che tende a $\underline{x}^0$ se, per ogni $M \in \mathbb{R}$, esiste un intorno U di $\underline{x}^0$, tale che, per ogni $\underline{x} \in U \cap E \setminus \{\underline{x}^0\}$, risulti $f(\underline{x}) > M$, ossia se:

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists\, \delta(\underline{x}^0, M) > 0)(\forall\, \underline{x} \in E)(0 < d(\underline{x}, \underline{x}^0) < \delta \Rightarrow f(\underline{x}) > M).$$

In tal caso, si scrive $\displaystyle\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} f(\underline{x}) = +\infty.$

DEFINIZIONE. Sia data una funzione $f : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, con E insieme illimitato. Diremo che la funzione *f tende a più infinito per* $\|\underline{x}\|$ *che tende a più infinito* se per ogni $M \in \mathbb{R}$, esiste un $H \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $\underline{x}$ di E, con $\|\underline{x}\| > H$, si ha $f(\underline{x}) > M$; in simboli:

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists\, H(M) \in \mathbb{R})(\forall\, \underline{x} \in E)(\|\underline{x}\| > H \Rightarrow f(\underline{x}) > M).$$

In tal caso, si scrive $\displaystyle\lim_{\|\underline{x}\| \to \infty} f(\underline{x}) = +\infty.$

In modo analogo a quanto fatto nel caso $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dà anche la nozione di funzione che tende a $-\infty$ o a ∞ per $\underline{x}$ che tende a $\underline{x}^0$ o per $\|\underline{x}\|$ che tende a $+\infty$.

Per esempio, $\displaystyle\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} f(\underline{x}) = -\infty$ significa che:

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists\, \delta(\underline{x}^0, M) > 0)(\forall\, \underline{x} \in E)(0 < d(\underline{x}, \underline{x}^0) < \delta \Rightarrow f(\underline{x}) < M).$$

E ancora, $\displaystyle\lim_{\|\underline{x}\| \to \infty} f(\underline{x}) = \infty$ significa:

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists\, H(M) \in \mathbb{R})(\forall\, \underline{x} \in E)(\|\underline{x}\| > H \Rightarrow |f(\underline{x})| > M).$$

Chi studia completi la lista delle definizioni, esaminando tutti i casi possibili.

ESEMPIO. 2) Proviamo che per la funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(\underline{x}) = \left(\frac{x+1}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)^{\mathrm{T}}$$

è $\displaystyle\lim_{\underline{x} \to \underline{0}} \|f(\underline{x})\| = +\infty$. Infatti, se è $x > -\frac{1}{2}$, si ha:

$$\|f(\underline{x})\| = \frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1}}{x^2 + y^2} > \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\|\underline{x}\|}$$

che tende a $+\infty$ se $\underline{x}$ tende a $\underline{0}$.

Molti dei Teoremi visti per le funzioni reali di una variabile reale conservano validità anche nel caso più generale di cui ci stiamo occupando e, in molti casi, la dimostrazione si ottiene semplicemente adattando quella vista nel caso particolare. (Naturalmente, la somma e il prodotto per una costante vanno intese in senso vettoriale.) Ci limitiamo, perciò, a fare qualche osservazione e a rienunciare qualcuno dei Teoremi.

TEOREMA 9. *(di Bolzano - Weierstrass) - Ogni successione limitata di* $\mathbb{R}^n$ *ha una sottosuccessione convergente.* ▮

TEOREMA 10. *Un sottoinsieme E di* $\mathbb{R}^n$ *è compatto se e solo se ogni successione di elementi di E ha una sottosuccessione convergente ad un elemento di E.* ▮

TEOREMA 11. *Sia data una funzione* $f : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$*, e sia* $\underline{x}^0$ *un punto di accumulazione per E, Allora:*

1) *(Unicità del limite) - Se esiste il limite di* $f(\underline{x})$ *per* $\underline{x}$ *che tende a* $\underline{x}^0$*, esso è unico.*

2) *(Limite della restrizione) - Sia* $\underline{x}^0$ *di accumulazione per un sottoinsieme T di E, allora, se esiste il limite di* $f(\underline{x})$ *per* $\underline{x}$ *che tende a* $\underline{x}^0$*, esiste anche il limite, sempre per* $\underline{x}$ *che tende a* $\underline{x}^0$*, della restrizione della f a T e i due limiti coincidono.*

3) *(Limitatezza locale) - Se esiste finito il limite della f per* $\underline{x}$ *che tende a* $\underline{x}^0$*, allora esiste un intorno U di* $\underline{x}^0$ *in cui la f è limitata* [ossia: *è limitato l'insieme f(U)*].

4) *(Permanenza del segno) - Se una funzione* $f : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *ha un limite positivo* [*negativo*] *per* $\underline{x}$ *che tende a* $\underline{x}^0$*, esiste un intorno di* $\underline{x}^0$ *dove, per* $\underline{x} \neq \underline{x}^0$*, la f è ancora positiva* [risp. *negativa*]. ▮

TEOREMA 12. *Siano date due funzioni* $f, g : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$*, e sia* $\underline{x}^0$ *un punto di accumulazione per E, Allora:*

1) *Se è* $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}^0} f(\underline{x}) = \underline{l}$ *e* $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}^0} g(\underline{x}) = \underline{m}$*, si ha anche* $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}^0} (f+g)(\underline{x}) = \underline{l} + \underline{m}$.

2) *Se è* $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}^0} f(\underline{x}) = \underline{l}$ *e se* α *è un numero reale, si ha* $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}^0} (\alpha f)(\underline{x}) = \alpha\underline{l}$. ▮

Il Teorema sul limite delle funzioni composte conserva inalterati il suo enunciato e la sua dimostrazione.

I Teoremi sul limite del prodotto, della reciproca e del quoziente, (come quello della permanenza del segno) conservano la loro validità solo nel caso $m = 1$.

Se è $n > 1$, non ha più senso parlare di limite destro o limite sinistro. Non si può parlare nemmeno di limite per $\underline{x}$ che tende a $+\infty$ o a $-\infty$, ma solo di limite per $\|\underline{x}\|$ che tende a $+\infty$..

In modo similare si estendono i Teoremi sulla continuità.

TEOREMA 13 *(di Compattezza) - Se* $f : K\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ *è una funzione continua definita su un insieme compatto K, allora l'insieme immagine f(K) è anch'esso un insieme compatto.*

DIM. Prendiamo una successione $(\underline{y}^n)_n$ di punti di *f(E)*. Per ogni indice *n*, esiste un $\underline{x}^n \in E$ tale che $f(\underline{x}^n) = \underline{y}^n$. Essendo *E* compatto, la successione $(\underline{x}^n)_n$ ha una sottosuccessione $(\underline{x}^{n_k})_k$ convergente a un punto $\underline{x}^* \in E$. Per la continuità dalla *f*; la sottosuccessione $(f(\underline{x}^{n_k}))_k = (\underline{y}^{n_k})_k$ di $(\underline{y}^n)_n$ converge a $f(\underline{x}^*) \in f(E)$. Dunque *f(E)* è compatto (Teorema 13). ▮

COROLLARIO 14. *(di Weierstrass) - Se* $f : K\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$*, è una funzione continua definita su un insieme compatto K, allora la f assume su K un valore minimo e uno massimo. ;*▮

Si tenga ben presente che, come si è già visto nel caso $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se il dominio *K* non è compatto, il Teorema di Weierstrass cade in difetto.

DEFINIZIONE. Si dice che una funzione $f : E\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ è *uniformemente continua su E* se:

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta(\varepsilon) > 0)(\forall\ \underline{x}^1 \in E)(\forall\ \underline{x}^2 \in E)(d(\underline{x}^1, \underline{x}^2) < \delta \Rightarrow d(f(\underline{x}^1), f(\underline{x}^2)) < \varepsilon).$$

TEOREMA 15 *(di Heine) - Una funzione* $f : K\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$*, definita e continua su un insieme compatto è uniformemente continua.* ▮

Del Teorema di Connessione ci occuperemo fra un attimo.

Faremo spesso uso delle seguenti locuzioni sulle applicazioni, (che saranno meglio precisate in seguito).

$f: E\ (\subset \mathbb{R}^2 \text{ o } \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$:	*campo scalare;*
$\gamma: E\ (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2 \text{ o } \mathbb{R}^3$:	*curva;*
$g: E\ (\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ o $g: E\ (\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$:	*campo vettoriale;*
$\varphi: E\ (\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$:	*superficie.*

ESEMPI. 3) $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (curva): $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}$ (*elica*).

4) $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (campo vettoriale): $g(u,v) = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \end{pmatrix}$.

5) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (superficie): $\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} u + 1 \\ -v \\ 1 \end{pmatrix}$ (*piano*).

6) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (superficie): $\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$ (*paraboloide*).

La terminologia qui usata è del tutto imprecisa; infatti, senza ulteriori ipotesi sulle funzioni coinvolte, si possono ottenere degli oggetti che non hanno affatto le sembianze di una curva o di una superficie come noi usualmente le immaginiamo. In realtà, la definizione corretta di curva è la seguente:

DEFINIZIONE. Data un'applicazione γ definita su un *intervallo* I $(\subset \mathbb{R})$ e a valori in $\mathbb{R}^2$ [o $\mathbb{R}^3$], la coppia $(\gamma; \gamma(I))$ prende il nome di *curva di* $\mathbb{R}^2$ [rispettivamente, di $\mathbb{R}^3$], di cui l'insieme $\gamma(I)$ costituisce il *sostegno* e la γ è una *rappresentazione parametrica.* Se l'intervallo I è chiuso e limitato, si parla di *arco di curva.* Se la γ è continua, si parla di curva o di arco di curva *continua.*

Si tenga inoltre presente che, nel caso degli archi di curva, non è restrittivo supporre che sia $I = [0, 1]$, dato che è immediato costruire un'applicazione (lineare) continua, biiettiva e crescente fra due intervalli chiusi qualunque, purché non ridotti a un solo punto.

Similmente, data un'applicazione $\varphi: E\ (\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$, con E soddisfacente a opportune condizioni di regolarità (che preciseremo a suo tempo), la coppia $(\varphi; \varphi(E))$ è detta *superficie*, di cui l'insieme $\varphi(E)$ costituisce il *sostegno* e la φ è una *rappresentazione parametrica.*

DEFINIZIONE. Dati due punti $\underline{x}^1$ e $\underline{x}^2$ di $\mathbb{R}^n$ e un intervallo $I = [a, b]$ $(\subset \mathbb{R})$, la curva continua di rappresentazione parametrica $\gamma(t) = \dfrac{b-t}{b-a}\underline{x}^1 + \dfrac{t-a}{b-a}\underline{x}^2$, $t \in I$, prende il nome di *segmento* di cui i punti $\underline{x}^1 = \gamma(a)$ e $\underline{x}^2 = \gamma(b)$ si dicono, rispettivamente, il *primo* e il *secondo estremo*.[1]

Una curva continua di rappresentazione parametrica $\gamma(t)$: $I = [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ si chiama *poligonale* se esistono m punti di I, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ tali che la restrizione di γ a ciascuno

---

[1] I punti del segmento sono quelli del tipo $\underline{x} = \underline{x}^1 + \tau(\underline{x}^2 - \underline{x}^1)$, con $\tau \in [0,1]$. Posto $\tau = \dfrac{t-a}{b-a}$, si ricava subito la rappresentazione parametrica sopra indicata.

dei sottointervalli $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, m - 1$, è un segmento. I punti $\underline{x}^i = \gamma(a_i)$, con $i = 0, 1, \ldots, m$, si dicono i *vertici* della poligonale.

DEFINIZIONE. Un insieme E ($\subset \mathbb{R}^n$) è detto *connesso (per archi)* se, comunque si fissino due punti $\underline{x}$ e $\underline{y}$ in E, esiste un arco *continuo* di curva che li unisce e il cui sostegno sia totalmente contenuto in E.

È chiaro che:

In $\mathbb{R}$ sono connessi, oltre agli insiemi ridotti a un solo punto, tutti e soli gli intervalli (limitati o no).

Ogni sfera di $\mathbb{R}^n$ è un insieme connesso.

Un esempio di insieme non connesso è dato dall'unione di due intervalli chiusi di $\mathbb{R}$, privi di punti in comune. Possiamo ora provare il:

TEOREMA 16. *(di Connessione) - Se $f : E$ ($\subset \mathbb{R}^n$) $\to \mathbb{R}^m$ è una funzione continua definita su un insieme connesso E, allora l'insieme immagine f(E) è un insieme connesso.*

DIM. Siano $\underline{y}^1$ e $\underline{y}^2$ due elementi di $f(E)$. Esistono allora due elementi $\underline{x}^1$ e $\underline{x}^2$ di E tali che $f(\underline{x}^1) = \underline{y}^1$ e $f(\underline{x}^2) = \underline{y}^2$. Per ipotesi, esiste un'applicazione continua $\gamma: I = [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ tale che: $\gamma(0) = \underline{x}^1$, $\gamma(1) = \underline{x}^2$, $\gamma(I) \subset E$. Ma allora, si ha che l'applicazione composta $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^m$ è la rappresentazione di un arco continuo di curva di $\mathbb{R}^m$, con sostegno contenuto in $f(E)$, per cui è $(f \circ \gamma)(0) = \underline{y}^1$, $(f \circ \gamma)(1) = \underline{y}^2$. Si conclude che anche $f(E)$ è un insieme connesso. ∎

COROLLARIO 17. *Se $f : E$ ($\subset \mathbb{R}^n$) $\to \mathbb{R}$ è una funzione continua definita su un insieme connesso E, allora, l'insieme immagine f(E) è un intervallo* (ossia: *se la f assume due valori, assume anche tutti quelli fra essi compresi*). ∎

§ 3. STRUTTURA LINEARE DI $\mathbb{R}^n$

Rispetto alle operazioni in esso definite, $\mathbb{R}^n$ costituisce uno *spazio vettoriale* (o *lineare*) su $\mathbb{R}$; ciò significa che sono soddisfatte le seguenti proprietà (di immediata verifica):

1. $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$, *proprietà associativa*;
2. $\underline{x} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{x} = \underline{x}$, *esistenza dell'elem. neutro*;
3. $\forall \underline{x}$, $\exists (-\underline{x}) : \underline{x} + (-\underline{x}) = (-\underline{x}) + \underline{x} = \underline{0}$, *esistenza dell'opposto*;
4. $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$, *proprietà commutativa*;
[cioè: $\mathbb{R}^n(+)$ è un *gruppo abeliano*]

5. $\lambda(\underline{x} + \underline{y}) = \lambda\underline{x} + \lambda\underline{y}$,
6. $(\lambda + \mu)\underline{x} = \lambda\underline{x} + \mu\underline{x}$,
proprietà distributive;

7. $\lambda(\mu\underline{x}) = (\lambda\mu)\underline{x}$;
8. $1\underline{x} = \underline{x}$.

DEFINIZIONE. Dato $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, si definisce *norma* di $\underline{x}$ il numero reale

$$\|\underline{x}\| = d(\underline{x}, \underline{0}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\,.$$

Si vede subito che, per $n = 1$, si ha: $\|\underline{x}\| = |x|$.
Si constata immediatamente anche che: $d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$.

TEOREMA 18. *La norma è un'applicazione* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *che gode delle seguenti proprietà:*

1) $\|\underline{x}\| \geq 0, \forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, *(non negatività);*
2) $\|\underline{x}\| = 0, \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$ *(non degeneratezza);*
3) $\|\lambda\underline{x}\| = |\lambda|\cdot\|\underline{x}\|, \forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \forall\lambda \in \mathbb{R}$, *(omogeneità);*
4) $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|. \forall\, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, *(subadditività).* ∎

Le prime tre affermazioni sono di immediata verifica; la quarta verrà provata tra poco.
Il risultato sopra visto si esprime dicendo che: $\mathbb{R}^n$ *è uno spazio vettoriale normato.*

DEFINIZIONE. Dati due elementi $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $\underline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, si chiama loro *prodotto scalare* il numero reale

$$\langle\underline{x}, \underline{y}\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n\,.$$

TEOREMA 19. *Il prodotto scalare è un'applicazione di* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *in* $\mathbb{R}$ *che gode delle seguenti proprietà:*

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{1.} & \langle\underline{x}^1 + \underline{x}^2, \underline{y}\rangle = \langle\underline{x}^1, \underline{y}\rangle + \langle\underline{x}^2, \underline{y}\rangle; \\ \mathbf{1'.} & \langle\underline{x}, \underline{y}^1 + \underline{y}^2\rangle = \langle\underline{x}, \underline{y}^1\rangle + \langle\underline{x}, \underline{y}^2\rangle; \\ \mathbf{2.} & \langle\lambda\underline{x}, \underline{y}\rangle = \lambda\langle\underline{x}, \underline{y}\rangle; \\ \mathbf{2'.} & \langle\underline{x}, \lambda\underline{y}\rangle = \lambda\langle\underline{x}, \underline{y}\rangle; \\ \mathbf{3.} & \langle\underline{x}, \underline{y}\rangle = \langle\underline{y}, \underline{x}\rangle; \end{array}\right\} \text{[Il prodotto scalare è una forma bilineare simmetrica]}$$

4. $\langle\underline{x}, \underline{x}\rangle \geq 0, \ \forall\underline{x}$; *(positiva definitezza)*
4'. $\langle\underline{x}, \underline{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$;
5. $\|\underline{x}\| = \sqrt{\langle\underline{x}, \underline{x}\rangle}$;
6. $|\langle\underline{x}, \underline{y}\rangle| \leq \|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|$; *(Disuguaglianza di Cauchy - Schwarz)*
6'. $|\langle\underline{x}, \underline{y}\rangle| = \|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\| \Leftrightarrow \underline{x} = \lambda\underline{y}$.

DIM. Tutte le proprietà sono di verifica immediata, tranne le ultime 2; proviamo queste.
Quali che siano $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, si ha:

$$(*) \qquad \langle\underline{x} + t\underline{y}, \underline{x} + t\underline{y}\rangle = \|\underline{x}\|^2 + 2t\langle\underline{x}, \underline{y}\rangle + t^2\|\underline{y}\|^2 \geq 0.$$

Ne viene che il trinomio a secondo membro della (*), pensato nell'incognita t, deve avere discriminante minore o uguale a zero. È dunque:

$$\frac{\Delta}{4} = |\langle\underline{x}, \underline{y}\rangle|^2 - \|\underline{x}\|^2\cdot\|\underline{y}\|^2 \leq 0,$$

che è equivalente alla (6).

Se è $\underline{x} = \lambda\underline{y}$, si ha: $|\langle\underline{x}, \underline{y}\rangle| = |\langle\lambda\underline{y}, \underline{y}\rangle| = |\lambda|\cdot|\langle\underline{y}, \underline{y}\rangle| = |\lambda|\cdot\|\underline{y}\|\cdot\|\underline{y}\| = \|\lambda\underline{y}\|\cdot\|\underline{y}\| = \|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|$. Proviamo ora il viceversa. Se è $|\langle\underline{x}, \underline{y}\rangle| = \|\underline{x}\|\cdot\|\underline{x}\|$, nel trinomio della (*) è $\Delta = 0$. Ma allora l'equazione $\|\underline{x}\|^2 + 2t\langle\underline{x}, \underline{y}\rangle + t^2\|\underline{y}\|^2 = 0$ ha una e una sola soluzione $-\lambda$. Per un tale valore, si ottiene anche $\langle\underline{x} - \lambda\underline{y}, \underline{x} - \lambda\underline{y}\rangle = 0$. Per la (4'), si ha allora $\underline{x} - \lambda\underline{y} = \underline{0}$, che è quanto si voleva. ∎

Possiamo, finalmente, provare facilmente l'affermazione (4) del Teorema 18 nonché la (4) del Teorema 1.

DIM. della (18,4). Si ha:

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = \langle \underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y}\rangle = \|\underline{x}\|^2 + 2\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle + \|\underline{y}\|^2 \leq$$

$$\leq \|\underline{x}\|^2 + 2\|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\| + \|\underline{y}\|^2 = (\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|)^2. \blacksquare$$

DIM. della (1,4). Si ha:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\| = \|\underline{x} - \underline{z} + \underline{z} - \underline{y}\| \leq \|\underline{x} - \underline{z}\| + \|\underline{z} - \underline{y}\| = d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, ,\underline{y}). \blacksquare$$

Ricordiamo la

DEFINIZIONE. Dati due spazi vettoriali E ed E' su $\mathbb{R}$, un'applicazione f di E in E' è detta *lineare* se:

$$f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y}); \;\; f(\lambda\underline{x}) = \lambda f(\underline{x}), \;\; \forall\ \underline{x}, \underline{y} \in E, \forall\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

A noi interessa il caso $E = \mathbb{R}^n$, $E' = \mathbb{R}^m$.

DEFINIZIONE. Indicheremo con $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ l'insieme delle applicazioni lineari di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$; cioè:

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) := \{L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, L \text{ lineare}\}.$$

Si constata facilmente che anche $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ *è uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$.

Una volta fissate le basi $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ e $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2\ \ldots, \underline{e}'_m\}$ di $\mathbb{R}^m$, ad ogni $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ si può associare univocamente una matrice $A \in \mathfrak{M}(m, n)$, con m righe e n colonne, ponendo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} := L(\underline{e}_1); \;\; \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} := L(\underline{e}_2), \;\; \ldots\ldots, \;\; \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} := L(\underline{e}_n).$$

Ciò si esprime scrivendo: $\quad L(\underline{x}) = A\,\underline{x},$

dove $A\underline{x}$ indica il prodotto riga per colonna della matrice A per il vettore colonna $\underline{x}$.

DEFINIZIONE. Un'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ prende il nome di *forma lineare di* $\mathbb{R}^n$. L'insieme $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ delle forme lineari di $\mathbb{R}^n$, prende il nome di *spazio duale di* $\mathbb{R}^n$.

La matrice associata ad una forma lineare L di $\mathbb{R}^n$ è una matrice di tipo $(1, n)$ (quindi a *una* riga e n colonne); è perciò: $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Dunque, per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, sussiste l'uguaglianza:

(*) $$L(\underline{x}) = A\underline{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n\ .$$

Da ciò segue che, posto $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$, risulta $L(\underline{x}) = \langle \underline{a}, \underline{x}\rangle$. Ciò significa che:

TEOREMA 20 *(di Riesz) - Ogni forma lineare di* $\mathbb{R}^n$ *può essere rappresentata mediante il prodotto scalare.* $\blacksquare$

§ 4. ESERCIZI E COMPLEMENTI

1) Trovare il dominio delle seguenti funzioni di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$:

a) $f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)$; *b)* $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}$; *c)* $f(x, y) = \log(x + 2)\sqrt{x^2 - 2x + y^2 - 8}$;

d) $f(x, y, z) = \log(xyz)$; *e)* $f(x, y, z) = \dfrac{x + y + z}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$; *f)* $f(x, y, z) = \sqrt{xy} + \sqrt{z - 1}$.

2) Per ciascuno dei seguenti sottoindicati E di $\mathbb{R}^2$, si descrivano gli insiemi:

$$int\ E;\quad cl\ E;\quad \mathcal{F}E;\quad int\ (cl\ E);\quad cl\ (int\ E).$$

a) $E = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 \le 1,\ x \ne 0,\ y > 0\} \cup \{(0,y)^T: -1 < y < 0\}$.

b) $E = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 < 1,\ x > 0,\ y \ne 0\} \cup \{(t,t)^T: -1 < t < 0\}$.

c) $E = \{(x,y)^T: -1 \le x \le 1,\ x \ne 0,\ 0 < y < 1,\ x, y \in \mathbb{Q}\}$.

[$\mathfrak{R}$. *a)* $int\ E = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 < 1,\ x \ne 0,\ y > 0\}$;
$cl\ E = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\} \cup \{(0,y)^T: -1 \le y \le 0\}$;
$\mathcal{F}E = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 = 1,\ y \ge 0\} \cup \{(0,y)^T: -1 \le y \le 1\} \cup \{(x,0)^T: -1 \le x \le 1\}$;
$int\ (cl\ E) = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 < 1,\ y > 0\}$; $cl\ (int\ E) = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$.

b) $int\ E = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 < 1,\ x > 0,\ y \ne 0\}$;
$cl\ E = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0\} \cup \{(t,t)^T: -1 \le t \le 0\}$.
$\mathcal{F}E = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 = 1, x \ge 0\} \cup \{(t,t)^T: -1 \le t \le 0\} \cup \{(x,0)^T: 0 \le x \le 1\} \cup \{(0,y)^T: -1 \le y \le 1\}$.
$int\ (cl\ E) = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 < 1,\ x > 0\}$; $cl\ (int\ E) = \{(x,y)^T: x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0\}$.

c) $int\ E = \emptyset = cl\ (int\ E)$; $cl\ E = \mathcal{F}E = \{(x,y)^T: -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$;
$int\ (cl\ E) = \{(x,y)^T: -1 < x < 1, 0 < y < 1\}$.]

3) Si verifichino le seguenti affermazioni riguardanti limiti di funzioni di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$:

a) $\lim\limits_{\|\underline{x}\| \to \infty} (x^2 + 2y^2 - xy) = +\infty$; *b)* $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{0}} \dfrac{x \sin y}{(e^x - 1)y} = 1$; *c)* $\lim\limits_{\|\underline{x}\| \to \infty} \dfrac{x}{\|\underline{x}\|^2} = 0$; *d)* $\nexists \lim\limits_{\|\underline{x}\| \to \infty} \dfrac{x}{\|\underline{x}\|}$.

[$\mathfrak{R}$. *a)* Dalla formula del quadrato del binomio, si ottiene la disuguaglianza $|xy| \le \frac{x^2 + y^2}{2}$. È dunque: $f(x,y) \ge x^2 + 2y^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{x^2 + 3y^2}{2} \ge \frac{\|\underline{x}\|}{2}$.

b) $\left|\dfrac{x \sin y}{(e^x - 1)y} - 1\right| = \left|\dfrac{x \sin y}{(e^x - 1)y} - \dfrac{\sin y}{y} + \dfrac{\sin y}{y} - 1\right| \le \left|\dfrac{\sin y}{y}\right| \left|\dfrac{x}{e^x - 1} - 1\right| + \left|\dfrac{\sin y}{y} - 1\right|$.

Fissiamo un $\varepsilon > 0$ (con $\varepsilon < 1$). Esistono due numeri positivi δ' e δ'' tali che:

$$|x| < \delta' \Rightarrow \left|\frac{x}{e^x - 1} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2};\quad |y| < \delta'' \Rightarrow \left|\frac{\sin y}{y} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

È poi $\left|\dfrac{\sin y}{y}\right| < 1$ per ogni $y \ne 0$. A questo punto basta prendere $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

c) Si ha $|f(x,y)| = \frac{|x|}{\|\underline{x}\|^2} \le \frac{\|\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|^2} = \frac{1}{\|\underline{x}\|}$.

d) Per provare che la funzione $f(x,y) = \frac{x}{\|\underline{x}\|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ non ha limite per $\|\underline{x}\|$ che tende a infinito, basta mostrare che ci sono due restrizioni della f che hanno limiti diversi. Prima restrizione: $x = 0$; si ha $f(0,y) = 0$. Seconda restrizione: $y = x$, $x > 0$; si ha $f(x,x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.]

4) Si dimostri che l'applicazione $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da $\varphi(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$ soddisfa alle proprietà (1), (2), (3) e (4) del Teorema 19. I valori $\varphi(\underline{x})$ possono quindi essere assunti come una nuova *norma* in $\mathbb{R}^2$. Posto ancora $d(\underline{x}, \underline{y}) = \varphi(\underline{x} - \underline{y})$, si ottiene una nuova *distanza* in $\mathbb{R}^2$. Si descrivano le sfere che si ottengono con questa nuova distanza.

Lo stesso problema per l'applicazione $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da $\psi(x, y) = |x| + |y|$.

[$\Re$. *a*) Per la (4), si ha: $\varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \max\{|x_1 + x_2|, |y_1 + y_2|\} \le \max\{|x_1|,|y_1|\} + \max\{|x_2|,|y_2|\} = \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2)$. Le *sfere* sono dei *quadrati* con i lati paralleli agli assi.

b) Per la (4), si ha: $\psi(x_1 + x_2, y_1 + x_2) = |x_1 + x_2| + |y_1 + y_2| \le |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2| = \psi(x_1, y_1) + \psi(x_2, y_2)$. Le *sfere* sono dei *quadrati* con le diagonali parallele agli assi.]

5) Si dimostri che: *L'applicazione che a ogni sottoinsieme A di* $\mathbb{R}^n$ *associa la sua chiusura cl A gode delle seguenti proprietà:*

1) $cl\ \emptyset = \emptyset$; 2) $A \subset cl\ A$; 3) $A \subset B \Rightarrow cl\ A \subset cl\ B$;
4) $cl\ (A \cup B) = cl\ A \cup cl\ B$; 5) $cl\ (cl\ A) = cl\ A$.

[$\Re$**.** Le prime 3 affermazioni sono di facile verifica. Dalla (3) ai ottiene $cl\ A \subset cl\ (A \cup B)$ e $cl\ B \subset cl\ (A \cup B)$. Per provare la (4), basta mostrare che se è $\underline{x} \notin cl\ A \cup cl\ B$, allora è $\underline{x} \notin cl\ (A \cup B)$. Se è $\underline{x} \notin cl\ A \cup cl\ B$, esistono una sfera S' di centro $\underline{x}$ in cui non cadono punti di A e una sfera S'', sempre di centro $\underline{x}$, in cui non cadono punti di B. Dunque in $S' \cap S''$ non cadono punti né di A né di B e, quindi non vi cadono punti di $A \cup B$. Passiamo alla (5). Per la (2), è sufficiente provare che è $cl\ (cl\ A) \subset cl\ A$. Siano, dunque, $\underline{x} \in cl\ (cl\ A)$ e U un intorno di $\underline{x}$. Esiste una sfera aperta S di centro $\underline{x}$ contenuta in U. S è un intorno di $\underline{x}$ e perciò in S cade almeno un punto $\underline{y} \in cl\ A$. Per il Teorema 5, S è intorno anche di $\underline{y}$ e quindi in S cadono punti di A; e ciò vale, di conseguenza, anche per U. Dunque $\underline{x} \in cl\ A$.]

6) Si provi che: *L'applicazione che a ogni sottoinsieme A di* $\mathbb{R}^n$ *associa il suo interno int A gode delle seguenti proprietà:*

1) $int\ \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$; 2) $int\ A \subset A$; 3) $A \subset B \Rightarrow int\ A \subset int\ B$;
4) $int\ (A \cap B) = int\ A \cap int\ B$; 5) $int\ (int\ A) = int\ A$.

[$\Re$. Le prime 4 affermazioni sono di facile verifica. Occupiamoci della (5). Per la (2), basta provare che è $int\ A \subset int\ (int\ A)$. Sia dunque $\underline{x} \in int\ A$. Esiste pertanto una sfera S di centro $\underline{x}$ contenuta in A. Proviamo che è $S \subset int\ A$. Ma ciò è immediato, dato che tutti i punti di S sono interni a S (Teor. 5) e, quindi, ad A.]

7) Si dimostri che, se un'applicazione $\delta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, soddisfa alle proprietà (2), (3) e (4) del Teorema 1, allora soddisfa necessariamente anche alla (1).

[$\Re$. Quali che siano $\underline{x}$ e $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$, si ha:

$$0 = \delta(\underline{x}, \underline{x}) \le \delta(\underline{x}, \underline{y}) + \delta(\underline{y}, \underline{x}) = \delta(\underline{x}, \underline{y}) + \delta(\underline{x}, \underline{y}) = 2\delta(\underline{x}, \underline{y}).]$$