Analisi Matematica I

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda

Università di Trieste, CdL Fisica e Matematica, a.a. 2019/2020

I numeri naturali e il principio di induzione

Nel 1898 il matematico torinese Giuseppe Peano (1858–1932), nel suo articolo fondamentale *Arithmetices principia: nova methodo exposita* enunciò i seguenti assiomi per l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.

a) Esiste un elemento, chiamato "zero", indicato con 0.

b) Ogni elemento n ha un "successivo" n'.

c) 0 non è il successivo di alcun elmento.

d) Elementi diversi hanno successivi diversi.

e) (**Principio di induzione**) Se S è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ tale che

i) $0 \in S$,
ii) $n \in S \Rightarrow n' \in S$,

allora $S = \mathbb{N}$.

È sottinteso che la condizione *ii*) deve valere per $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi. Possiamo quindi leggerla in questo modo:

ii) se per un certo n si ha che $n \in S$, ne consegue che anche $n' \in S$.

Si introducono i simboli $0' = 1$, $1' = 2$, $2' = 3$, ecc.

Da questi pochi assiomi, facendo uso della teoria degli insiemi, Peano ha mostrato come si possono ricavare tutte le proprietà dei numeri naturali. In particolare, si possono definire le operazioni di addizione e di moltiplicazione, ricavando l'uguaglianza

$$n' = n + 1\,.$$

Inoltre, scrivendo $m \leq n$ qualora esista un $p \in \mathbb{N}$ tale che $m + p = n$, si ottiene una relazione d'ordine. Supporremo qui ben note tutte le proprietà delle operazioni di addizione, moltiplicazione e della relazione d'ordine definite su $\mathbb{N}$.

Il principio di induzione può essere usato per definire una successione di oggetti

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$$

Si procede in questo modo (**definizione per ricorrenza**):

j) si definisce A_0 ;
jj) supponendo di aver definito A_n per un certo n, si definisce A_{n+1} .

In tal modo, se indichiamo con S l'insieme degli n per cui A_n è definita, si ha che S verifica i) e ii). Quindi S coincide con $\mathbb{N}$, ossia tutti gli A_n sono definiti.

Ad esempio, possiamo definire le "potenze" a^n ponendo, per $a \neq 0$,
j) $a^0 = 1$,
jj) $a^{n+1} = a \cdot a^n$.

Si vede in questo modo che $a^1 = a \cdot a^0 = a \cdot 1 = a$, $\quad a^2 = a \cdot a^1 = a \cdot a$, e così via. Se $a = 0$, si pone $0^n = 0$ per ogni $n \geq 1$, mentre di solito resta non definito 0^0. (Da ora in poi supporremo ben note le proprietà elementari delle potenze.)

Inoltre, definiamo il "fattoriale" $n!$ ponendo
j) $0! = 1$,
jj) $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Definiamo infine la somma (o sommatoria) di $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ utilizzando il simbolo

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \,.$$

Si pone $\sum_{k=0}^{0} \alpha_k = 0$ e, una volta definito $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k$, per un certo n, il successivo è

$$\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k + \alpha_{n+1} \,.$$

Il principio di induzione può inoltre essere usato per dimostrare una successione di proposizioni

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \ \ldots$$

Si procede in questo modo (**dimostrazione per induzione**):
j) si verifica P_0 ;
jj) supponendo vera P_n per un certo n, si verifica P_{n+1} .

Se indichiamo con S l'insieme degli n per cui P_n è dimostrata, si ha che S verifica i) e ii). Quindi S coincide con $\mathbb{N}$, ossia tutte le P_n sono dimostrate.

Esempio 1. Dimostriamo la seguente uguaglianza: se $a \neq 1$,[1]

$$P_n : \qquad \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \,.$$

Vediamo P_0:

$$\sum_{k=0}^{0} a^k = \frac{a^1 - 1}{a - 1} \,;$$

[1]Si supporrà qui che sia $a^0 = 1$ anche qualora $a = 0$.

essa equivale all'identità $a^0 = 1$ e pertanto è vera. Supponiamo ora che P_n sia vera, per un certo $n \in \mathbb{N}$; allora

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} a^k &= \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1} \\ &= \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} \\ &= \frac{a^{n+2}-1}{a-1}\,,\end{aligned}$$

per cui anche P_{n+1} è vera. Abbiamo quindi dimostrato che P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

La formula dimostrata nell'Esempio 1 si può generalizzare nella seguente:[2]

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\Big(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\Big)\,.$$

La dimostrazione è analoga. In particolare, si ha:

$$\begin{aligned}&a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)\,,\\ &a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)\,,\\ &a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\,,\\ &a^5 - b^5 = (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)\,,\\ &\dots\end{aligned}$$

Esempio 2. Vogliamo dimostrare che, presi due numeri naturali a e n, si ha la seguente **disuguaglianza di Bernoulli**:

$$P_n: \qquad (1+a)^n \geq 1 + na\,.$$

Vediamo che vale P_0, essendo sicuramente $(1+a)^0 \geq 1 + 0 \cdot a$. Supponiamo ora vera P_n per un certo n e verifichiamo P_{n+1}:

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a\,,$$

per cui anche P_{n+1} è vera. Quindi, P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

In alcuni casi potrebbe essere comodo iniziare la successione delle proposizioni, ad esempio, da P_1 invece che da P_0, o da una qualsiasi altra di esse. Il principio di dimostrazione resta naturalmente lo stesso: se ne verifica la prima e si dimostra che da una qualsiasi di esse segue la successiva.

[2] Analogamente a quanto detto nella nota precedente, anche qui si supporrà che $a^0 = 1$, $b^0 = 1$ anche nei casi in cui risultino del tipo 0^0.

Altri esempi ed esercizi. Si possono dimostrare per induzione le seguenti formule:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}\,,$$
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,,$$
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\,.$$

Si noti l'uguaglianza

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2\,.$$

Definiamo ora, per ogni coppia di numeri naturali n,k tali che $k\le n$, i "coefficienti binomiali"

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

Verifichiamo che, per $1\le k\le n$, vale la formula

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}\,;$$

abbiamo infatti:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}&=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}\\&=\frac{n!k+n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!}\\&=\frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!}\\&=\frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!}\,.\end{aligned}$$

Dimostreremo ora che, per ogni $n\in\mathbb{N}$, vale la seguente **formula del binomio (di Newton)**:[3]

$$P_n:\qquad (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\,.$$

Iniziamo con il verificare che la formula vale per $n=0$:

$$(a+b)^0=\binom{0}{0}a^{0-0}b^0\,.$$

Per $n\ge 1$, procediamo per induzione. Vediamo che vale per $n=1$:

$$(a+b)^1=\binom{1}{0}a^{1-0}b^0+\binom{1}{1}a^{1-1}b^1\,.$$

[3] Anche in questa formula si supporrà che $a^0=1$, $b^0=1$ e $(a+b)^0=1$ anche nei casi in cui risultino del tipo 0^0.

Ora, supponendo vera P_n, per un certo $n \geq 1$, vediamo che vale anche P_{n+1} :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right) \\
&= a\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{(k-1)+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]a^{n-k+1}b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n-k+1}b^k + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato che P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Ricordiamo che risulta talvolta utile rappresentare i coefficienti binomiali nel cosiddetto "triangolo di Tartaglia (o di Pascal)"

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \cdots & & & & &
\end{array}$$

Come casi particolari della formula del binomio, abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}
&(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\,, \\
&(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\,, \\
&(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\,, \\
&(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\,, \\
&\ldots
\end{aligned}$$

I numeri reali

Non ci soffermeremo sulle ragioni di carattere algebrico che portano, a partire dall'insieme dei numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \,,$$

alla costruzione dell'insieme dei numeri interi relativi

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \,,$$

e dell'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\} \,.$$

Ci interessa però far notare che l'insieme dei numeri razionali non è sufficiente a trattare questioni geometriche elementari, quali ad esempio la misurazione della diagonale di un quadrato di lato 1.

Teorema. *Non esiste alcun numero razionale x tale che $x^2 = 2$.*

Dimostrazione. [4] Per assurdo, supponiamo che esistano $m, n \in \mathbb{N}$ non nulli tali che

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \,,$$

ossia $m^2 = 2n^2$. Allora m deve essere pari, per cui esiste un $m_1 \in \mathbb{N}$ non nullo tale che $m = 2m_1$. Ne segue che $4m_1^2 = 2n^2$, ossia $2m_1^2 = n^2$. Pertanto anche n deve essere pari, per cui esiste un $n_1 \in \mathbb{N}$ non nullo tale che $2n_1 = n$. Quindi

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1} \quad \text{e} \quad \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2 = 2 \,.$$

Possiamo ora ripetere lo stesso ragionamento quante volte vogliamo, continuando a dividere per 2 numeratore e denominatore:

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_3}{n_3} = \ldots = \frac{m_k}{n_k} = \ldots$$

dove m_k e n_k sono numeri naturali non nulli tali che $m = 2^k m_k$, $n = 2^k n_k$. Quindi, essendo $n_k \geq 1$, si ha che $n \geq 2^k$, per ogni numero naturale $k \geq 1$. In particolare, $n \geq 2^n$. Ma la disuguaglianza di Bernoulli ci dice che $2^n = (1+1)^n \geq 1 + n$, e ne consegue che $n \geq 1 + n$, il che è palesemente falso. ■

Si rende pertanto necessario estendere ulteriormente l'insieme dei numeri razionali.

È possibile costruire l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ a partire dai razionali. Essendo però tale costruzione piuttosto laboriosa, ci limiteremo qui ad enunciare le principali proprietà di $\mathbb{R}$.

[4] Dimostrazione vista durante il Precorso.

1) È definita una "relazione d'ordine" $\leq$ con le seguenti proprietà:
per ogni scelta di x, y, z in $\mathbb{R}$,

a) $x \leq x$,

b) $[x \leq y \text{ e } y \leq x] \Rightarrow x = y$,

c) $[x \leq y \text{ e } y \leq z] \Rightarrow x \leq z$;

inoltre, tale relazione d'ordine è "totale":

d) $x \leq y \text{ o } y \leq x$.

Se $x \leq y$, scriveremo anche $y \geq x$. Se $x \leq y$ e $y \neq x$, scriveremo $x < y$ oppure $y > x$.

2) È definita un'operazione di addizione $+$ con le seguenti proprietà:
per ogni scelta di x, y, z in $\mathbb{R}$,

a) (associativa) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

b) esiste un "elemento neutro" 0: si ha $x + 0 = x = 0 + x$;

c) ogni elemento x ha un "opposto" $-x$: si ha $x + (-x) = 0 = (-x) + x$;

d) (commutativa) $x + y = y + x$;

e) se $x \leq y$, allora $x + z \leq y + z$.

3) È definita un'operazione di moltiplicazione $\cdot$ con le seguenti proprietà:
per ogni scelta di x, y, z in $\mathbb{R}$,

a) (associativa) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;

b) esiste un "elemento neutro" 1: si ha $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$;

c) ogni elemento $x \neq 0$ ha un "reciproco" x^{-1}: si ha $x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$;

d) (commutativa) $x \cdot y = y \cdot x$;

e) se $x \leq y$ e $z \geq 0$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z$;

e una proprietà che coivolge entrambe le operazioni:

f) (distributiva) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$;

4) (**Proprietà di separazione**) Dati due sottoinsiemi non vuoti A, B tali che

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b \,,$$

esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq c \leq b \,.$$

Dalle proprietà elencate qui sopra si possono ricavare tutte le proprietà algebriche dei numeri reali, che supporremo già note.

Ritroviamo l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali come sottoinsieme di $\mathbb{R}$: 0 e 1 sono gli elementi neutri di addizione e moltiplicazione, dopodiché si ha $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$ e così via, per ricorrenza.

Nel seguito, ometteremo quasi sempre il $\cdot$ nella moltiplicazione. Scriveremo, come è noto, $z = y - x$ se $z + x = y$, e $z = \frac{y}{x}$ se $zx = y$, con $x \neq 0$. In particolare, $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Le potenze a^n si definiscono come nella Sezione 1 per ogni $a \in \mathbb{R}$ e, se $a \neq 1$, continua a valere la formula per la somma delle potenze ivi dimostrata (Esempio 1 e sua generalizzazione). La disuguaglianza di Bernoulli risulta valida per ogni $a > -1$ e la formula del binomio di Newton continua a valere se a, b sono numeri reali qualsiasi.

Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ si dice "limitato superiormente" se esiste un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in E$, si ha $x \leq \alpha$; un tale α è allora una "limitazione superiore" di E. Se in più si ha che $\alpha \in E$, si dirà che α è il "massimo" di E e si scriverà $\alpha = \max E$.

Analogamente, E si dice "limitato inferiormente" se esiste un $\beta \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in E$, si ha $x \geq \beta$; un tale β è allora una "limitazione inferiore" di E. Se in più si ha che $\beta \in E$, si dirà che β è il "minimo" di E e si scriverà $\beta = \min E$.

Diremo che E è "limitato" se è sia limitato superiormente che limitato inferiormente.

Teorema. *Se E è un sottoinisieme non vuoto di $\mathbb{R}$ limitato superiormente, l'insieme delle limitazioni superiori di E ha sempre un minimo.*

Dimostrazione. Sia B l'insieme delle limitazioni superiori di E. Allora

$$\forall a \in E \quad \forall b \in B \quad a \leq b\,,$$

e per la proprietà di separazione esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall a \in E \quad \forall b \in B \quad a \leq c \leq b\,.$$

Ciò significa che c è una limitazione superiore di E, e quindi $c \in B$, ed è anche una limitazione inferiore di B. Pertanto, $c = \min B$. ■

Se E è limitato superiormente, la minima limitazione superiore di E si chiama "estremo superiore" di E: è un numero reale $s \in \mathbb{R}$ e si scrive $s = \sup E$. Esso è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

i) $\forall x \in E \quad x \leq s\,,$
ii) $\forall s' < s \quad \exists x \in E : \quad x > s'\,.$

Se l'estremo superiore s appartiene ad E, si ha che $s = \max E$; succede spesso, però, che E, pur essendo limitato superiormente, non abbia un massimo. Talvolta le due proprietà si scrivono nella forma equivalente

i) $\forall x \in E \quad x \leq s\,,$
ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E : \quad x > s - \varepsilon\,.$

Nella seconda, si capisce che il numero $\varepsilon > 0$ può essere preso arbitrariamente piccolo.

Analogamente a quanto sopra, si può dimostrare il seguente

Teorema. *Se E è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ limitato inferiormente, l'insieme delle limitazioni inferiori di E ha sempre un massimo.*

Se E è limitato inferiormente, la massima limitazione inferiore di E si chiama "estremo inferiore" di E: è un numero reale $i \in \mathbb{R}$ e si scrive $i = \inf E$. Esso è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

j) $\forall x \in E \quad x \geq i\,,$
jj) $\forall i' > i \quad \exists x \in E : \quad x < i'\,.$

Se l'estremo inferiore i appartiene ad E, si ha che $i = \min E$; non è detto, però, che E, pur essendo limitato inferiormente, abbia un minimo. Le due proprietà si possono scrivere equivalentemente come

j) $\forall x \in E \quad x \geq i\,,$
jj) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E : \quad x < i + \varepsilon\,.$

Si noti che, definendo l'imsieme

$$E^- = \{x \in \mathbb{R} : -x \in E\}\,,$$

si ha che

$$E \text{ è limitato superiormente} \;\Leftrightarrow\; E^- \text{ è limitato inferiormente,}$$

e in tal caso si ha che

$$\sup E = -\inf E^-,$$

mentre

$$E \text{ è limitato inferiormente} \;\Leftrightarrow\; E^- \text{ è limitato superiormente,}$$

e in tal caso si ha che

$$\inf E = -\sup E^-.$$

Nel caso in cui E *non* sia limitato superiormente, useremo la scrittura

$$\sup E = +\infty\,.$$

Teorema. $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\mathbb{N}$ sia limitato superiormente, e sia $s = \sup \mathbb{N}$. Per le proprietà dell'estremo superiore, esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > s - \frac{1}{2}$. Ma allora $n + 1 \in \mathbb{N}$ e

$$n + 1 > s - \frac{1}{2} + 1 > s\,,$$

in contraddizione col fatto che s è una limitazione superiore per $\mathbb{N}$. ■

Nel caso in cui E *non* sia limitato inferiormente, useremo la scrittura

$$\inf E = -\infty\,.$$

Ad esempio, si ha che $\inf \mathbb{Z} = -\infty$.

Ci sarà utile, anche in seguito, la seguente proprietà dei numeri reali.

Lemma. *Se* $0 \leq \alpha < \beta$, *allora* $\alpha^2 < \beta^2$.

Dimostrazione. Se $0 \leq \alpha < \beta$, si ha $\alpha^2 = \alpha\alpha \leq \alpha\beta < \beta\beta = \beta^2$. ■

Dimostreremo ora che esiste un numero reale $c > 0$ tale che $c^2 = 2$.

Definiamo gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \quad \text{e} \quad x^2 < 2\}\,,$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \quad \text{e} \quad x^2 > 2\}\,.$$

Si può vedere che

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b\,;$$

(altrimenti avremmo $0 \leq b < a$, quindi, per il Lemma, $b^2 < a^2$, mentre è $a^2 < 2$ e $b^2 > 2$, impossibile). Usando la proprietà di separazione, esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq c \leq b\,.$$

Si noti che, essendo $1 \in A$, sicuramente $c \geq 1$. Vogliamo ora mostrare che si ha proprio $c^2 = 2$.

Per assurdo, se $c^2 > 2$, allora, per $n \geq 1$,

$$\left(c - \frac{1}{n}\right)^2 = c^2 - \frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} \geq c^2 - \frac{2c}{n}\,;$$

quindi, se $n > 2c/(c^2 - 2)$, si può verificare che $c - \frac{1}{n} > 0$ e $(c - \frac{1}{n})^2 > 2$, e pertanto $c - \frac{1}{n} \in B$. Ma allora deve essere $c \leq c - \frac{1}{n}$, il che è impossibile.

Supponiamo ora, sempre per assurdo, che $c^2 < 2$. Allora, se $n \geq 1$,

$$\left(c + \frac{1}{n}\right)^2 = c^2 + \frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} \leq c^2 + \frac{2c}{n} + \frac{1}{n} = c^2 + \frac{2c+1}{n}\,;$$

quindi, se $n > (2c+1)/(2 - c^2)$, si ha che $(c + \frac{1}{n})^2 < 2$, e pertanto $c + \frac{1}{n} \in A$. Ma allora deve essere $c + \frac{1}{n} \leq c$, il che è impossibile.

Non potendo essere né $c^2 > 2$ né $c^2 < 2$, deve quindi essere $c^2 = 2$.

Il Lemma ci assicura inoltre che non ci possono essere altre soluzioni positive dell'equazione

$$x^2 = 2\,,$$

la quale pertanto ha esattamente due soluzioni, c e $-c$.

Lo stesso tipo di procedimento può essere usato per dimostrare che, qualunque sia il numero reale positivo r, esiste un unico numero reale positivo c tale che $c^2 = r$. Questo si chiama "radice quadrata" di r e si scrive $c = \sqrt{r}$. Si noti che l'equazione $x^2 = r$ ha due soluzioni: $x = \sqrt{r}$ e $x = -\sqrt{r}$. Si pone inoltre $\sqrt{0} = 0$, mentre la radice quadrata di un numero negativo resta non definita.

Studieremo ora la "densità" degli insiemi $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Teorema. *Dati due numeri reali α, β, con $\alpha < \beta$, esiste un numero razionale tra essi compreso.*

Dimostrazione. Consideriamo tre casi distinti.

Primo caso: $0 \leq \alpha < \beta$. Scegliamo $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > \frac{1}{\beta - \alpha}\,,$$

e sia $m \in \mathbb{N}$ il più grande numero naturale tale che

$$m < n\beta\,.$$

Quindi $\frac{m}{n} < \beta$, e resta da vedere che $\frac{m}{n} > \alpha$. Per assurdo, sia $\frac{m}{n} \leq \alpha$; allora

$$\frac{m+1}{n} \leq \alpha + \frac{1}{n} < \alpha + (\beta - \alpha) = \beta\,,$$

ossia $m + 1 < n\beta$, in contraddizione col fatto che m è il più grande numero naturale minore di $n\beta$.

Secondo caso: $\alpha < 0 < \beta$. Basta scegliere il numero 0, che è razionale.

Terzo caso: $\alpha < \beta \leq 0$. Ci si può ricondurre al primo caso cambiando i segni: $0 \leq -\beta < -\alpha$, per cui esiste un razionale $\frac{m}{n}$ tale che $-\beta < \frac{m}{n} < -\alpha$. Allora $\alpha < -\frac{m}{n} < \beta$. ∎

Teorema. *Dati due numeri reali α, β, con $\alpha < \beta$, esiste un numero irrazionale tra essi compreso.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente, esiste un numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che

$$\alpha + \sqrt{2} < \frac{m}{n} < \beta + \sqrt{2}\,.$$

Ne segue che

$$\alpha < \frac{m}{n} - \sqrt{2} < \beta\,,$$

con $\frac{m}{n} - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. ∎

Scopriremo ora una sostanziale differenza tra gli insiemi $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Consideriamo la seguente successione di numeri razionali non negativi:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & \dots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{1}{3} & \frac{2}{2} & \frac{3}{1} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} & \frac{1}{5} & \frac{2}{4} & \frac{3}{3} & \frac{4}{2} & \frac{5}{1} & \dots
\end{array}$$

Come si vede, essa è costruita elencando i numeri razionali in cui la somma tra numeratore e denominatore è 1, poi 2, poi 3 e così via. Essa è sicuramente suriettiva, in quanto tutti i numeri razionali non negativi compaiono prima o poi nella lista. Possiamo ora modificarla per trovarne una biiettiva, eliminando i numeri che compaiono già in precedenza:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & \dots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{1}{3} & \frac{3}{1} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} & \frac{1}{5} & \frac{5}{1} & \frac{1}{6} & \frac{2}{5} & \frac{3}{4} & \frac{4}{3} & \frac{5}{2} & \frac{6}{1} & \dots
\end{array}
$$

A questo punto, è facile modificarla ancora per ottenere tutti i numeri razionali:

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & \dots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & -\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{1} & -\frac{2}{1} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{3}{1} & -\frac{3}{1} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \dots
\end{array}
$$

In questo modo, abbiamo costruito una funzione $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ biiettiva. Diremo quindi che $\mathbb{Q}$ è un insieme "numerabile".

Vediamo ora che $\mathbb{R}$ non è un insieme numerabile, ossia che non esiste una funzione $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ biiettiva. Infatti, se per assurdo esistesse una tale funzione, potrei elencare i numeri reali in una successione e, scrivendoli in forma decimale, avrei

$$
\begin{array}{l}
0 \to \alpha_0 = \alpha_{0,0}\,,\alpha_{0,1}\alpha_{0,2}\alpha_{0,3}\alpha_{0,4}\dots \\
1 \to \alpha_1 = \alpha_{1,0}\,,\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\dots \\
2 \to \alpha_2 = \alpha_{2,0}\,,\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\dots \\
3 \to \alpha_3 = \alpha_{3,0}\,,\alpha_{3,1}\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4}\dots \\
4 \to \alpha_4 = \alpha_{4,0}\,,\alpha_{4,1}\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}\dots \\
\dots
\end{array}
$$

(qui tutti gli $\alpha_{i,j}$ sono numeri naturali e, se $j \geq 1$, sono cifre comprese tra 0 e 9). Posso ora costruire un numero reale diverso da tutti gli α_i della lista. Basta prendere gli elementi della diagonale $\alpha_{0,0}$, $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{4,4}$, ... e modificarli uno a uno: scelgo un numero naturale β_0, tra 1 e 9, diverso da $\alpha_{0,0}$, poi un β_1, tra 1 e 9, diverso da $\alpha_{1,1}$, poi ancora un β_2, sempre tra 1 e 9, diverso da $\alpha_{2,2}$, e così via, con l'accortezza di non prenderli tutti uguali a 9, da un certo punto in poi. A questo punto, il numero reale β avente forma decimale

$$\beta = \beta_0\,,\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\dots$$

non può essere uguale ad alcuno dei numeri α_i. La funzione φ non può pertanto essere suriettiva.

Avendo visto che $\mathbb{Q}$ è numerabile e che $\mathbb{R}$ non lo è, possiamo dedurne che nemmeno $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ può essere numerabile.

Chiamiamo "intervallo" un sottoinsieme non vuoto I di $\mathbb{R}$ con la seguente proprietà: comunque presi due suoi elementi α, β, l'insieme I contiene anche tutti i numeri tra essi compresi.

Si può dimostrare che gli intervalli sono di uno dei seguenti tipi, con le rispettive notazioni:

$$
\begin{aligned}
&[a,b] = \{x : a \le x \le b\}\,,\\
&]a,b[= \{x : a < x < b\}\,,\\
&[a,b[= \{x : a \le x < b\}\,,\\
&]a,b] = \{x : a < x \le b\}\,,\\
&[a,+\infty[= \{x : x \ge a\}\,,\\
&]a,+\infty[= \{x : x > a\}\,,\\
&]-\infty,b] = \{x : x \le b\}\,,\\
&]-\infty,b[= \{x : x < b\}\,,\\
&\mathbb{R}\,,\quad \text{talvolta denotato con } \;]-\infty,+\infty[\,.
\end{aligned}
$$

I primi quattro sono limitati (sia superiormente che inferiormente), gli altri no. Nella lista si possono anche includere gli insiemi costituiti da un unico punto, cioè del tipo $[a,a]$. In tal caso, si tratta di un intervallo degenere. Gli intervalli del tipo $[a,b]$ si dicono "chiusi e limitati", quelli del tipo $]a,b[$ "aperti e limitati".

Teorema (di Cantor). *Consideriamo una successione di intervalli chiusi e limitati $I_n = [a_n, b_n]$, con $a_n \le b_n$, tali che*

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$$

Allora esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ che appartiene a tutti gli I_n.

Dimostrazione. Definiamo gli insiemi

$$
\begin{aligned}
A &= \{a_n : n \in \mathbb{N}\}\,,\\
B &= \{b_n : n \in \mathbb{N}\}\,.
\end{aligned}
$$

Preso un elemento a_n di A e un elemento b_m di B (non necessariamente con lo stesso indice), vediamo che $a_n \le b_m$. Infatti, se $n \le m$, allora $I_n \supseteq I_m$, per cui $a_n \le a_m \le b_m \le b_n$. Se invece $n \ge m$, si ha $I_m \supseteq I_n$, per cui $a_m \le a_n \le b_n \le b_m$. In ogni caso, $a_n \le b_m$. Possiamo quindi usare la proprietà di separazione, e troviamo un $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \le c \le b\,.$$

In particolare, $a_n \le c \le b_n$, cioè $c \in I_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. ■

I numeri complessi

Consideriamo l'insieme

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) : a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R}\}\,,$$

che spesso si indica con $\mathbb{R}^2$. Definiamo un'operazione di "addizione":

$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')\,.$$

Si verificano le seguenti proprietà:

a) (associativa) $(a,b)+((a',b')+(a'',b''))=((a,b)+(a',b'))+(a'',b'')$;
b) esiste un "elemento neutro" $(0,0)$: si ha $(a,b)+(0,0)=(a,b)$;
c) ogni elemento (a,b) ha un "opposto" $-(a,b)=(-a,-b)$: si ha

$$(a,b)+(-a,-b)=(0,0)\,;$$

d) (commutativa) $(a,b)+(a',b')=(a',b')+(a,b)$;

Definiamo un'operazione di "moltiplicazione":

$$(a,b)\cdot(a',b')=(aa'-bb',ab'+ba')\,.$$

Si può verificare che valgono le seguenti proprietà:

a) (associativa) $(a,b)\cdot((a',b')\cdot(a'',b''))=((a,b)\cdot(a',b'))\cdot(a'',b'')$;
b) esiste un "elemento neutro" $(1,0)$: si ha $(a,b)\cdot(1,0)=(a,b)$;
c) ogni elemento $(a,b)\neq(0,0)$ ha un "reciproco" $(a,b)^{-1}=(\frac{a}{a^2+b^2}\,,\frac{-b}{a^2+b^2})$: si ha

$$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}\,,\,\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)\,;$$

d) (commutativa) $(a,b)\cdot(a',b')=(a',b')\cdot(a,b)$;
e) (distributiva) $(a,b)\cdot((a',b')+(a'',b''))=((a,b)\cdot(a',b'))+((a,b)\cdot(a'',b''))$.

(Nel seguito, ometteremo spesso di scrivere il " $\cdot$ "). In questo modo, $(\mathbb{R}^2,+,\cdot\,)$ risulta essere un campo, che verrà indicato con $\mathbb{C}$ e si dirà il "campo complesso". I suoi elementi si chiameranno "numeri complessi".

Si può pensare $\mathbb{C}$ come un'estensione di $\mathbb{R}$ in questo modo: si identificano tutti gli elementi della forma $(a,0)$ con il corrispondente numero reale a. Le operazioni di somma e moltiplicazione indotte su $\mathbb{R}$ sono effettivamente quelle preesistenti:

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0)\,,$$
$$(a,0)\cdot(b,0)=(ab,0)\,.$$

Notiamo che vale la seguente uguaglianza:

$$(a,b)=(a,0)+(0,1)(b,0)\,.$$

È allora conveniente introdurre un nuovo simbolo per indicare l'elemento $(0,1)$. Scriveremo

$$(0,1)=i\,.$$

In questo modo, avendo identificato $(a,0)$ con a e $(b,0)$ con b, possiamo scrivere

$$(a,b)=a+ib\,.$$

Posto $z=a+ib$, il numero a si dice "parte reale" di z e si scrive $a=Re(z)$. Il numero b si dice "parte immaginaria" di z e si scrive $b=Im(z)$.

Osserviamo ora che si ha

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1\,.$$

Usando questa semplice informazione, possiamo verificare che valgono le usuali proprietà simboliche formali: ad esempio,

$$(a+ib)+(a'+ib') = (a+a')+i(b+b')\,.$$

$$(a+ib)(a'+ib') = (aa'-bb')+i(ab'+ba')\,.$$

Sia $z = a+ib$ un numero complesso fissato. Cerchiamo le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$u^2 = z\,.$$

Queste vengono talvolta dette "radici quadrate" del numero complesso z (attenzione però a non confonderle con la radice quadrata di un numero reale non negativo). Se $b = 0$, ho

$$u = \begin{cases} \pm\sqrt{a} & \text{se } a \geq 0\,, \\ \pm i\sqrt{-a} & \text{se } a < 0\,. \end{cases}$$

Se invece $b \neq 0$, scriviamo $u = x+iy$. Allora

$$x^2 - y^2 = a\,, \qquad 2xy = b\,.$$

Essendo $b \neq 0$, si ha $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Posso quindi scrivere $y = \frac{b}{2x}$, e ottengo

$$x^4 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0\,,$$

da cui

$$x^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\,.$$

Determinati così x e y, abbiamo due soluzioni della nostra equazione:

$$u = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\frac{b}{\sqrt{2\,(a+\sqrt{a^2+b^2}\,)}}\right]\,.$$

Possiamo ora considerare un'equazione del secondo grado

$$Au^2 + Bu + C = 0\,,$$

dove A, B, C sono numeri complessi fissati, con $A \neq 0$. Come facilmente si vede, l'equazione è equivalente a

$$\left(u + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2-4AC}{(2A)^2}\,.$$

Ponendo $v = u + \frac{B}{2A}$ e $z = \frac{B^2-4AC}{(2A)^2}$, ci si riconduce al problema delle radici quadrate che abbiamo già risolto.

Per concludere, consideriamo l'equazione polinomiale più generale

$$A_n u^n + A_{n-1} u^{n-1} + ... + A_1 u + A_0 = 0\,,$$

dove $A_0, A_1, ..., A_n$ sono numeri complessi fissati, con $A_n \neq 0$. In altri termini, vogliamo trovare le radici di un polinomio a coefficienti complessi. Il seguente teorema, che enunciamo senza dimostrazione, è noto come **teorema fondamentale dell'algebra**.

Teorema. *Ogni equazione polinomiale ha, nel campo complesso, almeno una soluzione.*

Il problema di trovare una formula generale che fornisca le soluzioni è però tutt'altro che facile. Lo abbiamo affrontato nel caso $n = 2$ e si può risolvere anche se $n = 3$ o 4. Se $n \geq 5$, però, è stato dimostrato che non esiste alcuna formula algebrica generale che fornisca una radice del polinomio.

Introduciamo ora alcune nozioni associate ai numeri complessi. Se $z = a + ib$, si definisce il "modulo" di z:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,,$$

Si noti che, se $z = a \in \mathbb{R}$, ritroviamo il "valore assoluto"

$$|a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0\,, \\ -a & \text{se } a < 0\,. \end{cases}$$

Dati due numeri complessi z_1 e z_2, verifichiamo che

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|\,.$$

Infatti, se $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$, si ha

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2 \\ &= a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + 2a_1 b_2 b_1 a_2 + b_1^2 a_2^2 \\ &= a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 \\ &= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \\ &= |z_1|^2 |z_2|^2\,. \end{aligned}$$

In particolare, sei due numeri coincidono, si ha

$$|z^2| = |z|^2\,.$$

Ne segue per induzione che, per $n \in \mathbb{N}$,

$$|z^n| = |z|^n\,.$$

Inoltre, se $z \neq 0$, essendo $|z^{-1} z| = 1$, si ha

$$|z^{-1}| = |z|^{-1}\,.$$

Ecco allora che, preso un intero positivo n,

$$|z^{-n}| = |(z^{-1})^n| = |z^{-1}|^n = (|z|^{-1})^n = |z|^{-n}.$$

Pertanto, l'uguaglianza $|z^n| = |z|^n$ vale per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Dato un numero complesso $z = a + ib$, si introduce il numero $z^* = a - ib$, detto il "complesso coniugato" di z. Valgono le seguenti proprietà:

$$
\begin{gathered}
(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \,; \\
(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^* \,; \\
z^{**} = z \,; \\
|z^*| = |z| \,; \\
z z^* = |z|^2 \,; \\
Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*) \,, \qquad Im(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*) \,;
\end{gathered}
$$

$$
|Re(z)| \leq |z| \,, \qquad |Im(z)| \leq |z| \,.
$$

Se $z \neq 0$, è

$$
z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2} \,.
$$

Dimostriamo ora che vale la seguente "disuguaglianza triangolare":

$$
|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \,.
$$

Infatti, si ha che

$$
\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)^* \\
&= (z_1 + z_2)(z_1^* + z_2^*) \\
&= z_1 z_1^* + z_1 z_2^* + z_2 z_1^* + z_2 z_2^* \\
&= |z_1|^2 + z_1 z_2^* + (z_1 z_2^*)^* + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + 2Re(z_1 z_2^*) + |z_2|^2 \\
&\leq |z_1|^2 + 2|z_1 z_2^*| + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + 2|z_1|\,|z_2^*| + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + 2|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2,
\end{aligned}
$$

e la disuguaglianza cercata segue dal Lemma di pagina 9.

Sarà utile introdurre la *forma trigonometrica* di un numero complesso $z = a + ib$. Si tratta essenzialmente di scrivere il punto (a, b) in coordinate polari:

$$
(a, b) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \,.
$$

Qui $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ è il *modulo* di z, mentre l'angolo θ è l'*argomento* di z, determinato a meno di un multiplo intero di 2π. (Si osservi però che, se $z = 0$, l'argomento non è univocamente definito.) Scriveremo quindi

$$
z = \rho(\cos\theta, \sin\theta) \,, \quad \text{oppure} \quad z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) \,.
$$

Notiamo che, se scriviamo due numeri complessi come

$$z_1 = (\rho_1 \cos\theta_1, \rho_1 \sin\theta_1)\,, \qquad z_2 = (\rho_2 \cos\theta_2, \rho_2 \sin\theta_2)\,,$$

allora il loro prodotto si ottiene come

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\rho_1\rho_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2\,, \cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2) \\ &= (\rho_1\rho_2 \cos(\theta_1+\theta_2), \rho_1\rho_2 \sin(\theta_1+\theta_2)). \end{aligned}$$

Vediamo quindi che il modulo di $z_1 z_2$ è il prodotto dei due moduli (cosa che sapevamo già), mentre il suo argomento è la somma dei due argomenti.

In particolare, se $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$, allora

$$z^2 = \rho^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))\,,$$

e si può dimostrare per induzione che

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))\,, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}\,.$$

In particolare, vale la *Formula di De Moivre*:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\,, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}\,.$$

Ora affrontiamo il seguente problema: dato un numero complesso z, trovare le soluzioni u dell'equazione

$$u^n = z\,.$$

(Qui $n \geq 2$ è un numero naturale.) Se $z = 0$, l'unica soluzione è $u = 0$, in quanto $|u|^n = |u^n| = |z| = 0$, per cui $|u| = 0$. Supponiamo ora $z \neq 0$ e scriviamo u e z in forma trigonometrica:

$$u = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,, \quad z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\,,$$

per cui l'equazione diventa

$$r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\,,$$

ossia, facendo uso della formula di De Moivre,

$$r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\,.$$

Uguagliando i moduli e gli argomenti, otteniamo

$$r^n = \rho\,, \quad n\varphi - \theta \in \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Pertanto, otteniamo n soluzioni distinte, con

$$r = \sqrt[n]{\rho}\,, \quad \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\,,\ k = 0, 1, \ldots, n-1\,,$$

per cui

$$u = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right)\,,\ k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

$\mathbb{R}$ come spazio metrico

Definiamo la distanza euclidea tra due numeri reali α e β come

$$d(\alpha, \beta) = |\beta - \alpha|\,.$$

Valgono le seguenti proprietà:

a) $d(\alpha, \beta) \geq 0\,;$
b) $d(\alpha, \beta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta\,;$
c) $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)\,;$
d) $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta)\,.$

Quest'ultima viene spesso chiamata "disuguaglianza triangolare"; la dimostriamo:

$$|\beta - \alpha| = |(\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha)| \leq |\beta - \gamma| + |\gamma - \alpha|$$

Dati $x_0 \in \mathbb{R}$ e un numero $\rho > 0$, chiameremo "intorno centrato" in x_0 un insieme del tipo

$$I(x_0, \rho) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < \rho\}\,,$$

dove ρ è un numero positivo, ossia $\rho > 0$.

Un insieme $U \subseteq \mathbb{R}$ si dice "intorno" di un punto x_0 se esiste un $\rho > 0$ tale che $I(x_0, \rho) \subseteq U$; in tal caso, il punto x_0 si dice "interno" ad U. L'insieme dei punti interni ad U si chiama "l'interno" di U e si denota con $\mathring{U}$. Chiaramente, si ha sempre $\mathring{U} \subseteq U$. Si dice che U è un "insieme aperto" se coincide con il suo interno, ossia se $\mathring{U} = U$. Vediamo alcuni esempi.

1. Se $U = [a, b[\,$, si può dimostrare che $\mathring{U} =]a, b[$.

2. Un intervallo del tipo $]a, b[$ è un insieme aperto. In particolare, ogni intorno centrato lo è. Sono aperti anche gli intervalli del tipo $]a, +\infty[\,$, oppure $]-\infty, b[\,$.

3. $\emptyset$ è un insieme aperto, in quanto $\mathring{\emptyset}$, essendo contenuto in $\emptyset$, non può che essere vuoto: $\mathring{\emptyset} = \emptyset$.

4. $\mathbb{R}$ è un insieme aperto. Infatti, ogni punto di $\mathbb{R}$ è interno all'insieme $\mathbb{R}$ stesso, in quanto ogni intorno centrato è per definizione contenuto in $\mathbb{R}$. Quindi, l'interno di $\mathbb{R}$ coincide con tutto $\mathbb{R}$, ossia $\mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

5. Se $U = \mathbb{Q}$, allora $\mathring{U} = \emptyset$. È una conseguenza della "densità" di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

Teorema. *L'interno di un insieme è un insieme aperto.*

Dimostrazione. Se $\mathring{U}$ è vuoto, la tesi è sicuramente vera. Supponiamo allora che $\mathring{U}$ sia non vuoto. Sia $x_1 \in \mathring{U}$. Allora esiste un $\rho > 0$ tale che $I(x_1, \rho) \subseteq U$. Vogliamo vedere che $I(x_1, \rho) \subseteq \mathring{U}$. Preso $x \in I(x_1, \rho)$, essendo $I(x_1, \rho)$ un insieme aperto, esso è un intorno di x; siccome U contiene $I(x_1, \rho)$, anche U è un intorno di x, per cui $x \in \mathring{U}$. Ciò dimostra che $I(x_1, \rho) \subseteq \mathring{U}$ e pertanto ogni punto x_1 di $\mathring{U}$ è interno a $\mathring{U}$. ■

Si può dimostrare la seguente implicazione:

$$U_1 \subseteq U_2 \quad \Rightarrow \quad \overset{\circ}{U_1} \subseteq \overset{\circ}{U_2}\,.$$

Da essa segue che $\overset{\circ}{U}$ è il più grande insieme aperto contenuto in U: se A è un aperto e $A \subseteq U$, allora $A \subseteq \overset{\circ}{U}$.

Si può dimostrare che l'unione e l'intersezione di due insiemi aperti sono insiemi aperti. Lo stesso vale per un numero finito di insiemi aperti: lo si dimostra per induzione. Se invece si considera un numero infinito di insiemi, la cosa cambia. L'unione di un numero infinito di insiemi aperti è un insieme aperto, l'intersezione in generale non lo è. Ad esempio, prendendo gli aperti

$$A_n = \left] -\frac{1}{n+1}\,,\, \frac{1}{n+1} \right[\,,$$

con $n \in \mathbb{N}$, la loro intersezione è $\{0\}$, che non è un aperto.

Introduciamo ora un altra serie di definizioni.

Diremo che il punto x_0 è "aderente" all'insieme U se per ogni $\rho > 0$ si ha che $I(x_0, \rho) \cap U \neq \emptyset$. L'insieme dei punti aderenti ad U si chiama "la chiusura" di U e si denota con $\overline{U}$. Chiaramente, si ha sempre $U \subseteq \overline{U}$. Si dice che U è un "insieme chiuso" se coincide con la sua chiusura, ossia se $U = \overline{U}$. Vediamo alcuni esempi.

1. Se $U = [a, b[$, si può dimostrare che $\overline{U} = [a, b]$.

2. Un intervallo del tipo $[a, b]$ è un insieme chiuso. Lo stesso vale per gli intervalli del tipo $[a, +\infty[$, oppure $]-\infty, b]$.

3. $\mathbb{R}$ è un insieme chiuso, in quanto $\overline{\mathbb{R}}$ deve essere contenuto in $\mathbb{R}$, il nostro *insieme universo*, per cui $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

4. Anche $\emptyset$ è un insieme chiuso. Vediamo infatti che non può avere punti aderenti: se un certo x_0 fosse un punto aderente, per ogni $\rho > 0$ dovrebbe essere $I(x_0, \rho) \cap \emptyset \neq \emptyset$, il che è sicuramente falso. Quindi, l'insieme dei punti aderenti è vuoto, ossia $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

5. Se $U = \mathbb{Q}$, allora $\overline{U} = \mathbb{R}$. È una conseguenza della "densità" di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

6. L'insieme $U = \{x_0\}$, costituito da un unico punto, è sempre un insieme chiuso. Infatti, preso un $x_1 \notin U$, scegliendo $\rho > 0$ tale che $\rho < d(x_0, x_1)$ si ha che $I(x_1, \rho) \cap U = \emptyset$, per cui x_1 non è aderente ad U.

Teorema. *La chiusura di un insieme è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Se $\overline{U} = \mathbb{R}$, la tesi è verificata. Supponiamo quindi che sia $\overline{U} \neq \mathbb{R}$. Sia $x_1 \notin \overline{U}$. Allora esiste un $\rho > 0$ tale che $I(x_1, \rho) \cap U = \emptyset$. Vediamo che anche $I(x_1, \rho) \cap \overline{U} = \emptyset$. (con lo stesso $\rho > 0$). Infatti, se per assurdo ci fosse un $x \in I(x_1, \rho) \cap \overline{U}$, essendo $I(x_1, \rho)$ un insieme aperto, esisterebbe un $r > 0$ tale che $I(x, r) \subseteq I(x_1, \rho)$. Siccome $x \in \overline{U}$, dovrebbe essere $I(x, r) \cap U \neq \emptyset$ e quindi anche $I(x_1, \rho) \cap U \neq \emptyset$, in contraddizione con quanto sopra. Quindi, nessun punto x_1 al di fuori di $\overline{U}$ può essere aderente a $\overline{U}$. In altri termini, $\overline{U}$ contiene tutti i punti ad esso aderenti. ∎

Si può dimostrare la seguente implicazione:

$$U_1 \subseteq U_2 \quad \Rightarrow \quad \overline{U}_1 \subseteq \overline{U}_2 \,.$$

Da questa segue che $\overline{U}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene U: se C è un chiuso e $C \supseteq U$, allora $C \supseteq \overline{U}$.

Si può dimostrare che l'unione e l'intersezione di due insiemi chiusi sono insiemi chiusi, e lo stesso vale per un numero finito di insiemi chiusi. Se invece si considera un numero infinito di insiemi chiusi, la loro intersezione è un insieme chiuso, mentre la loro unione in generale non lo è. Ad esempio, prendendo i chiusi

$$C_n = \left[0,\, 1 - \frac{1}{n+1}\right] ,$$

con $n \in \mathbb{N}$, la loro unione è $[0,1[$, che non è un chiuso.

Cercheremo ora di capire le analogie incontrate tra le nozioni di interno e chiusura di un insieme, e quelle di insieme aperto e chiuso.

Teorema. *Valgono le seguenti relazioni:* [5]

$$\overline{\mathcal{C}U} = \mathcal{C}\mathring{U} \,, \qquad (\mathcal{C}\mathring{U}) = \mathcal{C}\overline{U} \,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Vediamo la prima uguaglianza. Se $U = \mathbb{R}$, allora $\mathcal{C}U = \emptyset$, per cui $\overline{\mathcal{C}U} = \emptyset$; d'altra parte, $\mathring{U} = \mathbb{R}$, per cui $\mathcal{C}\mathring{U} = \emptyset$. L'uguaglianza è così verificata in questo caso. Supponiamo ora che sia $U \neq \mathbb{R}$, per cui $\mathcal{C}U \neq \emptyset$. Si ha:

$$\begin{aligned} x \in \overline{\mathcal{C}U} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \rho > 0 \quad I(x,\rho) \cap \mathcal{C}U \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \rho > 0 \quad I(x,\rho) \not\subseteq U \\ &\Leftrightarrow \quad x \notin \mathring{U} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{C}\mathring{U}. \end{aligned}$$

Questo dimostra la prima uguaglianza. Possiamo ora usarla per dedurne la seguente:

$$\mathcal{C}(\mathcal{C}\mathring{U}) = \overline{\mathcal{C}(\mathcal{C}U)} = \overline{U} \,.$$

Passando ai complementari, si ottiene la seconda uguaglianza. ■

Abbiamo quindi che

$$\overline{U} = \mathcal{C}(\mathcal{C}\overline{U}) = \mathcal{C}(\mathcal{C}\mathring{U}), \quad \mathring{U} = \mathcal{C}(\mathcal{C}\mathring{U}) = \mathcal{C}(\overline{\mathcal{C}U}) \,.$$

Come immediato corollario, abbiamo il seguente.

Teorema. *Un insieme è aperto [chiuso] se e solo se il suo complementare è chiuso [aperto].*

[5] Denotiamo con $\mathcal{C}U$ il complementare di U in $\mathbb{R}$, ossia l'insieme $\mathbb{R} \setminus U$.

Si definisce la "frontiera" di un insieme U come differenza tra la sua chiusura e il suo interno:

$$\partial U = \overline{U} \setminus \mathring{U}\,.$$

Ad esempio, se U è uno degli intervalli $]a,b[\,,\ ]a,b],\ [a,b[\,,$ o $[a,b]$, allora la frontiera di U è costituita da solo due punti: $\partial U = \{a,b\}$. Si noti invece che

$$\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathring{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}\,.$$

Introduciamo un'ulteriore importante definizione. Diremo che il punto x_0 è "di accumulazione" per l'insieme U se per ogni $\rho > 0$ si ha che $I(x_0,\rho)$ contiene infiniti elementi di U. Enunciamo il "primo teorema di Bolzano–Weierstrass".

Teorema. *Sia U un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$. Se U ha infiniti elementi, allora esiste almeno un punto di accumulazione per U.*

<u>Dimostrazione</u>. Sia $I_0 = [a,b]$ un intervallo che contiene U. Consideriamo il punto medio $\frac{a+b}{2}$ di I_0. Chiamiamo I_1 uno dei due intervalli $[a, \frac{a+b}{2}]$ e $[\frac{a+b}{2}, b]$ che contenga infiniti punti di U. Consideriamo ora il punto medio di I_1, procediamo in modo analogo per definire I_2, e così via, per ricorrenza. Abbiamo così una successione di intervalli $I_n = [a_n, b_n]$ tali che

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$$

e, per ogni n, l'intervallo I_n contiene infiniti punti di U. Per il teorema di Cantor, esiste un $c \in \mathbb{R}$ appartenente a tutti gli intervalli. Dimostriamo che c è di accumulazione per U. Fissiamo un $\rho > 0$. Siccome $b_n - c \leq b_n - a_n$ e, per $n \geq 1$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n}$, prendendo $n > \frac{b-a}{\rho}$ si ha che $b_n \in [c, c+\rho[\,$. Analogamente si vede che $a_n \in\,]c-\rho, c]$, per cui $I_n = [a_n, b_n] \subseteq\,]c-\rho, c+\rho[\,$. Ne segue che ci sono infiniti punti di U in $]c-\rho, c+\rho[\,$. ■

Limiti e continuità

Chiameremo "spazio metrico" un insieme E su cui sia definita una "distanza", ossia una funzione che a ogni coppia x, x' di elementi di E associ un numero reale $d(x,x')$, con le seguenti proprietà:

a) $d(x,x') \geq 0\,;$
b) $d(x,x') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x'\,;$
c) $d(x,x') = d(x',x)\,;$
d) $d(x,x'') \leq d(x,x') + d(x',x'')\,.$

Ci proponiamo di introdurre i concetti di "limite" e di "continuità" in un contesto del tutto astratto, per funzioni tra spazi metrici. Questi concetti verranno poi particolarizzati nell'ambito delle funzioni tra insiemi di numeri reali.

Siano E e F due spazi metrici, con le loro distanze d_E e d_F, rispettivamente. Sia x_0 un elemento di E e ℓ un elemento di F. Avremo a che fare con una funzione f, definita su E o su $E \setminus \{x_0\}$, a valori in F.

Si noti che f potrebbe anche non essere definita in x_0. Per non dover distinguere ogni volta i due casi supporremo, per ora, che sia $f : E \setminus \{x_0\} \to F$. Pertanto, quando scriveremo $f(x)$, sarà sottinteso che x appratenga al dominio di f, ossia $x \in E \setminus \{x_0\}$, per cui $x \neq x_0$.

Ci proponiamo di rispondere a questa

$$\textit{Domanda: cosa significa } \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell\,?$$

(Si legge "limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 è uguale a ℓ.) Procediamo a tentativi.

Primo tentativo. *Diremo che il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 è uguale a ℓ quando si verifica la cosa seguente:*

se x è vicino a x_0, allora $f(x)$ è vicino a ℓ.

Osserviamo subito che, sebbene l'idea vi sia già abbastanza ben formulata, la proposizione precedente non è una definizione accettabile, perché la parola "vicino", che vi compare due volte, non ha un significato preciso. Innanzitutto, per poter misurare quanto vicino sia x a x_0 e quanto vicino sia $f(x)$ a ℓ, faremo uso delle distanze su E e su F, rispettivamente.

Secondo tentativo. *Diremo che il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 è uguale a ℓ quando si verifica la cosa seguente:*

se la distanza $d_E(x, x_0)$ è piccola, allora la distanza $d_F(f(x), \ell)$ è piccola.

Ci rendiamo subito conto che il problema riscontrato nel primo tentativo non è stato affatto risolto con questo secondo tentativo, in quanto vi compare ora per due volte la parola "piccola", che non ha un significato preciso.

Notiamo tra l'altro che sarebbe bene che effettivamente esistano degli x, nel dominio della funzione, con distanza "piccola" da x_0. Per essere sicuri di ciò, chiederemo che x_0 sia un *punto di accumulazione* per E: ogni intorno di x_0 conterrà pertanto infiniti punti di E.

Per poter rendere rigorosa la nostra definizione ci chiediamo, in primo luogo: *quanto piccola* vogliamo che sia la distanza $d_F(f(x), \ell)$? L'idea che abbiamo in mente è che questa distanza possa essere resa piccola quanto si voglia (purché la distanza $d_E(x, x_0)$ sia sufficientemente piccola, s'intende). Per poterla misurare, introdurremo quindi un numero reale positivo, che chiameremo ε, e chiederemo che sia $d_F(f(x), \ell) < \varepsilon$, qualora $d_E(x, x_0)$ sia sufficientemente piccola. L'arbitrarietà di tale ε ci permetterà di prenderlo piccolo quanto si voglia.

Terzo tentativo. *Diremo che il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 è uguale a ℓ quando si verifica la cosa seguente: preso un qualsiasi numero $\varepsilon > 0$,*

se la distanza $d_E(x, x_0)$ è piccola, allora $d_F(f(x), \ell) < \varepsilon$.

Adesso la parola "piccola" compare una sola volta, mentre la distanza $d_F(f(x), \ell)$ viene semplicemente controllata dal numero ε. Quindi, almeno la seconda parte della proposizione ha ora un significato ben preciso. Potremmo allora cercare di fare altrettanto con la distanza $d_E(x, x_0)$, introducendo un nuovo numero reale positivo, che chiameremo δ, che la controlli.

Quarto tentativo (quello buono!). *Diremo che il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 è uguale a ℓ quando si verifica la cosa seguente: preso un qualsiasi numero $\varepsilon > 0$, è possibile trovare un numero $\delta > 0$ per cui,*

$$\text{se } d_E(x, x_0) < \delta, \text{ allora } d_F(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

Quest'ultima proposizione, a differenza delle precedenti, non presenta alcun termine impreciso. Le distanze $d_E(x, x_0)$ e $d_F(f(x), \ell)$ sono semplicemente controllate da due numeri positivi δ e ε, rispettivamente. Riscriviamola quindi in modo formale.

Definizione. *Diremo che il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 è uguale a ℓ e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se, comunque preso un numero positivo ε, è possibile trovare un numero positivo δ tale che, se x è un qualsiasi elemento del dominio $E \setminus \{x_0\}$ che disti da x_0 per meno di δ, allora $f(x)$ dista da ℓ per meno di ε. In simboli:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \; \forall x \in E \quad 0 < d_E(x, x_0) < \delta \; \Rightarrow \; d_F(f(x), \ell) < \varepsilon \, .$$

In questa formulazione, spesso la scrittura "$\forall x \in E$" verrà sottintesa.

Nel caso in cui la funzione sia definita anche nel punto x_0, possiamo chiederci se il valore $f(x_0)$ coincida o meno con l'eventuale valore del limite. Se ciò accade, abbiamo la "continuità".

Definizione. *Diremo che $f : E \to F$ è "continua" in x_0 se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \, ,$$

ossia se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \; \forall x \in E \quad d_E(x, x_0) < \delta \; \Rightarrow \; d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \, .$$

Si dirà che "f è continua" se lo è in ogni punto del suo dominio.

Esempi. 1. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = ax + b$ è continua (qui a e b sono due numeri reali fissati). Infatti, osserviamo che, presi x_0 e x qualsiasi, si ha

$$|f(x) - f(x_0)| = |(ax + b) - (ax_0 + b)| = |a(x - x_0)| = |a| \, |x - x_0| \, .$$

Fissato $\varepsilon > 0$, abbiamo due casi: se $a = 0$, qualsiasi scelta di $\delta > 0$ va bene (in questo caso, la funzione è costante); se $a \neq 0$, basta prendere $\delta = \varepsilon / |a|$.

2. La funzione "valore assoluto" $f(x) = |x|$ è continua. Lo si vede come conseguenza della disuguaglianza

$$\Big| |x| - |x_0| \Big| \leq |x - x_0| \,.$$

3. La "funzione di Dirichlet"

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è continua in alcun punto x_0. Infatti, in ogni intorno di x_0 si possono trovare sia numeri razionali che numeri irrazionali. Prendendo ad esempio $\varepsilon = \frac{1}{2}$, non è possibile trovare un $\delta > 0$ che verifichi la condizione di limite.

Vedremo in seguito che tutte le funzioni "elementari" sono continue: si tratta delle funzioni ottenibili con operazioni di somma, differenza, prodotto, quoziente e composizione di funzioni polinomiali, trigonometriche, esponenziali, ed eventuali loro inverse.

Intuitivamente, una funzione f è continua in x_0 se $f(x)$ varia gradualmente al variare di x nelle vicinanze di x_0, cioè quando non si verificano variazioni brusche nei valori della funzione.

Si può notare che, nel caso in cui x_0 risultasse essere un punto isolato dell'insieme E, qualsiasi valore ℓ verificherebbe la definizione di limite, così come qualsiasi funzione sarebbe continua in x_0. Per evitare simili situazioni poco significative, chiederemo sempre che x_0 *sia un punto di accumulazione.* In questo caso, possiamo verificare l'unicità del limite.

Teorema. *Sia x_0 un punto di accumulazione per E. Se esiste, il limite di f in x_0 è unico.*

<u>Dimostrazione</u>. Supponiamo per assurdo che ce ne siano due diversi, ℓ e ℓ'. Prendiamo $\varepsilon = \frac{1}{2} d(\ell, \ell')$. Allora esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; d(f(x), \ell) < \varepsilon \,,$$

ed esiste un $\delta' > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta' \;\Rightarrow\; d(f(x), \ell') < \varepsilon \,.$$

Sia $x \neq x_0$ tale che $d(x, x_0) < \delta$ e $d(x, x_0) < \delta'$ (tale x esiste perché x_0 è di accumulazione). Allora

$$d(\ell', \ell) \leq d(\ell, f(x)) + d(f(x), \ell') < 2\varepsilon = d(\ell', \ell) \,,$$

una contraddizione. ■

Osservazioni generali

Consideriamo due spazi metrici E, F, un punto x_0 di E e una funzione

$$f : E \to F\,, \qquad \text{oppure} \qquad f : E \setminus \{x_0\} \to F\,,$$

non necessariamente definita in x_0. Ricordiamo la definizione di limite:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon > 0\; \exists\delta > 0 :\; 0 < d_E(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; d_F(f(x), \ell) < \varepsilon\,.$$

Talvolta si scrive anche $f(x) \to \ell$ per $x \to x_0$.

1) Si può osservare che, nella definizione di limite, una o entrambe le disuguaglianze $d_E(x, x_0) < \delta$ e $d_F(f(x), \ell) < \varepsilon$ possono essere sostituite da $d(x, x_0) \le \delta$ e $d_F(f(x), \ell) \le \varepsilon$, ottenendo definizioni che sono tutte tra loro equivalenti. Questo è dovuto al fatto, da un lato, che ε è un *qualunque* numero positivo e, dall'altro lato, che se l'implicazione della definizione vale per un certo numero positivo δ, essa vale a maggior ragione prendendo al posto di quel δ un qualsiasi numero positivo più piccolo.

2) Una rilettura della definizione ci mostra che il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 è uguale a ℓ se e solo se:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 :\; f(I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \subseteq I(\ell, \varepsilon)\,.$$

Potrebbe inoltre essere utile considerare intorni generici invece dei soli intorni centrati, ed esprimere la proposizione precedente nel seguente modo:

per ogni intorno V di ℓ esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V$.

Si tratta di una definizione equivalente, in quanto ogni intorno centrato è ovviamente un intorno, mentre ogni intorno contiene sempre un intorno centrato.

3) Sulla notazione: la lettera x che compare nell'espressione

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

può essere sostituita da una qualsiasi altra lettera o simbolo, senza cambiarne il significato. Potremo scrivere pertanto, equivalentemente,

$$\lim_{t\to x_0} f(t)\,, \quad \lim_{\alpha\to x_0} f(\alpha)\,, \quad \lim_{y\to x_0} f(y)\,, \quad \lim_{\star\to x_0} f(\star)\,, \quad \dots$$

4) Si noti che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0} d(f(x), \ell) = 0\,.$$

5) Sia $\tilde f : E \to F$ la funzione definita da

$$\tilde f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \ne x_0\,, \\ \ell & \text{se } x = x_0\,. \end{cases}$$

Si vede che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad\Leftrightarrow\quad \tilde f \text{ è continua in } x_0\,.$$

Due teoremi sui limiti

Nei due teoremi seguenti, le funzioni coinvolte sono definite su E o su $E \setminus \{x_0\}$, indifferentemente, e hanno valori in $F = \mathbb{R}$.

Teorema (della permanenza del segno). *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in]0, +\infty[\,,$$

allora esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > 0\,.$$

Se invece

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in]-\infty, 0[\,,$$

allora esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; f(x) < 0\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo il primo caso (il secondo è analogo), in cui si suppone che il limite esista e sia un numero positivo ℓ. Fissiamo $\varepsilon = \frac{1}{2}\ell$ e implementiamo la definizione di limite: esiste pertanto un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) > \tfrac{1}{2}\ell > 0\,,$$

come volevasi dimostrare. ■

Se ne deduce direttamente il seguente

Corollario. *Se $f(x) \leq 0$ per ogni x in un intorno di x_0, allora, qualora il limite esista in $\mathbb{R}$, si ha*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq 0\,.$$

Se invece $f(x) \geq 0$ per ogni x in un intorno di x_0, allora, qualora il limite esista in $\mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \geq 0\,.$$

Risulterà talvolta utile il seguente "teorema dei due carabinieri".

Teorema. *Supponiamo di avere due funzioni f_1, f_2 per cui*

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x) = \ell \in \mathbb{R}\,.$$

Se, per ogni x in un intorno di x_0, con $x \neq x_0$,

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)\,,$$

allora
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell\,.$$

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, esistono $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che

$$\begin{aligned} 0 < d(x,x_0) < \delta_1 \ &\Rightarrow\ \ell - \varepsilon < f_1(x) < \ell + \varepsilon\,,\\ 0 < d(x,x_0) < \delta_2 \ &\Rightarrow\ \ell - \varepsilon < f_2(x) < \ell + \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, allora

$$0 < d(x,x_0) < \delta \ \Rightarrow\ \ell - \varepsilon < f_1(x) \le f(x) \le f_2(x) < \ell + \varepsilon\,,$$

il che dimostra la tesi. ■

Anche qui abbiamo un

Corollario. *Se*
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0\,,$$
ed esiste un $C > 0$ tale che $|g(x)| \le C$ per ogni x, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0\,.$$

Dimostrazione. Si ha

$$-C|f(x)| \le f(x)g(x) \le C|f(x)|\,,$$

e il risultato segue dal teorema precedente, ponendo $f_1(x) = -C|f(x)|$, $f_2(x) = C|f(x)|$, e verificando che $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x) = 0$. ■

Operazioni con i limiti

Consideriamo due funzioni f_1, f_2, definite su uno spazio metrico E o su $E \setminus \{x_0\}$, dove x_0 è un punto di accumulazione, a valori in $F = \mathbb{R}$.

Teorema. *Se*
$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \ell_1\,, \quad \lim_{x\to x_0} f_2(x) = \ell_2\,,$$
allora

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = \ell_1 + \ell_2\,,\\ &\lim_{x\to x_0} [f_1(x) - f_2(x)] = \ell_1 - \ell_2\,,\\ &\lim_{x\to x_0} [f_1(x) f_2(x)] = \ell_1 \ell_2\,; \end{aligned}$$

se $\ell_2 \ne 0$,
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}\,.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Esistono $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che

$$0 < d(x, x_0) < \delta_1 \;\Rightarrow\; |f_1(x) - \ell_1)| < \varepsilon\,,$$
$$0 < d(x, x_0) < \delta_2 \;\Rightarrow\; |f_2(x) - \ell_2)| < \varepsilon\,.$$

Quindi, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, si ha

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; |[f_1(x)+f_2(x)]-[\ell_1+\ell_2]| \le |f_1(x)-\ell_1|+|f_2(x)-\ell_2| < 2\varepsilon\,.$$

Data l'arbitrarietà di ε, ciò dimostra[6] che il limite di $f_1 + f_2$ è uguale a $\ell_1 + \ell_2$.

Analoga dimostrazione per il limite di $f_1 - f_2$.

Vediamo ora il prodotto: non è restrittivo supporre $\varepsilon \le 1$, in quanto possiamo sempre porre $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, 1\}$ e procedere con ε' al posto di ε. Pertanto, da $|f_1(x) - \ell_1| < \varepsilon$ segue che $|f_1(x)| < |\ell_1| + 1$. Quindi, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, si ha

$$\begin{aligned} 0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; & |f_1(x)f_2(x) - \ell_1\ell_2| = \\ & = |f_1(x)f_2(x) - f_1(x)\ell_2 + f_1(x)\ell_2 - \ell_1\ell_2| \\ & \le |f_1(x)| \cdot |f_2(x) - \ell_2| + |\ell_2| \cdot |f_1(x) - \ell_1| \\ & \le (|\ell_1| + 1) \cdot |f_2(x) - \ell_2| + |\ell_2| \cdot |f_1(x) - \ell_1| \\ & < (|\ell_1| + |\ell_2| + 1)\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Data l'arbitrarietà di ε, ciò dimostra che il limite di $f_1 \cdot f_2$ è uguale a $\ell_1\ell_2$.

Vediamo ora il quoziente: si noti innanzitutto che, per la proprietà di permanenza del segno, esiste un intorno U di x_0 tale che, per ogni $x \in U \setminus \{x_0\}$, il rapporto $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ risulta ben definito, in quanto il denominatore non si annulla. Essendo $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = f_1(x) \cdot \frac{1}{f_2(x)}$, basterà dimostrare che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f_2(x)} = \frac{1}{\ell_2}\,.$$

Possiamo supporre senza perdita di generalità che $\varepsilon < \frac{|\ell_2|}{2}$. Esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; |f_2(x) - \ell_2| < \varepsilon\,.$$

Ma allora, essendo $\varepsilon < \frac{|\ell_2|}{2}$, anche

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; |f_2(x)| > |\ell_2| - \varepsilon > \frac{|\ell_2|}{2}\,.$$

Ne segue che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; \left| \frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{\ell_2} \right| = \frac{|\ell_2 - f_2(x)|}{|f_2(x)\ell_2|} < \frac{2}{|\ell_2|^2}\varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà de ε, questo dimostra che il limite di $\frac{1}{f_2}$ è uguale a $\frac{1}{\ell_2}$. ∎

[6] In effetti, ogni qualvolta si riesca a giungere a dimostrare che $d(f(x), \ell) < C\varepsilon$, per una certa costante $C > 0$, il gioco è fatto, in quanto l'arbitrarietà di ε permette di definire un nuovo $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{C}$ e, procedendo con questo, si otterrà che $d(f(x), \ell) < C\varepsilon' = \varepsilon$.

Ne segue direttamente un corollario per la continuità.

Corollario. *Se* $f_1 : E \to \mathbb{R}$ *e* $f_2 : E \to \mathbb{R}$ *sono continue in* x_0*, allora anche* $f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$, $f_1 f_2$ *lo sono. Idem per* $\frac{f_1}{f_2}$*, purché* $f_2(x_0) \neq 0$.

Come conseguenza di ciò, sapendo che le funzioni del tipo $ax + b$ sono continue, abbiamo che tutte le funzioni polinomiali lo sono, così come tutte le funzioni razionali (rapporto di funzioni polinomiali).

Consideriamo ora una funzione composta $g \circ f$. Abbiamo due possibili situazioni, che enunceremo in due teoremi distinti.

Teorema 1. *Sia* $f : E \to F$*, oppure* $f : E \setminus \{x_0\} \to F$*, tale che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l\,.$$

Se $g : F \to G$ *è continua in* l*, allora*

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(l)\,.$$

In altri termini,

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x))\,.$$

Dimostrazione. Usiamo la definizione di limite che fa uso degli intorni. Sia W un intorno di $g(l)$. Essendo g continua in l, esiste un intorno V di l tale che $g(V) \subseteq W$. Allora, essendo l il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0, esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V$. Ne segue che $[g \circ f](U \setminus \{x_0\}) \subseteq W$, e la dimostrazione è completa. ■

Dal teorema precedente segue direttamente un corollario sulla continuità.

Corollario *Se* $f : E \to F$ *è continua in* x_0 *e* $g : F \to G$ *è continua in* $f(x_0)$*, allora* $g \circ f$ *è continua in* x_0.

Vediamo ora il secondo teorema.

Teorema 2. *Sia* $f : E \to F$*, oppure* $f : E \setminus \{x_0\} \to F$*, tale che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l\,,$$

e

$$f(x) \neq l\,, \text{ per ogni } x \in E \setminus \{x_0\}\,.$$

Supponiamo che la funzione

$$g : F \to G\,, \qquad \text{oppure} \qquad g : F \setminus \{l\} \to G\,,$$

non necessariamente definita in l*, sia tale che*

$$\lim_{y \to l} g(y) = L\,.$$

Allora

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = L\,.$$

Dimostrazione. È una variante della precedente. Sia W un intorno di L. Essendo L il limite di $g(y)$ per y che tende a l, esiste un intorno V di l tale che $g(V \setminus \{l\}) \subseteq W$. Allora, essendo l il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0, esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V$. Ma, allo stesso tempo, $f(x) \neq l$ per ogni $x \in E \setminus \{x_0\}$, per cui $f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V \setminus \{l\}$. Ne segue che $[g \circ f](U \setminus \{x_0\}) \subseteq W$, e la dimostrazione è completa. ■

Alcune considerazioni sull'ultimo teorema dimostrato.

1. Si noti che la conclusione si riassume con la formula

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to \lim\limits_{x\to x_0} f(x)} g(y)\,.$$

Spesso si dice che si è operato il "cambio di variabile $y = f(x)$".

2. Riguardando le ipotesi, si vede subito che è sufficiente richiedere che sia $f(x) \neq l$ per gli $x \neq x_0$ in un intorno di x_0. Ciò è dovuto al fatto che la nozione di limite è, in un certo senso, di tipo "locale". Questa osservazione vale in generale e verrà spesso usata in seguito.

3. Notiamo infine che il fatto che l sia un punto di accumulazione per F segue dalle ipotesi fatte sulla funzione f. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, se $x \in I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$, allora $f(x) \in I(l, \varepsilon) \setminus \{l\}$.

4. Anche se la funzione g è definita in l, l'ipotesi $f(x) \neq l$ per ogni $x \neq x_0$ non può essere tolta. Ad esempio, sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \neq 0\,, \\ 2 & \text{se } y = 0\,, \end{cases}$$

per cui

$$\lim_{y\to 0} g(y) = 1\,.$$

Sia inoltre $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } \dfrac{1}{x} \notin \mathbb{N}\,, \\[2ex] 0 & \text{se } \dfrac{1}{x} \in \mathbb{N}\,, \end{cases}$$

per cui

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0\,.$$

Si può vedere che, in ogni intorno di $x_0 = 0$, la funzione $g(f(x))$ assume infinite volte il valore 1 e infinite volte il valore 2. Pertanto, in questo caso,

il limite $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$ *non esiste.*

Restrizioni di funzioni

Finora abbiamo considerato due spazi metrici E, F, un punto x_0 di accumulazione per E e una funzione $f : E \to F$, oppure $f : E \setminus \{x_0\} \to F$. Siccome l'eventuale valore di f in x_0 è ininfluente ai fini dell'esistenza o meno del limite, nonchè del suo effettivo valore, da ora in poi per semplicità considereremo solo il caso $f : E \setminus \{x_0\} \to F$.

Si può verificare che tutte le considerazioni fatte continuano a valere per una funzione $f : \widehat{E} \setminus \{x_0\} \to F$, con $\widehat{E} \subseteq E$, purché x_0 sia di accumulazione per $\widehat{E}$: ogni intorno di x_0 deve contenere infiniti punti di $\widehat{E}$.

Sia ora $f : E \setminus \{x_0\} \to F$, e sia $\widehat{E} \subseteq E$. Possiamo considerare la restrizione di f a $\widehat{E} \setminus \{x_0\}$: è la funzione $\hat{f} : \widehat{E} \setminus \{x_0\} \to F$ i cui valori coincidono con quelli di f: si ha $\hat{f}(x) = f(x)$ per ogni $x \in \widehat{E} \setminus \{x_0\}$. Talvolta si scrive $\hat{f} = f|_{\widehat{E}}$.

Teorema. *Se esiste il limite di f in x_0 e x_0 è di accumulazione anche per $\widehat{E}$, allora esiste anche il limite di $\hat{f}$ in x_0 e ha lo stesso valore:*

$$\lim_{x \to x_0} \hat{f}(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)\,.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di $\hat{f}$. ■

Il teorema precedente viene spesso usato per stabilire la non esistenza del limite per la funzione f: a tal scopo, è sufficiente trovare due diverse restrizioni lungo le quali i valori del limite differiscono.

Sia ora $E \subseteq \mathbb{R}$. Possiamo considerare le due restrizioni $\hat{f}_1$ e $\hat{f}_2$ agli insiemi $\widehat{E}_1 = E \cap]-\infty, x_0]$ e $\widehat{E}_2 = E \cap [x_0 + \infty[$. Se x_0 è di accumulazione per $\widehat{E}_1$, chiameremo "limite sinistro" di f, quando esiste, il limite di $\hat{f}_1(x)$ per x che tende a x_0; lo denoteremo con

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)\,.$$

Analogamente, se x_0 è di accumulazione per $\widehat{E}_2$, chiameremo "limite destro" di f, quando esiste, il limite di $\hat{f}_2(x)$ per x che tende a x_0; lo denoteremo con

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)\,.$$

Teorema. *Se x_0 è di accumulazione per $\widehat{E}_1$ e per $\widehat{E}_2$, il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 esiste se e solo se esistono sia il limite sinistro che il limite destro e hanno lo stesso valore.*

Dimostrazione. Sappiamo già che, se esiste il limite, tutte le restrizioni devono avere lo stesso limite. Viceversa, supponiamo che esistano e coincidano i limiti sinistro e destro, e sia ℓ il loro valore. Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Allora esistono $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che, se $x \in E$,

$$x_0 - \delta_1 < x < x_0 \quad \Rightarrow \quad d(f(x), \ell) < \varepsilon\,,$$

$$x_0 < x < x_0 + \delta_2 \quad \Rightarrow \quad d(f(x), \ell) < \varepsilon\,.$$

Preso $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, abbiamo quindi che, se $x \neq x_0$,

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), \ell) < \varepsilon\,,$$

per cui il limite di f in x_0 esiste ed è uguale a ℓ. ■

Esempio. La funzione "segno", ossia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \text{-1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

non ha limite in $x_0 = 0$, essendo che $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

La retta ampliata

Consideriamo la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to]-1, 1[$, definita da

$$\varphi(x) = \frac{x}{1 + |x|}\,.$$

Si tratta di una funzione invertibile, con inversa $\varphi^{-1} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, definita da

$$\varphi^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}\,.$$

Inoltre, φ è continua, e anche φ^{-1} è continua.

Possiamo definire una nuova distanza su $\mathbb{R}$:

$$\tilde{d}(x, x') = |\varphi(x) - \varphi(x')|\,.$$

In effetti, si possono facilmente verificare le quattro proprietà che devono essere soddisfatte da una distanza. È importante notare che gli intorni di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ rimangono gli stessi di quelli definiti dalla distanza usuale in $\mathbb{R}$. Infatti, per la nuova distanza, un intorno centrato in $x_0 \in \mathbb{R}$ di raggio ρ è dato da

$$\mathcal{I}(x_0, \rho) = \{x : |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \rho\}\,.$$

Essendo φ continua in x_0, per ogni $\delta_1 > 0$ esiste un $\delta_2 > 0$ per cui

$$|x - x_0| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \delta_1\,,$$

ossia

$$]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[\subseteq \mathcal{I}(x_0, \delta_1)\,.$$

Viceversa, essendo φ^{-1} continua in $y_0 = \varphi(x_0) \in]-1, 1[$, per ogni $\delta_1 > 0$ esiste un $\delta_2 > 0$ per cui

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |\varphi^{-1}(\varphi(x)) - \varphi^{-1}(\varphi(x_0))| < \delta_1\,,$$

ossia

$$\mathcal{I}(x_0, \delta_2) \subseteq]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\,.$$

Da quanto visto, si deduce che ogni intorno per la nuova distanza è anche intorno per la vecchia distanza, e viceversa.

Introduciamo ora il nuovo insieme $\widetilde{\mathbb{R}}$, definito come unione di $\mathbb{R}$ e di due nuovi elementi, che indicheremo con $-\infty$ e $+\infty$:

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} .$$

L'insieme $\widetilde{\mathbb{R}}$ risulta totalmente ordinato se si mantiene l'ordine esistente tra coppie di numeri reali e si pone inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$-\infty < x < +\infty .$$

Consideriamo la funzione $\tilde{\varphi} : \widetilde{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$, definita da

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x = -\infty , \\ \varphi(x) & \text{se } x \in \mathbb{R} , \\ 1 & \text{se } x = +\infty . \end{cases}$$

Essa è invertibile, con inversa $\tilde{\varphi}^{-1} : [-1, 1] \to \widetilde{\mathbb{R}}$ definita da

$$\tilde{\varphi}^{-1}(y) = \begin{cases} -\infty & \text{se } y = -1 , \\ \varphi^{-1}(y) & \text{se } y \in]-1, 1[, \\ +\infty & \text{se } y = 1 . \end{cases}$$

Definiamo, per $x, x' \in \widetilde{\mathbb{R}}$,

$$\tilde{d}(x, x') = |\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(x')| ;$$

si verifica facilmente che $\tilde{d}$ è una distanza su $\widetilde{\mathbb{R}}$. In questo modo, $\widetilde{\mathbb{R}}$ risulta uno spazio metrico. Vediamo ad esempio cos'è un intorno centrato in $+\infty$:

$$\mathcal{I}(+\infty, \rho) = \{x \in \widetilde{\mathbb{R}} : |\tilde{\varphi}(x) - 1| < \rho\} = \{x \in \widetilde{\mathbb{R}} : \tilde{\varphi}(x) > 1 - \rho\} ,$$

e quindi

$$\mathcal{I}(+\infty, \rho) = \begin{cases} \widetilde{\mathbb{R}} & \text{se } \rho > 2 , \\ ]-\infty, +\infty] & \text{se } \rho = 2 , \\ ]\varphi^{-1}(1 - \rho), +\infty] & \text{se } \rho < 2 , \end{cases}$$

dove abbiamo usato le notazioni

$$]a, +\infty] = \{x \in \widetilde{\mathbb{R}} : x > a\} =]a, +\infty[\cup \{+\infty\} .$$

Possiamo quindi affermare che un intorno di $+\infty$ è un insieme che contiene, oltre al punto $+\infty$, un intervallo del tipo $]\alpha, +\infty[$, per un certo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Analogamente, un intorno di $-\infty$ è un insieme che contiene, oltre a $-\infty$, un intervallo del tipo $]-\infty, \beta[$, per un certo $\beta \in \mathbb{R}$.

Vediamo ora come si traduce la definizione di limite in alcuni casi in cui compaiono gli elementi $+\infty$ o $-\infty$. Ad esempio, sia $E \subseteq \mathbb{R}$, F uno spazio metrico e $f : E \to F$ una funzione. Considerando E come sottoinsieme di $\widetilde{\mathbb{R}}$, si ha che $+\infty$ è punto di accumulazione per E se e solo se E non è limitato superiormente. In tal caso, si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in F \quad &\Leftrightarrow \quad \forall V \text{ intorno di } \ell \ \ \exists U \text{ intorno di } +\infty : \\ &\qquad\quad f(U \cap E) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} : \quad x > \alpha \ \Rightarrow \ d_F(f(x), \ell) < \varepsilon \,.\end{aligned}$$

Analogamente, se E non è limitato inferiormente, si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \in F \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \beta \in \mathbb{R} : \quad x < \beta \ \Rightarrow \ d_F(f(x), \ell) < \varepsilon \,.$$

Si noti che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} f(-x) = \ell \,.$$

Vediamo ora il caso in cui E sia uno spazio metrico e $F = \mathbb{R}$, considerato come sottoinsieme di $\widetilde{\mathbb{R}}$. Supponiamo che x_0 sia di accumulazione per E e consideriamo una funzione $f : E \to \mathbb{R}$, o $f : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall V \text{ intorno di } +\infty \ \ \exists U \text{ intorno di } x_0 : \\ &\qquad\quad f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ f(x) > \alpha \,;\end{aligned}$$

analogamente,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ f(x) < \beta \,.$$

Si noti che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} (-f(x)) = -\infty \,.$$

Le situazioni considerate in precedenza possono talvolta presentarsi assieme. Ad esempio, se $E \subseteq \mathbb{R}$ non è limitato superiormente e $F = \mathbb{R}$, si avrà

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall V \text{ intorno di } +\infty \ \ \exists U \text{ intorno di } +\infty : \\ &\qquad\quad f(U \cap E) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha' \in \mathbb{R} : \quad x > \alpha' \ \Rightarrow \ f(x) > \alpha \,;\end{aligned}$$

analogamente,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} : \quad x > \alpha \ \Rightarrow \ f(x) < \beta \,.$$

Se invece $E \subseteq \mathbb{R}$ non è limitato inferiormente ed $E' = \mathbb{R}$, si avrà

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \beta \in \mathbb{R}: \quad x < \beta \ \Rightarrow \ f(x) > \alpha\,;$$

analogamente,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \exists \beta' \in \mathbb{R}: \quad x < \beta' \ \Rightarrow \ f(x) < \beta\,.$$

Nel caso in cui sia $E = \mathbb{N}$, l'insieme dei numeri naturali, una funzione $f : \mathbb{N} \to F$ si chiama "successione" in F. Di solito, in questo caso, invece di $f(n)$ si usa scrivere f_n. Il simbolo per la funzione anch'esso spesso è diverso, invece della lettera f si preferisce, ad esempio, scrivere s (per "successione", o qualche altra lettera, a seconda dei casi). In tal caso, la successione stessa si indica con il simbolo $(s_n)_n$.

Sia dunque F uno spazio metrico, e $(s_n)_n$ una succesione in F. Considerando $\mathbb{N}$ come sottoinsieme di $\widetilde{\mathbb{R}}$, si vede che l'unico suo punto di accumulazione è $+\infty$. Pertanto, spesso il limite di una successione si denota semplicemente con $\lim\limits_{n} s_n$, sottintendendo che $n \to +\infty$. Adattando la definizione di limite a questo caso, possiamo scrivere:

$$\lim_{n} s_n = \ell \in F \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \quad n \geq \bar{n} \ \Rightarrow \ d_F(a_n, \ell) < \varepsilon\,.$$

Come casi particolare, abbiamo

$$\lim_{n} s_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \quad n \geq \bar{n} \ \Rightarrow \ a_n > \alpha\,;$$

e

$$\lim_{n} s_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \quad n \geq \bar{n} \ \Rightarrow \ a_n < \beta\,.$$

Operazioni con i limiti $+\infty$ e $-\infty$

Qualora i limiti siano $+\infty$ o $-\infty$, non si possono usare i teoremi sulle operazioni con i limiti. A titolo illustrativo, enunciamo alcuni teoremi validi in questi casi. Nel seguito, tutte le funzioni saranno definite in uno spazio metrico E, oppure in $E \setminus \{x_0\}$, con x_0 di accumulazione. Iniziamo con l'addizione:

Teorema. *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

ed esiste un $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni x in un intorno di x_0,

$$g(x) \geq \gamma\,,$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty\,.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\alpha \in \mathbb{R}$. Considerato $\alpha' = \alpha - \gamma$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > \alpha' .$$

Quindi,

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; f(x) + g(x) > \alpha' + \gamma = \alpha .$$

■

Corollario. *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \;\; (\; o \; +\infty) ,$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty .$$

Dimostrazione. Se il limite di g è $\ell \in \mathbb{R}$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; g(x) > \ell - 1 .$$

Se invece il limite è $+\infty$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; g(x) > 0 .$$

In ogni caso, si può applicare il teorema precedente per concludere. ■

Come regola mnemonica, scriveremo brevemente

$$\begin{aligned} &(+\infty) + \ell = +\infty , \text{ se } \ell \text{ è un numero reale;} \\ &(+\infty) + (+\infty) = +\infty . \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo, si possono enunciare un teorema e il relativo corollario nel caso in cui il limite di f sia $-\infty$. Come regola mnemonica, scriveremo allora

$$\begin{aligned} &(-\infty) + \ell = -\infty , \text{ se } \ell \text{ è un numero reale;} \\ &(-\infty) + (-\infty) = -\infty . \end{aligned}$$

Similmente per quanto riguarda il prodotto:

Teorema. *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

ed esiste un $\gamma > 0$ tale che, per ogni x in un intorno di x_0,

$$g(x) \geq \gamma ,$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = +\infty .$$

Dimostrazione. Fissiamo $\alpha \in \mathbb{R}$. Possiamo supporre che sia $\alpha > 0$. Posto $\alpha' = \frac{\alpha}{\gamma}$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > \alpha' \,.$$

Quindi,

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; f(x)g(x) > \alpha'\gamma = \alpha \,.$$

■

Corollario. *Se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell > 0 \;\; (\; o \; +\infty) \,,$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = +\infty \,.$$

Dimostrazione. Se il limite di g è un numero reale $\ell > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; g(x) > \frac{\ell}{2} \,.$$

Se invece il limite è $+\infty$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; g(x) > 1 \,.$$

In ogni caso, si può applicare il teorema precedente per concludere. ■

Come sopra, scriveremo brevemente

$$(+\infty) \cdot \ell = +\infty \,, \text{ se } \ell > 0 \text{ è un numero reale}\,;$$
$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \,,$$

con tutte le varianti del caso:

$$(+\infty) \cdot \ell = -\infty \,, \text{ se } \ell < 0 \text{ è un numero reale}\,;$$
$$(-\infty) \cdot \ell = -\infty \,, \text{ se } \ell > 0 \text{ è un numero reale}\,;$$
$$(-\infty) \cdot \ell = +\infty \,, \text{ se } \ell < 0 \text{ è un numero reale}\,;$$
$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty \,;$$
$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty \,.$$

Passiamo ora a un altro tipo di risultati.

Teorema. *Se*

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty \,,$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 \,.$$

Dimostrazione. Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Posto $\alpha = \frac{1}{\varepsilon}$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)| > \alpha\,.$$

Quindi,

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{\alpha} = \varepsilon\,.$$

■

Teorema. *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

e $f(x) > 0$ per ogni x in un intorno di x_0, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty\,.$$

Se invece $f(x) < 0$ per ogni x in un intorno di x_0, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty\,.$$

Dimostrazione. Vediamo solo il primo caso, essendo il secondo analogo. Fissiamo $\alpha \in \mathbb{R}$; possiamo supporre $\alpha > 0$. Posto $\varepsilon = \frac{1}{\alpha}$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; 0 < f(x) < \varepsilon\,.$$

Allora,

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{\varepsilon} = \alpha\,.$$

■

Il "teorema dei due carabinieri" ha delle varianti: nel caso in cui il limite vale $+\infty$, si ha il seguente

Teorema. *Sia f_1 tale che*

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = +\infty\,.$$

Se f è tale che, per ogni x in un intorno di x_0,

$$f_1(x) \leq f(x)\,,$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty\,.$$

Dimostrazione. Ponendo $g(x) = f(x) - f_1(x)$, si ha che $g(x) \geq 0$ per ogni x in un intorno di x_0 e $f(x) = f_1(x) + g(x)$. Il risultato segue quindi direttamente dal primo teorema visto a lezione. ■

Nel caso in cui il limite sia $-\infty$, si ha l'analogo

Teorema. *Sia* f_2 *tale che*

$$\lim_{x \to x_0} f_2(x) = -\infty \, .$$

Se f *è tale che, per ogni* x *in un intorno di* x_0,

$$f(x) \leq f_2(x) \, ,$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \, .$$

Alcuni limiti a $\pm\infty$

Calcoleremo ora alcuni limiti elementari per x che tende a $+\infty$ o $-\infty$. Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^n \, ,$$

dove n è un numero intero. Si può verificare per induzione che, se $n \geq 1$,

$$x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x^n \geq x \, .$$

Siccome chiaramente $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, ne segue che

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \geq 1 \, , \\ 1 & \text{se } n = 0 \, , \\ 0 & \text{se } n \leq -1 \, . \end{cases}$$

Tenendo poi conto che

$$(-x)^n = x^n \text{ se n è pari} \, , \qquad (-x)^n = -x^n \text{ se n è dispari} \, ,$$

si vede che

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \geq 1 \text{ è pari} \, , \\ -\infty & \text{se } n \geq 1 \text{ è dispari} \, , \\ 1 & \text{se } n = 0 \, , \\ 0 & \text{se } n \leq -1 \, . \end{cases}$$

Consideriamo ora la funzione polinomiale

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \, ,$$

dove $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$. Scrivendo

$$f(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)$$

e usando il fatto che

$$\lim_{x \to +\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = a_n \, ,$$

si vede che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0\,, \\ -\infty & \text{se } a_n < 0\,, \end{cases}$$

mentre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } [n \text{ è pari e } a_n > 0], \text{ oppure } [n \text{ è dispari e } a_n < 0]\,, \\ -\infty & \text{se } [n \text{ è pari e } a_n < 0], \text{ oppure } [n \text{ è dispari e } a_n > 0]\,. \end{cases}$$

Consideriamo ora una funzione razionale

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0}\,,$$

dove $n, m \geq 1$ e $a_n, b_m \neq 0$. Similmente a quanto sopra, scrivendo

$$f(x) = x^{n-m} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_2}{x^{m-2}} + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}}\,,$$

possiamo concludere che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } n > m \text{ e } a_n, b_m \text{ hanno lo stesso segno}\,, \\ -\infty & \text{se } n > m \text{ e } a_n, b_m \text{ hanno segno opposto}\,, \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m\,, \\ 0 & \text{se } n < m\,. \end{cases}$$

Può risultare utile osservare che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n}{b_m}\, x^{n-m}\,.$$

In modo analogo si vede che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n}{b_m}\, x^{n-m}\,,$$

con tutta la casistica che ne consegue.

La funzione esponenziale

Indichiamo con $\mathbb{R}_P$ l'insieme dei numeri reali positivi:

$$\mathbb{R}_P =]0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}\,.$$

Enunciamo senza dimostrare il seguente risultato.

Teorema. *Dato $a > 0$, esiste un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_P$ tale che, per ogni x_1, x_2,*

(i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)\,,$

(ii) $f(1) = a\,.$

Se inoltre $a \neq 1$, tale funzione è invertibile.

La funzione f si chiama "esponenziale di base a" e si denota con $\exp_a$. Se $a \neq 1$, la funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_P \to \mathbb{R}$ si chiama "logaritmo di base a" e si denota con $\log_a$. Si ha quindi, per $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}_P$,

$$\exp_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a(y)\,.$$

Dalle proprietà dell'esponenziale
(i) $\exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a(x_1)\exp_a(x_2)\,,$
(ii) $\exp_a(1) = a\,,$
seguono le corrispondenti proprietà del logaritmo
(i') $\log_a(y_1 y_2) = \log_a(y_1) + \log_a(y_2)\,,$
(ii') $\log_a(a) = 1\,.$
Siccome la funzione costante $f(x) = 1$ verifica a) e b) con $a = 1$, si ha che $f = \exp_1$; in altri termini, $\exp_1(x) = 1$ per ogni x.

Vediamo ora alcune proprietà della funzione esponenziale. Notiamo che $\exp_a(1) = a^1$,

$$\exp_a(2) = \exp_a(1+1) = \exp_a(1)\exp_a(1) = a \cdot a = a^2\,,$$

e, come si può vedere per induzione,

$$\exp_a(n) = a^n\,,$$

per ogni $n \geq 1$. Inoltre, siccome $\exp_a(1) = \exp_a(1+0) = \exp_a(1)\exp_a(0)$, si ha che $\exp_a(0) = 1$. Per queste analogie con le potenze, spesso si scrive a^x invece di $\exp_a(x)$.

Se scriviamo

$$a = \exp_a(1) = \exp_a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \exp_a\left(\frac{1}{2}\right)\exp_a\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\exp_a\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2\,,$$

si vede che, essendo l'esponenziale positivo,

$$\exp_a\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{a}\,.$$

Si verifica poi per induzione che, per ogni $n \geq 1$,

$$\exp_a(nx) = (\exp_a(x))^n\,,$$

e in particolare

$$a = \exp_a(1) = \exp_a\left(n\frac{1}{n}\right) = \left(\exp_a\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n\,.$$

Pertanto, $\exp_a\left(\frac{1}{n}\right)$ risolve l'equazione $x^n = a$. Tale x è la "radice n-esima di a" e si scrive $x = \sqrt[n]{a}$: si ha quindi

$$\exp_a\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}\,,$$

e pertanto, se $m \in \mathbb{N}$,

$$\exp_a\left(\frac{m}{n}\right) = \exp_a\left(m\frac{1}{n}\right) = \left(\exp_a\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m .$$

Notiamo che, se $b = \sqrt[n]{a}$, si ha $a^m = (b^n)^m = b^{nm} = (b^m)^n$, da cui $b^m = \sqrt[n]{a^m}$. Possiamo quindi anche scrivere

$$\exp_a\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{a^m} .$$

Scrivendo

$$1 = \exp_a(0) = \exp_a(x - x) = \exp_a(x)\exp_a(-x) ,$$

vediamo che vale inoltre la formula

$$\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)} .$$

Enunciamo infine le seguenti tre proprietà dell'esponenziale:

$$(ab)^x = a^x b^x , \quad \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x} , \quad (a^y)^x = a^{yx} .$$

La prima segue dal fatto che la funzione $f(x) = a^x b^x$ verifica la proprietà (i) e $f(1) = ab$, per cui $f = \exp_{ab}$. La seconda è analoga, prendendo $f(x) = \frac{1}{a^x}$; per la terza, si prenda $f(x) = a^{yx}$.

Concludiamo con due utili proprietà del logaritmo:

$$\log_a(x^y) = y\log_a(x) , \quad \log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} .$$

Verifichiamo la prima: poniamo $u = \log_a(x^y)$ e $v = \log_a(x)$. Allora $a^u = x^y$ e $a^v = x$, da cui $a^u = (a^v)^y = a^{vy}$. Ne segue che $u = vy$, che è quanto volevasi dimostrare. Un procedimento analogo permette di verificare anche la seconda.

Sono interessanti le "funzioni iperboliche":

$$\cosh_a(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2} , \qquad \sinh_a(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2} ,$$

con $a > 0$ fissato. Esse soddisfano le seguenti proprietà, di facile verifica:

a) $(\cosh_a(x))^2 - (\sinh_a(x))^2 = 1$,
b) $\cosh_a(x_1 + x_2) = \cosh_a(x_1)\cosh_a(x_2) + \sinh_a(x_1)\sinh_a(x_2)$,
c) $\sinh_a(x_1 + x_2) = \sinh_a(x_1)\cosh_a(x_2) + \cosh_a(x_1)\sinh_a(x_2)$.

Si definisce inoltre la funzione "tangente iperbolica":

$$\tanh_a(x) = \frac{\sinh_a(x)}{\cosh_a(x)} .$$

Alcune proprietà delle funzioni continue

Scriviamo la proprietà della permanenza del segno, già vista per i limiti, nella sua forma equivalente per la continuità.

Teorema (della permanenza del segno). *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $x_0 \in E$. Se $f(x_0) > 0$, allora esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in U$. Viceversa, se $f(x_0) < 0$, allora esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) < 0$ per ogni $x \in U$.*

Risulta molto importante la seguente proprietà delle funzioni continue.

Teorema (degli zeri). *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che*

$$f(a) < 0 < f(b) \quad \text{oppure} \quad f(a) > 0 > f(b)\,,$$

allora esiste un $c \in]a,b[$ tale che $f(c) = 0$.

Dimostrazione. Considereremo il caso $f(a) < 0 < f(b)$, essendo l'altro del tutto analogo. Scriviamo $I_0 = [a,b]$ e consideriamo il punto medio $\frac{a+b}{2}$ dell'intervallo I_0. Se f si annulla in esso, abbiamo trovato il punto c cercato. Altrimenti, $f(\frac{a+b}{2}) < 0$ o $f(\frac{a+b}{2}) > 0$. Se $f(\frac{a+b}{2}) < 0$, chiamiamo I_1 l'intervallo $[\frac{a+b}{2}, b]$; se $f(\frac{a+b}{2}) > 0$, chiamiamo invece I_1 l'intervallo $[a, \frac{a+b}{2}]$. Prendendo ora il punto medio di I_1 e ripetendo il ragionamento, possiamo definire un intervallo I_2 e, per ricorrenza, una successione di intervalli $I_n = [a_n, b_n]$ tali che

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$$

e, per ogni n, $f(a_n) < 0 < f(b_n)$. Per il teorema di Cantor, esiste un $c \in \mathbb{R}$ appartenente a tutti gli intervalli. Dimostriamo che $f(c) = 0$.

Per assurdo, se $f(c) < 0$, per la permanenza del segno esiste un $\delta > 0$ tale che $f(x) < 0$ per ogni $x \in]c-\delta, c+\delta[$. Siccome $b_n - c \le b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, si ha che $\lim_n b_n = c$, per cui esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che, se $n \ge \bar{n}$, allora $b_n \in]c-\delta, c+\delta[$. Ma allora dovrebbe essere $f(b_n) < 0$, in contraddizione con quanto sopra.

Se invece $f(c) > 0$, si usa un argomento analogo: per la permanenza del segno esiste un $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in]c-\delta, c+\delta[$. Si vede poi che $\lim_n a_n = c$, per cui esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che, se $n \ge \bar{n}$, allora $a_n \in]c-\delta, c+\delta[$. Ma allora dovrebbe essere $f(a_n) > 0$, in contraddizione con quanto sopra. ■

Come conseguenza del teorema degli zeri, abbiamo che una funzione continua "manda intervalli in intervalli":

Corollario. *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $I \subseteq E$ è un intervallo, allora anche $f(I)$ è un intervallo.*

Dimostrazione. Escludendo i casi banali in cui I o $f(I)$ consistono di un unico punto, prendiamo $\alpha, \beta \in f(I)$, con $\alpha < \beta$ e sia γ tale che $\alpha < \gamma < \beta$. Vogliamo vedere che $\gamma \in f(I)$. Consideriamo la funzione $g : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = f(x) - \gamma\,.$$

Siano a, b in I tali che $f(a) = \alpha$ e $f(b) = \beta$. Essendo I un intervallo, la funzione g è definita su $[a, b]$ (o $[b, a]$, nel caso in cui $b < a$) ed è ivi continua. Inoltre, $g(a) < 0 < g(b)$ e quindi, per il teorema degli zeri, esiste un $c \in]a, b[$ tale che $g(c) = 0$, ossia $f(c) = \gamma$. ■

Diremo che una funzione f è:

"crescente" se [$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$];

"decrescente" se [$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$];

"strettamente crescente" se [$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$];

"strettamente decrescente" se [$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$].

Diremo che è "monotona" se è crescente o decrescente; "strettamente monotona" se è strettamente crescente o strettamente decrescente.

Esempio. La funzione $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^n$ è strettamente crescente. Il caso $n = 2$ è stato stabilito nel Lemma a pagina 9. Il caso generale si vede per induzione.

Vediamo ora un teorema sulla continuità delle funzioni invertibili.

Teorema. *Siano I e J due intervalli e $f : I \to J$ una funzione invertibile. Allora*

$$f \text{ è continua} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ è strettamente monotona}\ .$$

In tal caso, anche $f^{-1} : J \to I$ è strettamente monotona e continua.

Dimostrazione. Supponiamo f continua e, per assurdo, non strettamente monotona. Allora esistono $x_1 < x_2 < x_3$ in I tali che

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{e} \quad f(x_2) > f(x_3)\,,$$

oppure

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{e} \quad f(x_2) < f(x_3)\,.$$

(Le uguaglianze non possono valere, essendo la funzione f iniettiva.) Consideriamo il primo caso, l'altro essendo analogo. Scegliendo $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_1) < \gamma < f(x_2)$ e $f(x_2) > \gamma > f(x_3)$, per il corollario al teorema degli zeri si trova che esistono $a \in]x_1, x_2[$ e $b \in]x_2, x_3[$ tali che $f(a) = \gamma = f(b)$, in contraddizione con l'iniettività di f.

Supponiamo ora f strettamente monotona, ad esempio crescente: l'altro caso è del tutto analogo. Preso $x_0 \in I$, vogliamo dimostrare che f è continua in x_0. Considereremo due casi distinti.

Supponiamo dapprima che x_0 non sia un estremo di I, e pertanto $y_0 = f(x_0)$ non sia un estremo di J. Fissiamo $\varepsilon > 0$; possiamo supporre senza perdita di generalità che $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subseteq J$. Poniamo $x_1 = f^{-1}(y_0 - \varepsilon)$ e $x_2 = f^{-1}(y_0 + \varepsilon)$, per cui $x_1 < x_0 < x_2$. Essendo $f(x_1) = f(x_0) - \varepsilon$ e $f(x_2) = f(x_0) + \varepsilon$, prendendo $\delta = \min\{x_0 - x_1, x_2 - x_0\}$, si ha

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; x_1 < x < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x) < f(x_2) \;\Rightarrow\; d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,,$$

per cui f è continua in x_0.

Consideriamo ora l'eventualità che $x_0 = \min I$ e quindi $y_0 = \min J$. Fissiamo $\varepsilon > 0$; possiamo supporre senza perdita di generalità che $[y_0, y_0 + \varepsilon] \subseteq J$. Poniamo come sopra $x_2 = f^{-1}(y_0 + \varepsilon)$. Essendo $f(x_2) = f(x_0) + \varepsilon$, prendendo $\delta = x_2 - x_0$, si ha (per ogni $x \in I$)

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; x_0 < x < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_0) < f(x) < f(x_2) \;\Rightarrow\; d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,,$$

per cui f è continua in x_0. Il caso eventuale in cui $x_0 = \max I$ si tratta in modo analogo.

Infine, si può vedere che

$$\begin{array}{rcl} f \;\text{ strettamente crescente} & \Rightarrow & f^{-1} \;\text{ strettamente crescente}\,, \\ f \;\text{ strettamente decrescente} & \Rightarrow & f^{-1} \;\text{ strettamente decrescente}\,. \end{array}$$

Quindi, se f è strettamente monotona, anche f^{-1} lo è, e pertanto è anche continua. ■

Esempi. 1) La funzione esponenziale $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_P$, con $a \neq 1$, essendo continua e invertibile, è strettamente monotona, e la sua inversa $\log_a : \mathbb{R}_P \to \mathbb{R}$ è strettamente monotona e continua. Siccome $\exp_a(0) = 1$ e $\exp_a(1) = a$, avremo che

$$\exp_a \;\text{è}: \begin{cases} \text{strettamente crescente} & \text{se } a > 1; \\ \text{strettamente decrescente} & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Lo stesso dicasi per il logaritmo $\log_a$.

2) La funzione $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ definita da $f(x) = x^n$ è invertibile, continua e strettamente crescente. La sua inversa $f^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ è la radice $n-$esima, $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$. Per quanto visto sopra, anch'essa è continua e strettamente crescente.

Limiti delle funzioni monotone

Vedremo ora che la monotonia di una funzione f permette di stabilire l'esistenza del limite sinistro e del limite destro. Vediamo dapprima il caso di una funzione crescente. Qui E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Teorema. *Sia* $f : E \cap]-\infty, x_0[\to \mathbb{R}$ *una funzione crescente e* x_0 *un punto di accumulazione per* $E \cap]-\infty, x_0[$. *Allora*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup f(E \cap]-\infty, x_0[)\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Sia $s = \sup f(E \cap]-\infty, x_0[)$. Se $s \in \mathbb{R}$, fissiamo $\varepsilon > 0$. Per le proprietà dell'estremo superiore, esiste un $\bar{y} \in f(E \cap]-\infty, x_0[)$ tale che $\bar{y} > s - \varepsilon$. Quindi, preso $\bar{x} \in E \cap]-\infty, x_0[$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{y}$, per la crescenza di f abbiamo

$$\bar{x} < x < x_0 \;\Rightarrow\; s - \varepsilon < f(x) \leq s\,,$$

il che completa la dimostrazione in questo caso.

Se invece $s = +\infty$, fissiamo un $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora esiste un $\bar{x} \in E \cap]-\infty, x_0[$ tale che $f(\bar{x}) > \alpha$. Per la crescenza di f,

$$\bar{x} < x < x_0 \ \Rightarrow\ f(x) > \alpha\,,$$

per cui $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$. ∎

Si osservi che il teorema precedente include anche il caso in cui $x_0 = +\infty$. Se f è decrescente, si ha un teorema analogo in cui "sup" viene sostituito da "inf". Analoghi enunciati si hanno per il limite destro, includendo anche il caso in cui $x_0 = -\infty$.

Come caso particolare, abbiamo il seguente

Corollario. *Ogni successione monotona di numeri reali ha limite.*

Dimostrazione. Se $(a_n)_n$ è crescente, allora

$$\lim_n a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}\,,$$

e questo limite può essere un numero reale o $+\infty$. Similmente, se $(a_n)_n$ è decrescente, il limite sarà un numero reale o $-\infty$. ∎

Il numero di Nepero

Consideriamo la successione $(a_n)_n$, così definita per $n \geq 1$:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Vediamo che è crescente:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\\ &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n}\\ &= \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n}\\ &= \left(1+\frac{-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n}\,,\end{aligned}$$

quindi, per la disuguaglianza di Bernoulli,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \left(1 + (n+1)\frac{-1}{(n+1)^2}\right)\frac{n+1}{n} = 1\,.$$

Analogamente, consideriamo la successione

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} .$$

Si ha che $a_n < b_n$, per ogni $n \geq 1$. Vediamo che $(b_n)_n$ è decrescente:

$$\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} \\
&= \frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} \\
&= \frac{n}{n+1}\left(\frac{(n+1)^2}{n^2+2n}\right)^{n+2} \\
&= \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+2} \\
&\geq \frac{n}{n+1}\left(1+(n+2)\frac{1}{n^2+2n}\right) \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, le successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ hanno entrambe limite finito. Essendo

$$\lim_n \frac{b_n}{a_n} = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1\,,$$

possiamo concludere che le due successioni hanno lo stesso limite, un numero reale. Esso si chiama "numero di Nepero" e si denota con e. Scriveremo

$$e = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\,.$$

Si può dimostrare che è un numero irrazionale:

$$e = 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595\ldots\ldots$$

Dimostriamo ora che, al variare di x in $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,.$$

Consideriamo, per $x \geq 0$, il numero naturale $n(x)$ tale che

$$n(x) \leq x < n(x)+1$$

(detto "parte intera di x"). Allora, per $x \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n(x)+1}\right)^{n(x)} &< \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n(x)} \leq \\
&\leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \\
&< \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n(x)+1} \leq \left(1+\frac{1}{n(x)}\right)^{n(x)+1}\,.
\end{aligned}$$

Notiamo che $\lim_{x\to+\infty} n(x) = +\infty$, quindi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n(x)}\right)^{n(x)+1} &= \lim_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\\ &= \lim_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= e\cdot 1 = e\,.\end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n(x)+1}\right)^{n(x)} &= \lim_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\\ &= \lim_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\\ &= e\cdot 1 = e\end{aligned}$$

Per il "teorema dei due carabinieri", si ha che anche il limite cercato vale e.

Dimostriamo ora che si ha anche

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e\,.$$

Infatti, usando la formula $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} &= \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x}\\ &= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\left(1+\frac{1}{y}\right) = e\cdot 1 = e\,.\end{aligned}$$

Possiamo ora enunciare il seguente importante

Teorema. *Si ha*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(e)\,, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \frac{1}{\log_a(e)}\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Abbiamo che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{y\to+\infty} y\log_a\left(1+\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to+\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = \log_a(e)\,,$$

e lo stesso vale per il limite sinistro. Inoltre,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \frac{1}{\log_a(e)}\,.$$

■

Si noti che la scelta della base $a = e$ semplifica le espressioni: si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,.$$

È per questo motivo che, da ora in poi, sceglieremo come base dell'esponenziale e del logaritmo il numero di Nepero e, che viene anche chiamato la "base naturale". Scriveremo $\exp(x)$ (o anche $\exp x$) invece di $\exp_e(x)$ e $\ln(x)$ (o anche $\ln x$) invece di $\log_e(x)$. Potrebbero essere utili le formule seguenti:

$$a^x = e^{x\ln(a)}\,, \qquad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}\,.$$

Anche le funzioni iperboliche verrà sempre scelta la base e, e scriveremo $\cosh(x)$ (o anche $\cosh x$) invece di $\cosh_e(x)$ e $\sinh(x)$ (o anche $\sinh x$) invece di $\sinh_e(x)$.

Le funzioni trigonometriche

Vogliamo ora introdurre le funzioni trigonometriche, in un modo analogo a quanto fatto per la funzione esponenziale.

Dato $T > 0$, una funzione $F : \mathbb{R} \to \Omega$ (qui Ω è un insieme qualsiasi) si dice "periodica di periodo T" se

$$F(x+T) = F(x)\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Chiaramente, se T è un periodo per la funzione F, anche $2T, 3T, \dots$ lo sono. Diremo che T è il "periodo minimo" se non ci sono periodi più piccoli. Introduciamo l'insieme

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}\,.$$

Si tratta della circonferenza centrata nell'origine, di raggio 1, pensata come sottoinsieme del campo complesso. Enunciamo senza dimostrare il seguente risultato.

Teorema. *Dato $T > 0$, esiste un'unica funzione $h_T : \mathbb{R} \to S^1$, continua e periodica di periodo minimo T, tale che, per ogni x_1, x_2,*
(j) $h_T(x_1 + x_2) = h_T(x_1) h_T(x_2)\,,$
(jj) $h_T\left(\frac{T}{4}\right) = i\,.$

La funzione h_T si chiama "funzione circolare di base T". Pensando al codominio S^1 come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, la funzione h_T ha due componenti, che denotiamo con $\cos_T$ e $\sin_T$: sono il "coseno di base T" e il "seno di base T", rispettivamente. Scriveremo quindi

$$h_T(x) = (\cos_T(x), \sin_T(x))\,, \qquad \text{oppure} \qquad h_T(x) = \cos_T(x) + i\,\sin_T(x)\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Tali funzioni sono continue e periodiche di periodo T, e dalle proprietà della funzione circolare ricaviamo le seguenti:

(a) $(\cos_T(x))^2 + (\sin_T(x))^2 = 1\,,$
(b) $\cos_T(x_1 + x_2) = \cos_T(x_1)\cos_T(x_2) - \sin_T(x_1)\sin_T(x_2)\,,$
(c) $\sin_T(x_1 + x_2) = \sin_T(x_1)\cos_T(x_2) + \cos_T(x_1)\sin_T(x_2)\,,$
(d) $\cos_T\left(\frac{T}{4}\right) = 0\,, \quad \sin_T((\left(\frac{T}{4}\right) = 1\,.$

Concentriamo ora l'attenzione sull'intervallo $[0, T[$. Scrivendo

$$i = h_T\left(\tfrac{T}{4}\right) = h_T\left(0 + \tfrac{T}{4}\right) = h_T(0)h_T\left(\tfrac{T}{4}\right) = h_T(0)i\,,$$

ne ricaviamo che $h_T(0) = 1$. Inoltre,

$$h_T\left(\tfrac{T}{2}\right) = h_T\left(\tfrac{T}{4} + \tfrac{T}{4}\right) = h_T\left(\tfrac{T}{4}\right)h_T\left(\tfrac{T}{4}\right) = i^2 = -1\,,$$

mentre

$$h_T\left(\tfrac{3T}{4}\right) = h_T\left(\tfrac{T}{2} + \tfrac{T}{4}\right) = h_T\left(\tfrac{T}{2}\right)h_T\left(\tfrac{T}{4}\right) = (-1)i = -i\,,$$

Riassumendo:

$$\begin{array}{ll} \cos_T(0) = 1\,, & \sin_T(0) = 0\,, \\ \cos_T\left(\tfrac{T}{4}\right) = 0\,, & \sin_T\left(\tfrac{T}{4}\right) = 1\,, \\ \cos_T\left(\tfrac{T}{2}\right) = -1\,, & \sin_T\left(\tfrac{T}{2}\right) = 0\,, \\ \cos_T\left(\tfrac{3T}{4}\right) = 0\,, & \sin_T\left(\tfrac{3T}{4}\right) = -1\,. \end{array}$$

Osserviamo ora che, dalla

$$1 = h_T(0) = h_T(x - x) = h_T(x)h_T(-x)\,,$$

abbiamo che $h_T(-x) = h_T(x)^{-1} = h_T(x)^*$, essendo $|h_T(x)| = 1$. Quindi,

$$\cos_T(-x) = \cos_T(x)\,, \quad \sin_T(-x) = -\sin_T(x)\,,$$

ossia la funzione $\cos_T$ è pari, mentre $\sin_T$ è dispari.

Dimostreremo ora che $\tilde{h}_T : [0, T[\to S^1$, la restrizione della funzione circolare h_T all'intervallo $[0, T[$, è biiettiva. Vediamo dapprima l'iniettività. Siano $\alpha < \beta$ in $[0, T[$. Se per assurdo fosse $h_T(\alpha) = h_T(\beta)$, si avrebbe che

$$h_T(\beta - \alpha) = h_T(\beta)h_T(-\alpha) = \frac{h_T(\beta)}{h_T(\alpha)} = 1\,.$$

Ma allora

$$h_T(x + (\beta - \alpha)) = h_T(x)h_T(\beta - \alpha) = h_T(x)\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, per cui $\beta - \alpha$ sarebbe un periodo di h_T minore di T, mentre sappiamo che T è il periodo minimo.

Vediamo ora che

$$\cos_T(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } 0 < x < \frac{T}{4} \\ < 0 & \text{se } \frac{T}{4} < x < \frac{3T}{4} \\ > 0 & \text{se } \frac{3T}{4} < x < T \end{cases}, \qquad \sin_T(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } 0 < x < \frac{T}{2} \\ < 0 & \text{se } \frac{T}{2} < x < T \end{cases}.$$

Ad esempio, per $x \in]0, \frac{T}{2}[$, non si può certamente avere $\sin_T(x) = 0$, perchè altrimenti i valori in x di $\cos_T$, $\sin_T$ coinciderebbero con i valori in 0 o in $\frac{T}{2}$, mentre abbiamo visto che, se per $\alpha, \beta \in [0, T[$ si ha $\cos_T(\alpha) = \cos_T(\beta)$ e $\sin_T(\alpha) = \sin_T(\beta)$, allora $\alpha = \beta$. Pertanto, per la continuità, $\sin_T$ dovrà essere sempre positiva o sempre negativa in $]0, \frac{T}{2}[$ (teorema degli zeri). Essendo $\sin_T\left(\frac{T}{4}\right) = 1$, deve essere sempre positiva.

Per concludere, dimostriamo che $\tilde{h}_T$ è suriettiva (abbiamo già dimostrato prima che è iniettiva). Prendiamo un punto $P = (X_1, X_2) \in S^1$. Si ha che $X_1 \in [-1, 1]$. I due casi in cui $X_1 = -1$ o $X_1 = 1$ si trattano immediatamente, essendo $h_T(\frac{T}{2}) = (-1, 0)$ e $h_T(0) = (1, 0)$. Supponiamo quindi che sia $X_1 \in]-1, 1[$. Sappiamo che $\cos_T(\frac{T}{2}) = -1$, $\cos_T(0) = 1$ e che $\cos_T$ è una funzione continua e $T-$periodica. Per il corollario al teorema degli zeri, esiste un $\bar{x} \in]0, \frac{T}{2}[$ tale che $\cos_T(\bar{x}) = X_1$. Allora

$$|\sin_T(\bar{x})| = \sqrt{1 - (\cos_T(\bar{x}))^2} = \sqrt{1 - X_1^2} = |X_2| \,.$$

Abbiamo due possibilità: o $\sin_T(\bar{x}) = X_2$, per cui $h_T(\bar{x}) = P$, oppure $\sin_T(\bar{x}) = -X_2$, nel qual caso

$$h_T(T - \bar{x}) = h_T(-\bar{x}) = h_T(\bar{x})^* = (X_1, X_2) = P \,.$$

Essendo $T - \bar{x} \in]\frac{T}{2}, T[$, ciò mostra che $\tilde{h}_T$ è suriettiva.

Definiamo la funzione "tangente di base T":

$$\tan_T(x) = \frac{\sin_T(x)}{\cos_T(x)} \,.$$

Il suo dominio naturale è l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{T}{4} + k\frac{T}{2} \,,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Essendo seno e coseno funzioni continue, anche la tangente lo è (sul suo dominio). Inoltre, essa è periodica: il suo periodo minimo è $\frac{T}{2}$.

Il numero π

Definiamo la successione $(\ell_n)_n$ in questo modo:

$$l_1 = 2 \,, \quad \ell_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_n^2}} \,.$$

(Geometricamente, si può vedere che ℓ_n corrisponde alla lunghezza del lato di un poligono regolare di 2^n lati inscritto ad una circonferenza di raggio 1.) Si ha:

$$\begin{aligned}
&\ell_2 = \sqrt{2} \\
&\ell_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\
&\ell_4 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \\
&\ell_5 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \\
&\dots
\end{aligned}$$

Poniamo

$$a_n = 2^{n-1}\ell_n\,.$$

(Geometricamente, a_n corrisponde al semiperimetro di tale poligono.) In modo analogo, definiamo, per $n \geq 2$,

$$b_n = 2^n \frac{\ell_n}{\sqrt{4-\ell_n^2}}\,.$$

(Geometricamente, si può vedere che b_n corrisponde al semiperimetro di un poligono regolare di 2^n lati circoscritto alla circonferenza di lato 1.) Si ha che $a_n < b_n$ per ogni $n \geq 2$. Ecco come si sviluppano le due successioni:

$$\begin{array}{ll}
a_2 = 2\sqrt{2} & b_2 = 4 \\[2ex]
a_3 = 4\sqrt{2-\sqrt{2}} & b_3 = 8\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\[2ex]
a_4 = 8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} & b_4 = 16\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \\[2ex]
a_5 = 16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} & b_5 = 32\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \\[2ex]
\ldots & \ldots
\end{array}$$

Vediamo che la successione $(a_n)_n$ è strettamente crescente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = 2\frac{\sqrt{2-\sqrt{4-\ell_n^2}}}{\ell_n} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{4-\ell_n^2}}} > \frac{2}{\sqrt{2+2}} = 1\,.$$

Inoltre, la successione $(b_n)_n$ è strettamente decrescente:

$$\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{1}{2}\;\frac{\ell_n}{\sqrt{4-\ell_n^2}}\;\frac{\sqrt{4-\ell_{n+1}^2}}{\ell_{n+1}} \\
&= \frac{1}{2}\;\frac{\ell_n}{\sqrt{4-\ell_n^2}}\;\frac{\sqrt{2+\sqrt{4-\ell_n^2}}}{\sqrt{2-\sqrt{4-\ell_n^2}}} \\
&= \frac{1}{2}\;\frac{2+\sqrt{4-\ell_n^2}}{\sqrt{4-\ell_n^2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{4-\ell_n^2}}+1\right) \\
&> \frac{1}{2}(1+1) = 1\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, le successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ hanno entrambe limite finito. Essendo quindi

$$\lim_n \ell_n = \lim_n \frac{a_n}{2^{n-1}} = 0\,,$$

si ha

$$\lim_n \frac{b_n}{a_n} = \lim_n \frac{2}{\sqrt{4-\ell_n^2}} = 1\,,$$

per cui possiamo concludere che le due successioni hanno lo stesso limite, un numero reale, che chiameremo "pi greco" e denoteremo con π. Si può dimostrare che è un numero irrazionale:

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937 51\ldots\ldots$$

Torniamo ora a considerare la funzione circolare $h_T : \mathbb{R} \to S^1$. Ricordiamo che S^1 può essere considerato come sottoinsieme di $\mathbb{C}$ o, equivalentemente, di $\mathbb{R}^2$, e che $h_T(x) = \cos_T(x) + i \sin_T(x)$, ossia

$$h_T(x) = (\cos_T(x), \sin_T(x))\,.$$

Poniamo $x_n = \frac{T}{2^n}$ e $\sigma_n = h_T(x_n)$. Dimostriamo per induzione che, per $n \geq 1$,

$$\ell_n = d(\sigma_n, \mathbf{1})\,,$$

dove abbiamo scritto $\mathbf{1}$ per indicare il punto $(1,0)$. Verifichiamo che vale per $n = 1$: si ha $\ell_1 = 2$ e

$$d(\sigma_1, \mathbf{1}) = d\left(h_T\left(\tfrac{T}{2}\right), (1,0)\right) = d\left((-1,0),(1,0)\right) = 2\,.$$

Supponiamo ora che $\ell_n = d(\sigma_n, \mathbf{1})$, per un certo $n \geq 1$, ossia

$$\ell_n = \sqrt{(\cos_T(x_n) - 1)^2 + (\sin_T(x_n) - 0)^2} = \sqrt{2 - 2\cos_T(x_n)}\,,$$

da cui

$$\cos_T(x_n) = \frac{2 - \ell_n^2}{2}\,.$$

Essendo $x_n = 2x_{n+1}$, dalla

$$\begin{aligned}
\cos_T(x_n) &= \cos_T(x_{n+1} + x_{n+1}) \\
&= \cos_T(x_{n+1})\cos_T(x_{n+1}) - \sin_T(x_{n+1})\sin_T(x_{n+1}) \\
&= (\cos_T(x_{n+1}))^2 - (\sin_T(x_{n+1}))^2 \\
&= 2(\cos_T(x_{n+1}))^2 - 1\,,
\end{aligned}$$

abbiamo

$$\cos_T(x_{n+1}) = \sqrt{\frac{1 + \cos_T(x_n)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{2-\ell_n^2}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - \ell_n^2}\,.$$

Quindi,

$$d(\sigma_{n+1}, \mathbf{1}) = \sqrt{2 - 2\cos_T(x_{n+1})} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_n^2}} = \ell_{n+1}\,,$$

il che completa la dimostrazione.

Essendo $\lim_n 2^{n-1}\ell_n = \pi$, possiamo scrivere

$$\lim_n \frac{\sqrt{2-2\cos_T(x_n)}}{x_n} = \lim_n \frac{2^n}{T}\ell_n = \frac{2\pi}{T}\,.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{\sin_T(x_n)}{x_n} &= \lim_n \frac{\sqrt{1-(\cos_T(x_n))^2}}{x_n} \\
&= \lim_n \frac{\sqrt{1-\cos_T(x_n)}}{x_n}\sqrt{1+\cos_T(x_n)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_n \frac{\sqrt{2-2\cos_T(x_n)}}{x_n} \lim_n \sqrt{1+\cos_T(x_n)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\pi}{T}\sqrt{2} = \frac{2\pi}{T}\,.
\end{aligned}$$

Questi fatti ci portano a congetturare il seguente

Teorema. *Si ha*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos_T(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin_T(x)}{x} = \frac{2\pi}{T}\,.$$

La sua dimostrazione risulta piuttosto complicata a questo livello e viene pertanto omessa. Si noti che la scelta della base $T = 2\pi$ semplifica le espressioni dei limiti. È per questo motivo che, da ora in poi, sceglieremo come base delle funzioni trigonometriche il numero 2π: scriveremo $\cos(x)$ (o anche $\cos x$) invece di $\cos_{2\pi}(x)$ e $\sin(x)$ (o anche $\sin x$) invece di $\sin_{2\pi}(x)$. Potranno essere utili le seguenti formule:

$$\cos_T(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right), \quad \sin_T(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\,.$$

Analogo discorso per la funzione tangente.

Alcuni limiti che possono risultare utili

Si ha quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Essendo la funzione coseno è continua in 0, abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\cos(0)} \cdot 1 = 1\,.$$

Si possono inoltre dimostrare le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tanh x}{x} = 1\,.$$

Usando le proprietà della funzione esponenziale, vediamo che

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1\,, \\ 1 & \text{se } a = 1\,, \\ 0 & \text{se } a < 1\,, \end{cases}$$

mentre

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1\,, \\ -\infty & \text{se } a < 1\,. \end{cases}$$

Scrivendo $x^\alpha = \exp(\ln x^\alpha) = \exp(\alpha \ln x)$, si vede che

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0\,, \\ 1 & \text{se } \alpha = 0\,, \\ 0 & \text{se } \alpha < 0\,. \end{cases}$$

Vogliamo ora calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha}\,,$$

con $a > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Ci interessa dapprima il caso indeterminato $a > 1$ e $\alpha > 0$. Cominciamo con il dimostrare che

$$\lim_n \frac{a^n}{n} = +\infty\,.$$

Infatti, scrivendo $a = 1 + b$, con $b > 0$, si ha che

$$a^n = (1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2}\, b^2 + \ldots + b^n > \frac{n(n-1)}{2}\, b^2\,.$$

Quindi,

$$\frac{a^n}{n} > \frac{n-1}{2}\, b^2\,,$$

da cui segue il risultato.

Vediamo ora che, per ogni numero intero $k \geq 1$, si ha che

$$\lim_n \frac{a^n}{n^k} = +\infty\,.$$

Infatti, scrivendo

$$\frac{a^n}{n^k} = \left(\frac{a^{n/k}}{n}\right)^k = \left(\frac{(\sqrt[k]{a})^n}{n}\right)^k,$$

si può usare il fatto che $\lim_n \dfrac{(\sqrt[k]{a})^n}{n} = +\infty$ e concludere.

Siccome siamo interessati a calcolare un limite per $x \to +\infty$, supporremo ora $x \geq 1$. Siano $n(x)$ e $n(\alpha)$ i numeri naturali tali che

$$n(x) \leq x < n(x) + 1\,, \qquad n(\alpha) \leq \alpha < n(\alpha) + 1\,.$$

Ponendo $k = n(\alpha) + 1$, per $x \geq 1$ si ha

$$\frac{a^x}{x^\alpha} \geq \frac{a^x}{x^{n(\alpha)+1}} = \frac{a^x}{x^k} \geq \frac{a^{n(x)}}{(n(x)+1)^k} .$$

Inoltre,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^{n(x)}}{(n(x)+1)^k} = \lim_n \frac{a^n}{(n+1)^k} = \frac{1}{a} \lim_n \frac{a^{n+1}}{(n+1)^k} = \frac{1}{a} \lim_m \frac{a^m}{m^k} = +\infty .$$

Ne segue che, se $a > 1$ e $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty .$$

A maggior ragione, il risultato continua a valere anche per $\alpha \leq 0$. In particolare,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty , \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R} .$$

Lasciando ora da parte il caso semplice in cui $a = 1$, notiamo che, se $a < 1$, ponendo $\hat{a} = \frac{1}{a}$ e $\hat{\alpha} = -\alpha$, si ha che $\hat{a} > 1$, per cui $\lim_{x \to +\infty} \frac{\hat{a}^x}{x^{\hat{\alpha}}} = +\infty$, e quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\hat{\alpha}}}{\hat{a}^x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\hat{a}^x}{x^{\hat{\alpha}}} \right)^{-1} = 0 .$$

Dimostriamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 , \quad \text{per ogni } \alpha > 0 .$$

(Se $\alpha \leq 0$, tale limite vale $+\infty$, in quanto il numeratore tende a $+\infty$.) Con il cambio di variabile "$y = \ln x$", si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{(e^y)^\alpha} = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{y^{1/\alpha}}{e^y} \right)^\alpha = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{e^y}{y^{1/\alpha}} \right)^{-\alpha} = 0 .$$

Dimostriamo ora che

$$\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0 .$$

Possiamo assumere $n > n(a)$ e scrivere

$$\begin{aligned} 0 < \frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{n(a)} \cdot \frac{a}{(n(a)+1)} \cdot \frac{a}{(n(a)+2)} \cdots \frac{a}{n} \\ &= C \cdot \frac{a}{(n(a)+1)} \cdot \frac{a}{(n(a)+2)} \cdots \frac{a}{n} \\ &\leq C \cdot \frac{a}{n} , \end{aligned}$$

da cui segue il risultato, usando il "teorema dei due carabinieri".

Vediamo infine che

$$\lim_n \frac{n!}{n^n} = 0\,.$$

A tal scopo dimostriamo per induzione che, per ogni $n \geq 1$, si ha

$$0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}\,,$$

dopodichè il risultato segue di nuovo usando il "teorema dei due carabinieri". Se $n = 1$, la proposizione è sicuramente vera. Supponiamola ora vera per un certo $n \geq 1$. Allora

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)^n} = \frac{n!}{n^n}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \\ &\leq \frac{1}{n}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n = \frac{1}{n}\,\frac{n}{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n-1} = \frac{1}{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n-1} \leq \frac{1}{n+1}\,, \end{aligned}$$

per cui la proposizione risulta vera anche per $n + 1$.

Successioni e sottosuccessioni

Utilizzeremo le successioni e i loro limiti per caratterizzare alcuni concetti introdotti in precedenza. A tal fine, riscriviamo la definizione di limite per una successione in uno spazio metrico E in questo modo:

$$\lim_n a_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad n \geq \bar{n} \ \Rightarrow d(a_n, \ell) < \varepsilon\,.$$

Consideriamo ora due spazi metrici E, F e una funzione $f : E \to F$. Vogliamo caratterizzare la continuità di f in un punto $x_0 \in E$, facendo uso delle successioni.

Teorema. *La funzione f è continua in x_0 se e solo se, presa una successione $(a_n)_n$ in E, si ha*

$$\lim_n a_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_n f(a_n) = f(x_0)\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Supponiamo che f sia continua in x_0, e sia $(a_n)_n$ una successione in E tale che $\lim_n a_n = x_0$. Per il Teorema 1 sul limite di una funzione composta,

$$\lim_n f(a_n) = f(\lim_n a_n) = f(x_0)\,,$$

cosicchè una delle due implicazioni è dimostrata.

Ragioniamo ora per contrapposizione, e supponiamo che f non sia continua in x_0. Questo significa che esiste un $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $\delta > 0$, esiste almeno un $x \in E$ per cui $d(x, x_0) < \delta$ e $d(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Prendendo $\delta = \frac{1}{n+1}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste pertanto un a_n in E tale che $d(a_n, x_0) < \frac{1}{n+1}$ e $d(f(a_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Ne segue che $\lim_n a_n = x_0$, ma sicuramente non può essere che $\lim_n f(a_n) = f(x_0)$. ∎

Sia ora U un sottoinsieme dello spazio metrico E. Possiamo caratterizzare la nozione di punto aderente a U facendo uso delle successioni.

Teorema. *Un punto $x \in E$ è aderente a U se e solo se esiste una successione $(a_n)_n$ in U tale che $\lim_n a_n = x$.*

Dimostrazione. Se x è aderente a U, allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'intersezione $I(x, \frac{1}{n+1}) \cap U$ è non vuota, per cui posso sceglierne un elemento, che chiamo a_n. In questo modo, ho costruito una successione $(a_n)_n$ in U, ed è facile vedere che essa ha limite x. Una delle due implicazioni è così dimostrata.

Supponiamo ora che esista una successione $(a_n)_n$ in U tale che $\lim_n a_n = x$. Allora, fissato $\rho > 0$, esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$n \geq \bar{n} \;\Rightarrow\; d(a_n, x) < \rho\,,$$

ossia $a_n \in I(x, \rho)$. Quindi, $I(x, \rho) \cap U$ è non vuoto, e questo dimostra che x è aderente a U. ■

Data che sia una successione $(a_n)_n$, una sua "sottosuccessione" si ottiene selezionando una successione strettamente crescente di indici $(n_k)_k$ e considerando la funzione composta

$$k \mapsto n_k \mapsto a_{n_k}\,.$$

Teorema. *Se una successione ha limite, allora tutte le sue sottosuccessioni hanno lo stesso limite.*

Dimostrazione. Essendo gli indici n_k in $\mathbb{N}$, dalla $n_{k+1} > n_k$ si deduce che $n_{k+1} \geq n_k + 1$ e, per induzione, che $n_k \geq k$, per ogni k. Ne segue che $\lim_k n_k = +\infty$. Pertanto,

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = \lim_{n \to \lim\limits_{k\to+\infty} n_k} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n\,.$$ ■

Ricordiamo ora che, se U è sottoinsieme di uno spazio metrico E, si dice che $x_0 \in E$ è un punto di accumulazione per U se ogni intorno di x_0 contiene infiniti elementi di U. Dimostriamo una importante proprietà nell'ambito della retta reale $\mathbb{R}$.

Enunciamo ora la seguente proprietà degli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$, ossia il "secondo teorema di Bolzano–Weierstrass".

Teorema. *Ogni successione $(a_n)_n$ in $[a, b]$ possiede una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ che ha limite in $[a, b]$.*

Dimostrazione. Se la successione $(a_n)_n$ assume uno stesso valore $\bar{x}$ infinite volte, basta prendere la sottosuccessione costantemente uguale a $\bar{x}$. Altrimenti, l'insieme $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, contenuto in $[a, b]$, ha infiniti elementi ed è limitato, per cui ha un punto di accumulazione $c \in \mathbb{R}$: esso è un punto aderente ad $[a, b]$, che è un insieme chiuso. Quindi, $c \in [a, b]$. Ora pongo $n_0 = 0$ e, per induzione, supponendo di aver scelto n_k, per un certo $k \in \mathbb{N}$, scelgo n_{k+1} in modo che $n_{k+1} > n_k$ e $a_{n_{k+1}} \in \left]c - \frac{1}{k+1}\,,\, c + \frac{1}{k+1}\right[$. Ciò è possibile in quanto, essendo c di accumulazione, per ogni k l'insieme $\left]c - \frac{1}{k+1}\,,\, c + \frac{1}{k+1}\right[$ contiene infiniti elementi di $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Chiaramente, si ha che $\lim_k a_{n_k} = c$, e la proprietà di Bolzano–Weierstrass è così dimostrata. ■

La nozione di compattezza

In uno spazio metrico E, diremo che un sottoinsieme U è "compatto" se ogni successione $(a_n)_n$ in U possiede una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ che ha limite in U. La proprietà di Bolzano–Weierstrass afferma quindi che, se $E = \mathbb{R}$, gli intervalli del tipo $U = [a, b]$ sono compatti. Più in generale, si può dimostrare che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Nel seguito, diremo che una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ è "limitata superiormente" se lo è la sua immagine $f(U)$. Analogamente dicasi per espressioni del tipo "f è limitata inferiormente", "f è limitata", "f ha massimo", "f ha minimo". Nel caso in cui f abbia massimo, chiameremo "punto di massimo" ogni $\bar{x}$ per cui $f(\bar{x}) = \max f(U)$; analoga definizione per "punto di minimo".

Teorema (di Weierstrass). *Se U è un insieme compatto e $f : U \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora f ha massimo e minimo.*

Dimostrazione. Sia $s = \sup f(U)$. Dimostreremo che esiste un punto di massimo, ossia un $\bar{x} \in U$ tale che $f(\bar{x}) = s$.

Notiamo che è possibile trovare una successione $(y_n)_n$ in $f(U)$ tale che $\lim\limits_n y_n = s$: se $s \in \mathbb{R}$, per ogni $n \geq 1$ possiamo trovare un $y_n \in f(U)$ per cui $s - \frac{1}{n} < y_n \leq s$; se invece $s = +\infty$, per ogni n esiste un $y_n \in f(U)$ tale che $y_n > n$.

In corrispondenza, possiamo trovare una successione $(x_n)_n$ in U tale che $f(x_n) = y_n$. Essendo U limitato, esiste un intervallo compatto $[a, b]$ che lo contiene. Per il secondo teorema di Bolzano–Weierstrass esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ che ha un limite $\bar{x} \in [a, b]$. Essendo U è chiuso, deve essere $\bar{x} \in U$. Siccome $\lim\limits_n y_n = s$ e $y_{n_k} = f(x_{n_k})$, la sottosuccessione $(y_{n_k})_k$ ha anch'essa limite s e, per la continuità di f,

$$f(\bar{x}) = f(\lim_k x_{n_k}) = \lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k y_{n_k} = s\,.$$

Il teorema è così dimostrato, per quanto riguarda l'esistenza del massimo. Per il minimo, si procede in modo analogo (oppure, si considera la funzione continua $g = -f$ e si usa il fatto che g ha massimo). ■

La nozione di completezza

Introduciamo ora il concetto di "completezza" per uno spazio metrico E. Diremo che $(a_n)_n$ è una "successione di Cauchy" in E se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad [\, m \geq \bar{n} \text{ e } n \geq \bar{n}\,] \;\Rightarrow\; d(a_m, a_n) < \varepsilon\,.$$

Lo spazio metrico E si dirà "completo" se ogni successione di Cauchy ha un limite in E.

Si vede facilmente che, se $(a_n)_n$ ha un limite $\ell \in E$, allora è di Cauchy. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, per m e n grandi si avrà che

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, \ell) + d(\ell, a_n) < 2\varepsilon \,.$$

Il viceversa non è sempre vero (ad esempio, $\mathbb{Q}$ non è completo). Abbiamo però il seguente

Teorema. $\mathbb{R}$ *è completo.*

<u>Dimostrazione</u>. Sia $(a_n)_n$ una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Prendendo nella definizione $\varepsilon = 1$, si ha che esiste un $\bar{n}_1$ tale che, scegliendo $m = \bar{n}_1$, per ogni $n \geq \bar{n}_1$ si ha

$$d(a_n, a_{\bar{n}_1}) < 1 \,.$$

Se ne deduce che la successione $(a_n)_n$ è limitata (gli indici che precedono $\bar{n}_1$ sono in numero finito). Quindi $(a_n)_n$ è contenuta in un intervallo del tipo $[a, b]$. Per la proprietà di Bolzano–Weierstrass, esiste una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ che ha un limite $c \in [a, b]$. Vogliamo dimostrare che

$$\lim_n a_n = c \,.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Essendo la successione $(a_n)_n$ di Cauchy,

$$\exists \bar{n} : \quad m \geq \bar{n} \text{ e } n \geq \bar{n} \;\Rightarrow\; d(a_m, a_n) < \varepsilon \,.$$

Inoltre, essendo $\lim_k a_{n_k} = c$ e $\lim_k n_k = +\infty$,

$$\exists \bar{k} : \quad k \geq \bar{k} \;\Rightarrow\; d(a_{n_k}, c) < \varepsilon \;\text{ e }\; n_k \geq \bar{n} \,.$$

Allora, per $n \geq \bar{n}$, si ha

$$d(a_n, c) \leq d(a_n, a_{n_{\bar{k}}}) + d(a_{n_{\bar{k}}}, c) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \,,$$

il che pone fine alla dimostrazione. ∎

Teorema. $\mathbb{C}$ *è completo.*

<u>Dimostrazione</u>. Sia $(a_n)_n$ una successione di Cauchy in $\mathbb{C}$, ossia in $\mathbb{R}^2$. Scriviamo ogni vettore $a_n \in \mathbb{R}^2$ nelle sue coordinate

$$a_n = (a_{n,1}, a_{n,2}) \,.$$

Denotando con $\| \cdot \|$ la norma euclidea, si vede che

$$|a_{m,1} - a_{n,1}| \leq \|a_n - a_m\| \,, \quad |a_{m,2} - a_{n,2}| \leq \|a_n - a_m\| \,,$$

da cui segue che le due successioni $(a_{n,1})_n$, $(a_{n,2})_n$ sono di Cauchy in $\mathbb{R}$. Quindi, essendo $\mathbb{R}$ completo, esistono i limiti

$$\lim_n a_{n,1} = \ell_1 \,, \quad \lim_n a_{n,2} = \ell_2 \,.$$

Sia $\ell = (\ell_1, \ell_2)$, elemento di $\mathbb{R}^2$. Si ha:

$$\|a_n - \ell\| = \sqrt{(a_{n,1} - \ell_1)^2 - (a_{n,2} - \ell_2)^2} \,,$$

e si conclude che $\lim_n a_n = \ell$. ∎

La derivata

Introdurremo ora il concetto di "derivata" di una funzione definita su un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, a valori in $\mathbb{R}$.

Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, dominio di una funzione $f : E \to \mathbb{R}$, e $x_0 \in E$ un punto di accumulazione per E. Se x è un punto di E diverso da x_0, possiamo considerare il "rapporto incrementale"

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} ;$$

si tratta del coefficiente angolare della retta nel piano passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$.

Definizione. *Qualora esso esista, chiameremo il limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

"derivata" di f nel punto x_0, e lo denoteremo con uno dei seguenti simboli:

$$f'(x_0) , \quad Df(x_0) , \quad \frac{df}{dx}(x_0) .$$

Si dice invece che f è "derivabile" in x_0 qualora la derivata sia un numero reale (e non $+\infty$ o $-\infty$). In tal caso, la retta nel piano passante per il punto $(x_0, f(x_0))$ con coefficiente angolare $f'(x_0)$, di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) ,$$

si chiama "retta tangente" al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Si noti che, in alcuni casi, la derivata di f in x_0 potrebbe essere solo un limite destro o un limite sinistro. Questo si verifica tipicamente quando E è un intervallo e x_0 coincide con uno degli estremi.

Osserviamo inoltre che si ha

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

Esempi. 1) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = mx + q$. Allora

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(mx + q) - (mx_0 + q)}{x - x_0} = m .$$

La retta tangente, in questo caso, coincide con il grafico della funzione. Il caso particolare in cui $m = 0$ ci mostra che la derivata di una funzione costante è sempre nulla.

2) Sia $f(x) = x^n$. Allora

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k} \right) = n x_0^{n-1} .$$

Lo vediamo anche in un altro modo:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k - x_0^n \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^{k-1} \right) \\ &= n x_0^{n-1} . \end{aligned}$$

3) Sia $f(x) = e^x$. Allora

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0 + h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0} .$$

4) Sia $f(x) = \cos x$. Allora

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x_0 + h) - \cos(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x_0)\cos(h) - \sin(x_0)\sin(h) - \cos(x_0)}{h} \\ &= -\cos(x_0) \lim_{h \to 0} h \frac{1 - \cos(h)}{h^2} - \sin(x_0) \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} \\ &= -\sin(x_0) . \end{aligned}$$

5) Sia $g(x) = \sin x$. Allora

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= -\sin(x_0) \lim_{h \to 0} h \frac{1 - \cos(h)}{h^2} + \cos(x_0) \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} \\ &= \cos(x_0) . \end{aligned}$$

Il seguente teorema ci fornisce una caratterizzazione della derivabilità.

Teorema. *La funzione f è derivabile in x_0 se e solo se esiste un numero reale ℓ per cui si possa scrivere*

$$f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + r(x) ,$$

dove r è una funzione tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0 .$$

In tal caso, si ha $\ell = f'(x_0)$.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia derivabile in x_0. Allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \,.$$

Quindi, ponendo $r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, essa verifica le proprietà richieste, con $\ell = f'(x_0)$.

Viceversa, supponiamo che $f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + r(x)$, con

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0 \,.$$

Allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \ell(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \,,$$

da cui

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \,.$$

■

Vediamo ora che la derivabilità implica la continuità.

Teorema. *Se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.*

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} \left[f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \right] \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0) \,, \end{aligned}$$

il che è equivalente a dire che f è continua in x_0. ■

Alcune formule di derivazione

Vediamo ora alcune regole che si usano abitualmente.

Teorema. *Se $f, g : E \to \mathbb{R}$ sono derivabili in x_0, anche $f + g$ lo è, e si ha*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \,.$$

Dimostrazione. Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \,, \end{aligned}$$

per cui la formula è dimostrata. ■

Teorema. *Se* $f, g : E \to \mathbb{R}$ *sono derivabili in* x_0*, anche* $f \cdot g$ *lo è, e si ha*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) + f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right] \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) + \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\,,\end{aligned}$$

e si conclude, ricordando che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, essendo f continua in x_0. ■

Il caso particolare in cui g è costante con valore $\alpha \in \mathbb{R}$ ci fornisce la formula seguente:

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)\,.$$

Inoltre, scrivendo $f - g = f + (-1)g$, si ha:

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)\,.$$

Teorema. *Se* $f, g : E \to \mathbb{R}$ *sono derivabili in* x_0 *e* $g(x_0) \neq 0$*, anche* $\frac{f}{g}$ *lo è, e si ha*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\,.$$

Dimostrazione. Si ha che $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, per cui dimostreremo dapprima che $\frac{1}{g}$ è derivabile in x_0:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\,.$$

Quindi,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g}(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\,,$$

da cui la tesi. ■

Esempi. 1) Consideriamo la funzione "tangente":

$$F(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\,.$$

Prendendo $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$, si ha [7]

$$F'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} = \frac{\cos^2(x_0) + \sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)} = \frac{1}{\cos^2(x_0)}\,.$$

[7] Qui e nel seguito scriveremo $\cos^2(x)$ e $\sin^2(x)$ per indicare $(\cos(x))^2$ e $(\sin(x))^2$, rispettivamente. Anche in questo caso, si può scrivere $\cos^2 x$ e $\sin^2 x$.

2) Calcoliamo la derivata delle funzioni iperboliche. Sia

$$F(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) \,,$$

allora

$$F'(x_0) = \frac{1}{2}\left(e^{x_0} - \frac{1}{e^{x_0}}\right) = \frac{e^{x_0} - e^{-x_0}}{2} = \sinh(x_0) \,.$$

Analogamente si vede che, se $F(x) = \sinh(x)$, allora $F'(x_0) = \cosh(x_0)$. Inoltre, se $F(x) = \tanh(x)$, allora, essendo $F(x) = f(x)/g(x)$, si ha

$$F'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} = \frac{\cosh^2(x_0) - \sinh^2(x_0)}{\cosh^2(x_0)} = \frac{1}{\cosh^2(x_0)} \,.$$

3) Sono derivabili tutte le funzioni polinomiali

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \,,$$

con derivata

$$F(x_0) = n a_n x_0^{n-1} + (n-1)a_{n-2}x_0^{n-1} + \ldots + 2a_2 x_0 + a_1 \,.$$

Ne segue che sono derivabili anche tutte le funzioni razionali, del tipo

$$F(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \,,$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi, con l'accortezza di scegliere un punto x_0 in cui $q(x_0) \neq 0$.

Vediamo ora come si calcola la derivata di una funzione composta.

Teorema. *Se $f : E \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0, e $g : E' \to \mathbb{R}$ è derivabile in $f(x_0)$, dove E' è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, contenente $f(E)$, per cui $f(x_0)$ è di accumulazione, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0, e si ha*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) \,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Ponendo $y_0 = f(x_0)$, si ha

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x) \,, \quad g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + r_2(y) \,,$$

con

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_1(x)}{x - x_0} = 0 \,, \qquad \lim_{y \to y_0} \frac{r_2(y)}{y - y_0} = 0 \,.$$

Introduciamo la funzione ausiliaria $R_2 : E' \to \mathbb{R}$ così definita:

$$R_2(y) = \begin{cases} \dfrac{r_2(y)}{y - y_0} & \text{se } y \neq y_0 \,, \\[2ex] 0 & \text{se } y = y_0 \,. \end{cases}$$

Si noti che R_2 è continua in y_0, e che

$$r_2(y) = R_2(y)(y - y_0)\,, \qquad \text{per ogni } y \in E'.$$

Allora

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))[f(x) - f(x_0)] + r_2(f(x)) \\ &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))[f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x)] + r_2(f(x)) \\ &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + r_3(x)\,, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} r_3(x) &= g'(f(x_0))r_1(x) + r_2(f(x)) \\ &= g'(f(x_0))r_1(x) + R_2(f(x))(f(x) - f(x_0))\,. \end{aligned}$$

Quindi, essendo f continua in x_0 e R_2 continua in $y_0 = f(x_0)$, abbiamo che $R_2 \circ f$ è continua in x_0, con valore $R_2(f(x_0)) = R_2(y_0) = 0$, per cui

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_3(x)}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \lim_{x\to x_0} \frac{r_1(x)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} R_2(f(x)) \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0\,.$$

Ne segue che $g \circ f$ è derivabile in x_0 con derivata $g'(f(x_0))f'(x_0)$. ■

Esempi. 1) Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = \cos(e^x)$. Si ha che $h = g \circ f$, con $f(x) = e^x$ e $g(y) = \cos y$. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha che $f'(x_0) = e^{x_0}$. Se $y_0 = f(x_0)$, abbiamo che $g'(y_0) = -\sin y_0$. Pertanto, la derivata di h in x_0 è

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) = -\sin(e^{x_0})\, e^{x_0}\,.$$

2) Sia ora $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = e^{\cos x}$. Allora $h = g \circ f$, con $f(x) = \cos x$ e $g(y) = e^y$. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha che $f'(x_0) = -\sin x_0$. Se $y_0 = f(x_0)$, abbiamo che $g'(y_0) = e^{y_0}$. Pertanto, la derivata di h in x_0 è

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) = e^{\cos x_0}\,(-\sin x_0)\,.$$

Vedremo ora come calcolare la derivata dell'inversa di una funzione invertibile.

Teorema. *Siano I, J due intervalli e $f : I \to J$ una funzione invertibile strettamente monotona. Se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

Dimostrazione. Applicando il teorema del limite di una funzione composta, abbiamo

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to \lim_{y\to y_0} f^{-1}(y)} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}\,;$$

Essendo f^{-1} continua, si ha che $\lim_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$, da cui la tesi. ■

Esempio. Se $f(x) = e^x$, si ha che $f^{-1}(y) = \ln y$, per cui, essendo $y_0 = e^{x_0}$,

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{y_0}\,.$$

Sia ora α un numero reale e $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da $h(x) = x^\alpha$. Essendo

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}\,,$$

si ha che $h = g \circ f$, con $f(x) = \alpha \ln x$ e $g(y) = e^y$. Allora

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) = e^{\alpha \ln x_0}\alpha \frac{1}{x_0} = x_0^\alpha \alpha \frac{1}{x_0} = \alpha x_0^{\alpha-1}\,.$$

Quindi, la stessa formula trovata per un esponente n naturale continua a valere anche per un esponente α non intero.

La funzione derivata

Consideriamo una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo.[8] Diremo che "f è derivabile" se lo ìn ogni punto di I. In tal caso, ad ogni $x \in I$ resta associato il numero reale $f'(x)$, per cui è ben definita una funzione $f' : I \to \mathbb{R}$, detta "funzione derivata". Abbiamo la seguente tabella:

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\dots$	$\dots$

Ci si può ora chiedere se la funzione derivata sia a sua volta derivabile in qualche punto di I. Se f' è derivabile in un punto x_0, chiameremo la sua derivata $(f')'(x_0)$ "derivata seconda" di f in x_0 e la denoteremo con uno dei seguenti simboli:

$$f''(x_0)\,, \quad D^2 f(x_0)\,, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)\,.$$

[8] Nel seguito considereremo solo intervalli non degeneri, ossia non ridotti ad un solo punto.

Si può procedere per induzione e definire, in generale, la derivata n-esima di f in x_0, che denoteremo con uno dei seguenti simboli:

$$f^{(n)}(x_0)\,, \quad D^n f(x_0)\,, \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)\,;$$

si ha $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$.

Se una funzione f possiede derivata n-esima in un punto x_0 per ogni $n \geq 1$, si dice che essa è "derivabile infinite volte" in x_0. Ad esempio, la funzione esponenziale $f(x) = e^x$ lo è, in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$. In questo caso, si ha

$$D^n e^x = e^x\,, \quad \text{per ogni } n \geq 1\,.$$

Proprietà notevoli della funzione derivata

Diremo che $x_0 \in I$ è un "punto di massimo locale" per la funzione $f : I \to \mathbb{R}$ se esiste un intormo U di x_0 per cui x_0 è punto di massimo della restrizione di f a $U \cap I$. Equivalentemente, se

$$\exists \delta > 0 : \ \forall x \in I \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \ \Rightarrow \ f(x) \leq f(x_0)\,.$$

Analogamente per "punto di minimo locale".

Calcoliamo ora la derivata nei punti di massimo o di minimo locale, che siano *interni* ad I.

Teorema (di Fermat). *Sia x_0 un punto interno ad I, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0. Se inoltre x_0 è un punto di massimo o di minimo locale per f, allora $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Se x_0 è punto di massimo locale, per x in un intorno di x_0 contenuto in I si ha che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x < x_0\,, \\ \leq 0 & \text{se } x > x_0\,. \end{cases}$$

Siccome f è derivabile in x_0, abbiamo che esiste il limite del rapporto incrementale e coincide con i limiti destro e sinistro:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Da quanto sopra, per il corollario al teorema della permanenza del segno,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \leq \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,,$$

e quindi deve essere $f'(x_0) = 0$. Nel caso in cui x_0 sia un punto di minimo locale, si procede in modo analogo. ■

Normalmente la derivata, essendo un limite, ci dà un'informazione di tipo locale sul comportamento della funzione. Il seguente teorema, invece, con la generalizzazione che ne seguirà, ci porterà all'uso della derivata per avere informazioni generali sull'andamento del grafico di una funzione.

Teorema (di Rolle). *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, derivabile su $]a,b[$ e tale che*

$$f(a) = f(b)\,,$$

allora esiste un punto $\xi \in]a,b[$ tale che $f'(\xi) = 0$.

Dimostrazione. Se la funzione è costante, allora la sua derivata si annulla in tutti i punti, e la conclusione è banalmente vera. Supponiamo ora che f non sia costante. Esiste quindi un $\bar{x} \in]a,b[$ tale che

$$f(\bar{x}) < f(a) = f(b)\,, \quad \text{oppure} \quad f(\bar{x}) > f(a) = f(b)\,.$$

Supponiamo valga il primo caso. Per il teorema di Weierstrass, f ha minimo in $[a,b]$, e nel caso considerato un punto di minimo deve necessariamente essere in $]a,b[$. Sia $\xi \in]a,b[$ un tale punto. Per il teorema di Fermat, avremo che $f'(\xi) = 0$.

La situazione è analoga nel secondo caso. Per il teorema di Weierstrass, f ha massimo in $[a,b]$, e in questo caso un punto di massimo deve necessariamente essere in $]a,b[$. Se $\xi \in]a,b[$ è un tale punto, per il teorema di Fermat avremo che $f'(\xi) = 0$. ■

Enunciamo ora una generalizzazione del teorema di Rolle.

Teorema (di Lagrange). *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, derivabile su $]a,b[$, allora esiste un punto $\xi \in]a,b[$ tale che*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Dimostrazione. Definiamo la funzione

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)\,.$$

Si ha che $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, derivabile su $]a,b[$ e tale che

$$g(a) = 0 = g(b)\,.$$

Per il teorema di Rolle, esiste un punto $\xi \in]a,b[$ tale che

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0\,,$$

da cui la tesi. ■

Corollario. *Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile su $\overset{\circ}{I}$. Si ha che:*

a) se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \overset{\circ}{I}$, allora f è crescente;
b) se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \overset{\circ}{I}$, allora f è strettamente crescente;
c) se $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in \overset{\circ}{I}$, allora f è decrescente;
d) se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \overset{\circ}{I}$, allora f è strettamente decrescente;
e) se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \overset{\circ}{I}$, allora f è costante.

<u>Dimostrazione</u>. Dimostriamo a): siano $x_1 < x_2$ in I. Per il teorema di Lagrange, esiste un $\xi \in]x_1, x_2[$ tale che

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} .$$

Quindi, essendo $f'(\xi) \geq 0$, si deve avere che $f(x_1) \leq f(x_2)$. Questo dimostra che f è crescente.

Le altre si dimostrano in modo analogo. ∎

Si noti che, se f è crescente, allora ogni rapporto incrementale di f è sempre maggiore o uguale a zero e quindi $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \overset{\circ}{I}$ Quindi in a), e così anche in c) ed e), vale anche l'implicazione opposta. Ma così non è per b) e d): se f è strettamente crescente, in generale non è vero che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \overset{\circ}{I}$: la derivata potrebbe annullarsi in qualche punto (vedi ad esempio $f(x) = x^3$).

Funzioni trigonometriche e iperboliche inverse

Tenuto conto della formula per la derivata e delle proprietà di segno delle funzioni trigonometriche, abbiamo che

$$\cos x \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente decrescente su } [0, \pi] , \\ \\ \text{strettamente crescente su } [\pi, 2\pi] , \end{cases}$$

$$\sin x \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente crescente su } \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right] , \\ \text{strettamente decrescente su } \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2} \right] . \end{cases}$$

Consideriamo le funzioni $F : [0, \pi] \to [-1, 1]$ e $G : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ definite da $F(x) = \cos x$ e $G(x) = \sin x$. Sono strettamente monotone, quindi iniettive. Inoltre, essendo continue, la loro immagine è un intervallo e, siccome $F(\pi) = -1 = G(-\frac{\pi}{2})$ e $F(0) = 1 = G(\frac{\pi}{2})$, deve coincidere con $[-1, 1]$. Esse sono pertanto biiettive. Chiameremo le due funzioni $F^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ e $G^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ rispettivamente "arco coseno" e "arco seno" e scriveremo

$$F^{-1}(y) = \arccos y , \quad G^{-1}(y) = \arcsin y .$$

La prima è strettamente decrescente, la seconda strettamente crescente. Calcoliamone le derivate: ponendo $y = F(x)$, per $x \in]0, \pi[$ si ha

$$(F^{-1})'(y) = \frac{1}{F'(x)} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,,$$

mentre ponendo $y = G(x)$, per $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ si ha

$$(G^{-1})'(y) = \frac{1}{G'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$

Si può notare che la funzione arccos + arcsin ha derivata nulla e pertanto è costante. Calcolandola in 0, si trova quindi che

$$\arccos y + \arcsin y = \frac{\pi}{2}\,, \quad \text{per ogni } y \in [-1, 1]\,.$$

Consideriamo ora la funzione $H :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ definita da $H(x) = \tan x$. Per lo stesso tipo di considerazioni, essa risulta invertibile. Chiameremo la funzione $H^{-1} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ "arco tangente" e scriveremo

$$H^{-1}(y) = \arctan y\,.$$

Essa è strettamente crescente e si ha:

$$\lim_{y\to-\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{y\to+\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}\,.$$

Calcoliamone la derivata: ponendo $y = H(x)$, per $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ si ha

$$(H^{-1})'(y) = \frac{1}{H'(x)} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}\,.$$

Passiamo ora alle funzioni iperboliche. La funzione $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente e invertibile. Si vede infatti che

$$\sinh^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1}\,)\,.$$

La derivata si può calcolare direttamente, oppure usando la formula della funzione inversa: se $y = \sinh(x)$, si ha

$$D\sinh^{-1}(y) = \frac{1}{D\sinh(x)} = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,.$$

La funzione $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è né iniettiva (è una funzione pari) né suriettiva: si ha $\cosh x \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. D'altra parte, la funzione $F : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$, definita da $F(x) = \cosh x$, è strettamente crescente, invertibile e la sua inversa $F^{-1} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ è data da

$$F^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2-1}\,)\,.$$

Essa si denota spesso, impropriamente, con $\cosh^{-1}$. Calcoliamone la derivata: ponendo $y = \cosh(x)$, con $x \geq 0$, si ha

$$D\cosh^{-1}(y) = \frac{1}{D\cosh(x)} = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \,.$$

La funzione $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \,,$$

non è suriettiva: si ha $-1 < \tanh x < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. D'altra parte, la funzione $H : \mathbb{R} \to]-1, 1[$, definita da $H(x) = \tanh x$, è strettamente crescente, invertibile e la sua inversa $H^{-1} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ è data da

$$H^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) .$$

Essa si denota spesso, impropriamente, con $\tanh^{-1}$. Ne calcoliamo la derivata: ponendo $y = \tanh(x)$, si ha

$$D\tanh^{-1}(y) = \frac{1}{D\tanh(x)} = \cosh^2(x) = \frac{1}{1 - \tanh^2(x)} = \frac{1}{1 - y^2} \,.$$

Riassumiamo nella tabella sottostante le derivate delle funzioni elementari fin qui trovate.

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\dots$	$\dots$

Una strana proprietà della funzione derivata

È interessante il seguente teorema in cui si afferma che la derivata di una funzione derivabile ha una proprietà analoga a quella vista, per le funzioni continue, nell'enunciato del teorema degli zeri.

Teorema (di Darboux). *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile tale che*

$$f'(a) < 0 < f'(b) \quad \text{oppure} \quad f'(a) > 0 > f'(b)\,,$$

allora esiste un $c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. Consideriamo il primo caso. Sia c un punto di minimo di f, la cui esistenza è garantita dal teorema di Weierstrass. Essendo $f'(a) < 0 < f'(b)$, si vede che il punto c deve essere interno a $[a, b]$, e il teorema di Fermat ci dice che $f'(c) = 0$. Se invece $f'(a) > 0 > f'(b)$, si ragiona in maniera analoga, considerando un punto di massimo anziché di minimo. ■

Come conseguenza del teorema di Darboux, abbiamo che la derivata di una funzione derivabile "manda intervalli in intervalli".

Corollario. *Sia E un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Se $I \subseteq E$ è un intervallo, allora anche $f'(I)$ è un intervallo.*

Dimostrazione. Escludendo i casi banali in cui I o $f'(I)$ consistono di un unico punto, prendiamo $\alpha, \beta \in f'(I)$, con $\alpha < \beta$ e sia γ tale che $\alpha < \gamma < \beta$. Vogliamo vedere che $\gamma \in f'(I)$. Consideriamo la funzione $g : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = f(x) - \gamma x\,.$$

Siano a, b in I tali che $f'(a) = \alpha$ e $f'(b) = \beta$. Essendo I un intervallo, la funzione g è definita su $[a, b]$ (o $[b, a]$, nel caso in cui $b < a$) ed è ivi derivabile. Inoltre, $g'(a) < 0 < g'(b)$ e quindi, per il teorema di Darboux, esiste un $c \in]a, b[$ tale che $g'(c) = 0$. Essendo $g'(x) = f'(x) - \gamma$, si ha che $f'(c) = \gamma$. ■

Vediamo ora un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, la cui derivata non è continua. Consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0\,, \\ \\ 0 & \text{se } x = 0\,, \end{cases}$$

e calcoliamone la derivata. Se $x \neq 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} f'(x) = D\left[x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

mentre, se $x = 0$,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x\to 0}\, x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,.$$

La funzione è quindi derivabile. Notiamo che non esiste il $\lim_{x\to 0} f'(x)$, per cui la funzione f' non è continua in 0.

Convessità e concavità

Sia I un intervallo non degenere e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione.

Definizione. *Diremo che f è "convessa" se, comunque presi tre punti $x_1 < x_2 < x_3$ in I, si ha che*

$$(a) \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \,.$$

Vediamo che sono equivalenti ad (a) le seguenti:

$$(b) \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \,,$$

$$(c) \qquad \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \,.$$

Infatti,

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (f(x_2) - f(x_1))(x_3 - x_2) \leq (f(x_3) - f(x_2))(x_2 - x_1) \\
&\Leftrightarrow (f(x_2) - f(x_1))(x_3 - x_1 + x_1 - x_2) \leq (f(x_3) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2))(x_2 - x_1) \\
&\Leftrightarrow (f(x_2) - f(x_1))(x_3 - x_1) \leq (f(x_3) - f(x_1))(x_2 - x_1) \\
&\Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \,,
\end{aligned}$$

per cui $(a) \Leftrightarrow (b)$; analogamente si vede che $(a) \Leftrightarrow (c)$.

Osserviamo che $f : I \to \mathbb{R}$ è convessa se e solo se, per ogni x_0 in I, la funzione "rapporto incrementale" $F : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, definita da

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \,,$$

è crescente. Infatti, presi x, x' in $I \setminus \{x_0\}$ tali che $x < x'$, si ha $F(x) \leq F(x')$, e questo accade in tutti e tre i casi possibili: $x < x' < x_0$, oppure $x < x_0 < x'$, oppure $x_0 < x < x'$. A questo punto, diventa naturale la seguente caratterizzazione della convessità.

Teorema. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è continua, derivabile su $\mathring{I}$, allora f è convessa se e solo se f' è crescente su $\mathring{I}$.*

<u>Dimostrazione</u>. Supponiamo che f sia convessa. Siano $\alpha < \beta$ due punti in $\mathring{I}$. Se $\alpha < x < \beta$, per (b) si ha

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \,,$$

da cui, essendo f derivabile in α,

$$f'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} .$$

Analogamente, per (c) si ha

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x} .$$

da cui, essendo f derivabile in β,

$$f'(\beta) = \lim_{x \to \beta^-} \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x} \geq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} .$$

Ne segue che $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$, il che dimostra che f' è crescente.

Viceversa, supponiamo f' crescente. Presi $x_1 < x_2 < x_3$, per il teorema di Lagrange abbiamo che

$$\begin{aligned} \exists\, \xi_1 \in]x_1, x_2[:\ f'(\xi_1) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ \exists\, \xi_2 \in]x_2, x_3[:\ f'(\xi_2) &= \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} . \end{aligned}$$

Essendo f' crescente, si ha che $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$; ne segue (a). ■

Diremo che f è "strettamente convessa" se, comunque presi tre punti $x_1 < x_2 < x_3$ in I, si ha

$$(a') \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} .$$

Equivalentemente, possiamo scrivere le analoghe

$$(b') \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} ,$$

$$(c') \qquad \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} .$$

Vale la seguente caratterizzazione.

Teorema. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è continua, derivabile su $\mathring{I}$, allora f è strettamente convessa se e solo se f' è strettamente crescente su $\mathring{I}$.*

<u>Dimostrazione</u>. Dovremo modificare un pochino la dimostrazione del teorema precedente. Supponiamo che f sia strettamente convessa e siano $\alpha < \beta$ due punti in $\mathring{I}$. Se $\alpha < x < \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, per (b') si ha

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < \frac{f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} ,$$

da cui

$$f'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq \frac{f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}\,.$$

Analogamente, se $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) < x < \beta$, per (c') si ha

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} < \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x}\,.$$

da cui

$$f'(\beta) = \lim_{x \to \beta^-} \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x} \geq \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} > \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}\,.$$

Ne segue che $f'(\alpha) < f'(\beta)$, il che dimostra che f' è strettamente crescente.

Viceversa, supponiamo f' crescente. Presi $x_1 < x_2 < x_3$, usando il teorema di Lagrange, esattamente come per il teorema precedente si dimostra che vale (a'). ■

Diremo che f è "concava" se la funzione $(-f)$ è convessa o, equivalentemente, se vale (a) ma con il segno di disugualianza invertito. Diremo che f è "strettamente concava" se la funzione $(-f)$ è strettamente convessa o, equivalentemente, se vale (a') ma con il segno di disugualianza invertito. Si possono scrivere, naturalmente, gli analoghi teoremi che caratterizzano la concavità (o la stretta concavità) di f con la decrescenza (o la stretta decrescenza) di f'.

Arriviamo quindi al seguente corollario, che trova spesso applicazione in situazioni pratiche.

Corollario. *Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile due volte su $\mathring{I}$. Si ha che:*

a) se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathring{I}$, allora f è convessa;
b) se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathring{I}$, allora f è strettamente convessa;
c) se $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathring{I}$, allora f è concava;
d) se $f''(x) < 0$ per ogni $x \in \mathring{I}$, allora f è strettamente concava.

Analogamente a quanto già osservato per le funzioni monotone, anche qui in a) e c) valgono anche le implicazioni opposte: se f è convessa, allora $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathring{I}$, e similmente se f è concava. Ma così non è per b) e d) (vedi ad esempio $f(x) = x^4$).

Esempi. 1) La funzione esponenziale $f(x) = e^x$ è strettamente convessa: si ha

$$f''(x) = e^x > 0\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. La sua inversa $\ln(x)$, il logaritmo naturale, è una funzione strettamente concava.

2) Tenuto conto delle derivate delle funzioni trigonometriche, si ha che:

$$\cos x \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente concava su } \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], \\[2ex] \text{strettamente convessa su } \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right], \end{cases}$$

$$\sin x \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente concava su } [0, \pi], \\[2ex] \text{strettamente convessa su } [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

I punti che separano un intervallo in cui si ha convessità da un altro in cui si ha concavità si chiamano "punti di flesso".

Analoghe considerazioni si possono fare per le altre funzioni elementari fin qui studiate.

Sarà utile la seguente proprietà delle funzioni convesse derivabili: in breve, essa dice che il loro grafico sta sempre al di sopra delle rette ad esso tangenti.

Teorema. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è convessa e derivabile in un punto $x_0 \in I$, allora*

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

per ogni $x \in I$.

Dimostrazione. La disguaglianza è sicuramente verificata se $x = x_0$. Se $x > x_0$, preso $h > 0$ tale che $h < x - x_0$, per la convessità si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Passando al limite per $h \to 0$, si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0),$$

da cui la disuguaglianza cercata.

Se $x < x_0$, preso $h < 0$ tale che $|h| < x_0 - x$, per la convessità si ha

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{-h},$$

e si conclude analogamente. ■

Le regole di de l'Hôpital

Iniziamo con l'introdurre la seguente generalizzazione del teorema di Lagrange.

Teorema (di Cauchy). *Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue, derivabili su $]a, b[$, con $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$, allora esiste un punto $\xi \in]a, b[$ tale che*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} .$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$h(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x) .$$

Si vede che essa è continua, derivabile su $]a, b[$, e $h(a) = h(b)$. Per il teorema di Rolle, esiste un punto $\xi \in]a, b[$ tale che $h'(\xi) = 0$. Ne segue la tesi. ■

Il seguente risultato è noto come "regola di de l'Hôpital" nel caso indeterminato del tipo $\frac{0}{0}$.

Teorema. *Sia I un intervallo e $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili, con $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$, tali che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 .$$

Se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} ,$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} ,$$

e i due coincidono.

Dimostrazione. Sia $l = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (possibilmente $l = +\infty$ o $-\infty$); estendiamo le due funzioni anche al punto x_0 ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$. In questo modo f e g saranno continue su tutto I. Per il teorema di Cauchy, per ogni $x \neq x_0$ esiste un punto $\xi_x \in]x_0, x[$ (che dipende da x) [9] tale che

$$\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Se $x \to x_0$, si ha che anche $\xi_x \to x_0$, per cui, usando il teorema sul limite di una funzione composta,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \lim_{y \to x_0} \frac{f'(y)}{g'(y)} = l .$$

■

[9] Qui e nel seguito, nel caso in cui x sia minore di x_0, con il simbolo $]x_0, x[$ si intende indicare l'intervallo $]x, x_0[$.

Il teorema precedente non esclude la possibilità che x_0 sia un estremo dell'intervallo I, nel qual caso si parlerà di limite destro o limite sinistro.

La regola di de l'Hôpital si estende anche ai casi in cui $x_0 = +\infty$ o $-\infty$. Vediamo qui il primo caso.

Teorema. *Sia I un intervallo non limitato superiormente e $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili, con $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$, tali che*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0\,.$$

Se esiste il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\,,$$

e i due coincidono.

Dimostrazione. Sia $l = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$; definendo le due funzioni $F(x) = f(x^{-1})$ e $G(x) = g(x^{-1})$, si ha che $G'(x) \neq 0$ per ogni x e

$$\lim_{x\to0^+} F(x) = \lim_{x\to0^+} G(x) = 0\,.$$

Inoltre,

$$\lim_{x\to0^+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{f'(x^{-1})(-x^{-2})}{g'(x^{-1})(-x^{-2})} = \lim_{x\to0^+} \frac{f'(x^{-1})}{g'(x^{-1})} = \lim_{y\to+\infty} \frac{f'(y)}{g'(y)} = l\,.$$

Per il teorema precedente, si ha che anche $\lim_{x\to0^+} \frac{F(x)}{G(x)} = l$; pertanto,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u\to0^+} \frac{f(u^{-1})}{g(u^{-1})} = \lim_{u\to0^+} \frac{F(u)}{G(u)} = l\,.$$

■

Risulta talvolta utile il seguente

Teorema. *Sia I un intervallo contenente x_0 e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione, continua in x_0, e derivabile in ogni $x \neq x_0$. Se esiste il limite*

$$l = \lim_{x\to x_0} f'(x)\,,$$

allora esiste anche la derivata di f in x_0 e si ha $f'(x_0) = l$.

Dimostrazione. Siano $F(x) = f(x) - f(x_0)$ e $G(x) = x - x_0$. Abbiamo che

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} G(x) = 0\,,$$

e

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to x_0} f'(x) = l\,.$$

La regola di de l'Hôpital ci dice quindi che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)}{G(x)} = l\,,$$

ossia $f'(x_0) = l$. ■

Vediamo ora che le regole di de l'Hôpital continuano a valere anche nei casi indeterminati del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, dove ∞ può essere $+\infty$ o $-\infty$. Ad esempio, nel caso in cui x_0 sia un numero reale, si ha il seguente

Teorema. *Sia I un intervallo contenente x_0 e $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili, con $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$, tali che*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty\,, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty\,.$$

Se esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}\,,$$

e i due coincidono.

Dimostrazione. Sia $l = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Supponiamo dapprima $l \in \mathbb{R}$, e che x_0 non sia l'estremo destro dell'intervallo I. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora esiste un $\delta_1 > 0$ tale che

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \;\Rightarrow\; \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Per il teorema di Cauchy, per ogni $x \in]x_0, x_0+\delta_1[$, esiste un $\xi_x \in]x, x_0+\delta_1[$ tale che

$$\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \frac{f(x_0+\delta_1)-f(x)}{g(x_0+\delta_1)-g(x)}\,,$$

per cui

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \;\Rightarrow\; \left| \frac{f(x_0+\delta_1)-f(x)}{g(x_0+\delta_1)-g(x)} - l \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Possiamo inoltre supporre che δ_1 sia tale che

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \;\Rightarrow\; f(x) \neq 0 \;\text{ e }\; g(x) \neq 0\,.$$

Scriviamo

$$\frac{f(x_0+\delta_1)-f(x)}{g(x_0+\delta_1)-g(x)} = \psi(x)\frac{f(x)}{g(x)}\,,$$

e osserviamo che

$$\lim_{x\to x_0} \psi(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{1 - f(x_0+\delta_1)/f(x)}{1 - g(x_0+\delta_1)/g(x)} = 1\,.$$

Pertanto, esiste un $\delta \in]0, \delta_1[$ tale che, se $x_0 < x < x_0 + \delta$, allora

$$\psi(x) > 0\,, \quad \psi(x)(l+\varepsilon) \geq l + \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ e } \ \psi(x)(l-\varepsilon) \leq l - \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Quindi, se $x_0 < x < x_0 + \delta$, si ha

$$l - \varepsilon \leq \frac{1}{\psi(x)}\Big(l - \frac{\varepsilon}{2}\Big) \leq \frac{1}{\psi(x)} \, \frac{f(x_0+\delta_1) - f(x)}{g(x_0+\delta_1) - g(x)} \leq \frac{1}{\psi(x)}\Big(l + \frac{\varepsilon}{2}\Big) \leq l + \varepsilon\,,$$

da cui

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| \leq \varepsilon\,.$$

Abbiamo così dimostrato che

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l\,.$$

In modo del tutto analogo si dimostra che, se x_0 non è l'estremo sinistro dell'intervallo I, allora

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l\,,$$

per cui il teorema è dimostrato, nel caso in cui $l \in \mathbb{R}$.

Supponiamo ora $l = +\infty$ e che x_0 non sia l'estremo destro dell'intervallo I. Fissiamo $\alpha > 0$. Allora esiste un $\delta_1 > 0$ tale che

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \ \Rightarrow\ \frac{f'(x)}{g'(x)} \geq 2\alpha\,.$$

Procedendo come sopra, possiamo dedurre che

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \ \Rightarrow\ \frac{f(x_0+\delta_1) - f(x)}{g(x_0+\delta_1) - g(x)} \geq 2\alpha\,.$$

Possiamo inoltre supporre che δ_1 sia tale che

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \ \Rightarrow\ f(x) \neq 0 \ \text{ e } \ g(x) \neq 0\,.$$

Definiamo $\psi(x)$ come sopra. Esiste un $\delta \in]0, \delta_1[$ tale che

$$x_0 < x < x_0 + \delta \ \Rightarrow\ \psi(x) \leq 2\,.$$

Quindi, se $x_0 < x < x_0 + \delta$, si ha

$$\frac{1}{\psi(x)} \, \frac{f(x_0+\delta_1) - f(x)}{g(x_0+\delta_1) - g(x)} \geq \frac{1}{\psi(x)}\, 2\alpha \geq \alpha\,,$$

da cui

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq \alpha \,.$$

Abbiamo così dimostrato che

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \,.$$

In modo del tutto analogo si dimostra che, se x_0 non è l'estremo sinistro dell'intervallo I, allora

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \,,$$

per cui il teorema è dimostrato, nel caso in cui $l = +\infty$. Il caso $l = -\infty$ è del tutto analogo al precedente. ■

Anche nel caso indeterminato del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ si possono scrivere gli analoghi teoremi se $x_0 = +\infty$ o $-\infty$. Vediamo il primo caso.

Teorema. *Sia I un intervallo non limitato superiormente e $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili, con $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$, tali che*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty \,, \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = \infty \,.$$

Se esiste il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \,,$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \,,$$

e i due coincidono.

La dimostrazione è analoga a quella del caso $\frac{0}{0}$.

La teoria dell'integrale

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione *limitata.* Questo significa che esistono due costanti c, C tali che

$$c \leq f(x) \leq C \,, \qquad \text{per ogni } x \in [a, b] \,.$$

Consideriamo una *suddivisione* dell'intervallo $[a, b]$: si tratta di un insieme finito di punti

$$\mathcal{D} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \,,$$

tali che

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \,.$$

Definiamo i numeri reali

$$\ell'_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \,, \quad \ell''_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \,,$$

(si ricordi che f è limitata) e le corrispondenti somme

$$\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n} \ell'_k (x_k - x_{k-1})\,, \quad \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n} \ell''_k (x_k - x_{k-1})\,,$$

che chiameremo *somma inferiore* e *somma superiore*, rispettivamente. Si noti che $\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \leq \mathcal{S}''(f,\mathcal{D})$, per ogni suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a,b]$.

Lemma. *Valgono le seguenti proprietà di monotonia:*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2 \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}_1) \leq \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}_2)\,, \\ \mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2 \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}_1) \geq \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}_2)\,. \end{aligned}$$

Inoltre, se $\mathcal{D}$ e $\widetilde{\mathcal{D}}$ sono due suddivisioni qualiasi di $[a,b]$, allora

$$\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \leq \mathcal{S}''(f,\widetilde{\mathcal{D}})\,.$$

Dimostrazione. Per quanto riguarda le proprietà di monotonia, basterà dimostrare che esse valgono qualora $\mathcal{D}_2$ abbia un unico punto in più di $\mathcal{D}_1$, per poi iterare il ragionamento nel caso generale. Siano quindi

$$\mathcal{D}_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}\,, \quad \mathcal{D}_2 = \{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, \hat{x}, x_m, \ldots, x_n\}\,,$$

dove $\hat{x}$ è il punto aggiuntivo. Allora, posto

$$\ell'_{m,1} = \inf\{f(x) : x \in [x_{m-1}, \hat{x}]\}\,, \quad \ell'_{m,2} = \inf\{f(x) : x \in [\hat{x}, x_m]\}\,,$$

si vede che $\ell'_m \leq \ell'_{m,1}$ e $\ell'_m \leq \ell'_{m,2}$, per cui

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}_2) - \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}_1) &= \ell'_{m,1}(\hat{x} - x_{m-1}) + \ell'_{m,2}(x_m - \hat{x}) - \ell'_m(x_m - x_{m-1}) \\ &\geq \ell'_m(\hat{x} - x_{m-1}) + \ell'_m(x_m - \hat{x}) - \ell'_m(x_m - x_{m-1}) = 0\,. \end{aligned}$$

In modo analogo, posto

$$\ell''_{m,1} = \sup\{f(x) : x \in [x_{m-1}, \hat{x}]\}\,, \quad \ell''_{m,2} = \sup\{f(x) : x \in [\hat{x}, x_m]\}\,,$$

si vede che $\ell''_m \geq \ell''_{m,1}$ e $\ell''_m \geq \ell''_{m,2}$, per cui

$$\begin{aligned} \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}_2) - \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}_1) &= \ell''_{m,1}(\hat{x} - x_{m-1}) + \ell''_{m,2}(x_m - \hat{x}) - \ell''_m(x_m - x_{m-1}) \\ &\leq \ell''_m(\hat{x} - x_{m-1}) + \ell''_m(x_m - \hat{x}) - \ell''_m(x_m - x_{m-1}) = 0\,. \end{aligned}$$

Siano ora $\mathcal{D}$ e $\widetilde{\mathcal{D}}$ due suddivisioni qualiasi di $[a,b]$. Allora $\mathcal{D} \cup \widetilde{\mathcal{D}}$ è anch'essa una suddivisione di $[a,b]$, e si ha

$$\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \leq \mathcal{S}'(f,\mathcal{D} \cup \widetilde{\mathcal{D}}) \leq \mathcal{S}''(f,\mathcal{D} \cup \widetilde{\mathcal{D}}) \leq \mathcal{S}''(f,\widetilde{\mathcal{D}})\,,$$

per cui il lemma è dimostrato. ■

Ricordando che f è una funzione limitata, possiamo dare la seguente

Definizione. *Se il numero reale*

$$\sigma'(f) = \sup\{\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ è una suddivisione di } [a,b]\}$$

coincide con

$$\sigma''(f) = \inf\{\mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ è una suddivisione di } [a,b]\}\,,$$

tale numero reale si chiama **integrale** *di f su $[a,b]$, e si indica con uno dei simboli*

$$\int_a^b f\,, \qquad \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

In tal caso si dice che la funzione f è **integrabile** *(secondo Riemann) su $[a,b]$.*

Quindi, l'integrale di f su $[a,b]$, se esiste, è quel $\sigma \in \mathbb{R}$ con questa proprietà:

per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due suddivisioni $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ di $[a,b]$ per cui

$$\sigma - \varepsilon \leq \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}_1) \leq \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}_2) \leq \sigma + \varepsilon\,.$$

Equivalentemente, tenendo conto delle proprietà di monotonia viste sopra,

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a,b]$ per cui

$$\sigma - \varepsilon \leq \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \leq \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) \leq \sigma + \varepsilon\,.$$

Esempio 1. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione costante di valore $\alpha \in \mathbb{R}$. Si verifica rapidamente che, per ogni suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a,b]$, si ha $\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) = \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) = \alpha(b-a)$. Ne segue quindi che $\int_a^b f = \alpha(b-a)$, ossia che

$$\int_a^b \alpha\,dx = \alpha(b-a)\,.$$

Esempio 2. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x$. Vogliamo dimostrare che è integrabile e calcolarne l'integrale. Considerata una qualunque suddivisione $\mathcal{D}$, si vede subito che, essendo f strettamente crescente, $\ell'_k = f(x_{k-1}) = x_{k-1}$ e $\ell''_k = f(x_k) = x_k$. Pertanto,

$$\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^n x_{k-1}(x_k - x_{k-1})\,, \quad \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^n x_k(x_k - x_{k-1})\,.$$

Notiamo ora che, prendendo $\xi_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$,

$$\sum_{k=1}^n \xi_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \tfrac{1}{2}(x_{k-1}+x_k)(x_k - x_{k-1}) = \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^n (x_k^2 - x_{k-1}^2) = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)\,,$$

essendo quest'ultima una somma telescopica. Questo ci porta a congetturare che $\int_a^b f$ sia proprio uguale a $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$, ossia che

$$\int_a^b x\,dx = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)\,.$$

Dimostriamolo. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\mathcal{D}$ una suddivisione costituita da punti equidistanti, ossia

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}\, k\,, \qquad \text{con } k = 1, 2, \dots, n\,.$$

Allora, per n sufficientemente grande,

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(b^2 - a^2) - \mathcal{S}'(f, \mathcal{D}) &= \sum_{k=1}^{n} \xi_k (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{2n}(x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{b-a}{2n}\,(b-a) < \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Analogamente si vede che

$$\mathcal{S}''(f, \mathcal{D}) - \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2) < \varepsilon\,,$$

per cui

$$\tfrac{1}{2}(b^2 - a^2) - \varepsilon \le \mathcal{S}'(f, \mathcal{D}) \le \mathcal{S}''(f, \mathcal{D}) \le \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2) + \varepsilon\,,$$

e la nostra congettura risulta dimostrata.

Esempio 3. Proponiamo ora un esempio di funzione non integrabile: la *funzione di Dirichlet*, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Si vede infatti che, qualsiasi sia la suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a, b]$, si ha $\ell'_k = 0$ e $\ell''_k = 1$, per ogni k, per cui

$$\mathcal{S}'(f, \mathcal{D}) = 0\,, \quad \mathcal{S}''(f, \mathcal{D}) = b - a\,.$$

Allora anche

$$\sigma'(f) = 0\,, \quad \sigma''(f) = b - a\,,$$

per cui f non è integrabile.

Sarà molto utile il seguente

Criterio di integrabilità. *La funzione f è integrabile su $[a, b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a, b]$ per cui*

$$\mathcal{S}''(f, \mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f, \mathcal{D}) \le \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. Se f è integrabile su $[a, b]$, fissato $\varepsilon > 0$, per le proprietà viste sopra esiste una suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a, b]$ per cui

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} \le \mathcal{S}'(f, \mathcal{D}) \le \mathcal{S}''(f, \mathcal{D}) \le \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

e quindi $\mathcal{S}''(f, \mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f, \mathcal{D}) \le \varepsilon$.

Viceversa, supponiamo che valga la proprietà dell'enunciato. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a,b]$ per cui $\mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \leq \varepsilon$. Se $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ e sono due suddivisioni contenenti $\mathcal{D}$, dalle proprietà di monotonia segue che

$$\mathcal{S}''(f,\mathcal{D}_2) - \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}_1) \leq \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \leq \varepsilon\,,$$

da cui

$$0 \leq \sigma''(f) - \sigma'(f) \leq \varepsilon\,.$$

Essendo $\varepsilon > 0$ aribitrario, deve necessariamente essere che $\sigma'(f) = \sigma''(f)$. ■

Proprietà elementari delle funzioni integrabili

Passiamo ora a enunciare alcune proprietà elementari dell'integrale.

Teorema. *Se f, g sono funzioni integrabili su $[a,b]$, anche $f+g$ lo è, e in tal caso*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g\,.$$

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, esistono una suddivisione $\mathcal{D}_1$ di $[a,b]$ per cui

$$\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}_1) \geq \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

e una suddivisione $\mathcal{D}_2$ di $[a,b]$ per cui

$$\mathcal{S}'(g,\mathcal{D}_2) \geq \int_a^b g - \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Sia $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$; essendo

$$\begin{aligned} &\inf\{f(x) + g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \geq \\ &\qquad \geq \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} + \inf\{g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}\,, \end{aligned}$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'(f+g,\mathcal{D}) &\geq \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) + \mathcal{S}'(g,\mathcal{D}) \\ &\geq \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}_1) + \mathcal{S}'(g,\mathcal{D}_2) \\ &\geq \left(\int_a^b f + \int_a^b g\right) - \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Analogamente, esistono una suddivisione $\widetilde{\mathcal{D}}_1$ di $[a,b]$ per cui

$$\mathcal{S}''(f,\widetilde{\mathcal{D}}_1) \leq \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

e una suddivisione $\widetilde{\mathcal{D}}_2$ di $[a,b]$ per cui

$$\mathcal{S}''(g,\widetilde{\mathcal{D}}_2) \leq \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Sia $\widetilde{\mathcal{D}} = \widetilde{\mathcal{D}}_1 \cup \widetilde{\mathcal{D}}_2$; essendo

$$\begin{aligned}&\sup\{f(x)+g(x) : x \in [x_{k-1},x_k]\} \leq \\ &\qquad\qquad \leq \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1},x_k]\} + \sup\{g(x) : x \in [x_{k-1},x_k]\}\,,\end{aligned}$$

abbiamo che

$$\begin{aligned}\mathcal{S}''(f+g,\widetilde{\mathcal{D}}) &\leq \mathcal{S}''(f,\widetilde{\mathcal{D}}) + \mathcal{S}''(g,\widetilde{\mathcal{D}}) \\ &\leq \mathcal{S}''(f,\widetilde{\mathcal{D}}_1) + \mathcal{S}''(g,\widetilde{\mathcal{D}}_2) \\ &\leq \left(\int_a^b f + \int_a^b g\right) + \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Ne segue la tesi. ■

Teorema. *Se f è una funzione integrabile su $[a,b]$, anche λf lo è, per ogni numero reale λ, e in tal caso*

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f\,.$$

Dimostrazione. Se $\lambda = 0$, l'enunciato è chiaramente vero. Supponiamo quindi $\lambda \neq 0$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste una suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a,b]$ per cui

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \leq \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \leq \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) \leq \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}\,.$$

Si noti che, se $\lambda \geq 0$,

$$\mathcal{S}'(\lambda f,\mathcal{D}) = \lambda \mathcal{S}'(f,\mathcal{D})\,, \quad \mathcal{S}''(\lambda f,\mathcal{D}) = \lambda \mathcal{S}''(f,\mathcal{D})\,,$$

mentre se $\lambda < 0$,

$$\mathcal{S}'(\lambda f,\mathcal{D}) = \lambda \mathcal{S}''(f,\mathcal{D})\,, \quad \mathcal{S}''(\lambda f,\mathcal{D}) = \lambda \mathcal{S}'(f,\mathcal{D})\,.$$

Quindi, in ogni caso,

$$\lambda \int_a^b f - \varepsilon \leq \mathcal{S}'(\lambda f,\mathcal{D}) \leq \mathcal{S}''(\lambda f,\mathcal{D}) \leq \lambda \int_a^b f + \varepsilon\,,$$

da cui la tesi. ■

Teorema. *Se f è una funzione integrabile su $[a,b]$, anche $f^+ = \max\{f,0\}$, $f^- = \max\{-f,0\}$, $|f|$ e f^2 lo sono.*

Dimostrazione. Osserviamo che $f = f^+ - f^-$. Si può verificare che

$$\mathcal{S}''(f^+,\mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f^+,\mathcal{D}) \leq \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f,\mathcal{D})\,,$$

da cui segue che f^+ è integrabile, per il criterio di integrabilità. Quindi anche $f^- = f^+ - f$ è integrabile, e così pure $|f| = f^+ + f^-$.

Siccome $f^2 = |f|^2$, possiamo supporre senza perdita di generalità che sia $f \geq 0$. Osserviamo che, in tal caso,

$$\inf\{f^2(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = (\inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\})^2 = (\ell'_k)^2\,,$$

e

$$\sup\{f^2(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = (\sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\})^2 = (\ell''_k)^2\,.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}''(f^2, \mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f^2, \mathcal{D}) &= \sum_{k=1}^{n} ((\ell''_k)^2 - (\ell'_k)^2)(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\ell''_k + \ell'_k)(\ell''_k - \ell'_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&\leq 2\alpha \sum_{k=1}^{n} (\ell''_k - \ell'_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&= 2\alpha(\mathcal{S}''(f, \mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f, \mathcal{D}))\,,
\end{aligned}$$

dove $\alpha = C - c$ è una costante, determinata dal fatto che f è limitata. Dal criterio di integrabilità segue allora che f^2 è integrabile su $[a, b]$. ■

Teorema. *Se f, g sono funzioni integrabili su $[a, b]$, anche fg lo è.*

Dimostrazione. Segue dalla relazione

$$fg = \tfrac{1}{2}((f + g)^2 - f^2 - g^2)\,,$$

e dai teoremi precedentemente dimostrati. ■

Vediamo ora una stima sulla "media integrale".

Teorema. *Se f è una funzione integrabile su $[a, b]$, allora*

$$\inf f([a, b]) \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx \leq \sup f([a, b])\,.$$

Dimostrazione. Siano $c = \inf f([a, b])$ e $C = \sup f([a, b])$. Se $\mathcal{D}$ è una suddivisione di $[a, b]$, allora

$$c \leq \ell'_k \leq \ell''_k \leq C\,, \qquad \text{per ogni } k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

per cui

$$\mathcal{S}'(f, \mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n} \ell'_k (x_k - x_{k-1}) \geq \sum_{k=1}^{n} c(x_k - x_{k-1}) = c(b - a)\,,$$

mentre

$$\mathcal{S}''(f, \mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n} \ell''_k (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} C(x_k - x_{k-1}) = C(b - a)\,.$$

Pertanto,

$$c \leq \frac{1}{b - a}\, \mathcal{S}'(f, \mathcal{D}) \leq \frac{1}{b - a}\, \mathcal{S}''(f, \mathcal{D}) \leq C\,,$$

e ne segue che $c \leq \sigma'(f) \leq \sigma''(f) \leq C$, da cui la tesi. ■

Corollario. *Se f è una funzione integrabile su $[a,b]$ e $f \geq 0$, allora*

$$\int_a^b f \geq 0\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. È una conseguenza immediata del teorema precedente, essendo $\inf f([a,b]) \geq 0$. ■

Corollario. *Se f, g sono funzioni integrabili su $[a,b]$ e $f \leq g$, allora*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Siccome $g-f \geq 0$, usando la linearità e il corollario precedente, abbiamo che

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g-f) \geq 0\,,$$

da cui la tesi. ■

Corollario. *Se f è integrabile su $[a,b]$, allora*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Si ha che $-|f| \leq f \leq |f|$ per cui, dal corollario precedente,

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|\,,$$

e ne segue la tesi. ■

Abbiamo il seguente **teorema di additività dell'integrale**.

Teorema. *Siano dati $a < c < b$. Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su $[a,b]$ se e solo se lo è su $[a,c]$ e su $[c,b]$. In tal caso,*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Supponiamo che f sia integrabile su $[a,b]$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste una suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a,b]$ tale che

$$\mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \leq \varepsilon\,.$$

Per tale suddivisione $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ci sarà un certo m per cui si ha che $x_{m-1} < c \leq x_m$. Definiamo quindi $\widetilde{\mathcal{D}} = \{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, c\}$, suddivisione di $[a,c]$. Allora

$$\mathcal{S}''(f,\widetilde{\mathcal{D}}) - \mathcal{S}'(f,\widetilde{\mathcal{D}}) \leq \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \leq \varepsilon\,,$$

per cui f è integrabile su $[a,c]$. Analogamente si vede che f è integrabile su $[c,b]$.

Supponiamo ora che f sia integrabile su $[a,c]$ e su $[c,b]$. Fissato $\varepsilon > 0$, esistono una suddivisione $\mathcal{D}_1 = \{x_0, x_1, \dots, c\}$ di $[a,c]$ e una suddivisione $\mathcal{D}_2 = \{c, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\}$ di $[c,b]$ tali che

$$\int_a^c f - \frac{\varepsilon}{2} \le \mathcal{S}'(f, \mathcal{D}_1) \le \mathcal{S}''(f, \mathcal{D}_1) \le \int_a^c f + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$
$$\int_c^b f - \frac{\varepsilon}{2} \le \mathcal{S}'(f, \mathcal{D}_2) \le \mathcal{S}''(f, \mathcal{D}_2) \le \int_c^b f + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Sia $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. Si ha che $\mathcal{D}$ è una suddivisione di $[a,b]$, e

$$\mathcal{S}'(f, \mathcal{D}) = \mathcal{S}'(f, \mathcal{D}_1) + \mathcal{S}'(f, \mathcal{D}_2)\,, \quad \mathcal{S}''(f, \mathcal{D}) = \mathcal{S}''(f, \mathcal{D}_1) + \mathcal{S}''(f, \mathcal{D}_2)\,,$$

per cui

$$\left(\int_a^c f + \int_c^b f\right) - \varepsilon \le \mathcal{S}'(f, \mathcal{D}) \le \mathcal{S}''(f, \mathcal{D}) \le \left(\int_a^c f + \int_c^b f\right) + \varepsilon\,.$$

Abbiamo quindi che l'integrale di f su $[a,b]$ è proprio uguale a $\int_a^c f + \int_c^b f$. ■

Sarà conveniente definire $\int_a^b f$ anche nel caso in cui $a \ge b$, ponendo

$$\int_a^b f = -\int_b^a f\,, \qquad \int_a^a f = 0\,.$$

Vale allora il seguente

Corollario. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile e u, v, w sono tre punti qualsiasi di $[a,b]$, allora*

$$\int_u^w f = \int_u^v f + \int_v^w f\,.$$

Dimostrazione. Il caso $u < v < w$ segue immediatamente dal teorema precedente. Gli altri casi si ottengono facilmente tenendo conto delle convenzioni adottate per gli integrali con estremi uguali o scambiati. ■

Integrazione delle funzioni continue

Ricordo ora che una funzione $f : E \to F$ si dice "continua" se è continua in ogni punto $x_0 \in E$. In altri termini, se

$$\forall x_0 \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ \forall x \in E \quad d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,.$$

Si noti che, in generale, la scelta di δ dipende sia da ε che da x_0. Nel caso in cui tale δ non dipenda da x_0, diremo che la funzione è "uniformemente continua": In tal caso, si ha che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ \forall x_0 \in E \quad \forall x \in E \quad d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,.$$

Vediamo ora un teorema che ci servirà per dimostrare l'integrabilità delle funzioni continue.

Teorema (di Heine). *Se U è un insieme compatto e $f : U \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora f è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che f non sia uniformemente continua. Allora

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0 \quad \exists x_0 \in E \quad \exists x \in E : d(x, x_0) < \delta \quad e \quad d(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon \,.$$

Prendiamo un tale $\varepsilon > 0$ e scegliamo $\delta = \frac{1}{n+1}$, con $n \in \mathbb{N}$. In corrispondenza, esistono[10] x_n^0 e x_n tali che

$$d(x_n, x_n^0) < \frac{1}{n+1} \quad \text{ e } \quad d(f(x_n), f(x_n^0)) \geq \varepsilon \,.$$

Abbiamo così due successioni $(x_n)_n$ e $(x_n^0)_n$ in U. Essendo U compatto, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ che ha un limite $\bar{x} \in U$. Prendiamo ora la sottosuccessione $(x_{n_k}^0)_k$, con gli stessi indici n_k. Siccome $d(x_{n_k}, x_{n_k}^0)$ tende a zero, anche questa sottosuccessione ha lo stesso limite $\bar{x}$. Per la continuità di f, deve essere

$$\lim f(x_{n_k}) = f(\bar{x}) \quad \text{ e } \quad \lim f(x_{n_k}^0) = f(\bar{x}) \,,$$

e pertanto

$$\lim_k d(f(x_{n_k}), f(x_{n_k}^0)) = 0 \,,$$

in contraddizione con il fatto che $d(f(x_{n_k}), f(x_{n_k}^0)) \geq \varepsilon > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. ■

Possiamo ora enunciare il teorema che ci interessa.

Teorema. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora essa è integrabile.*

Dimostrazione. Per il teorema di Weierstrass, f è limitata. Inoltre, sappiamo (per il teorema di Heine) che f è uniformemente continua su $[a, b]$. Pertanto, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$|x - x'| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \,.$$

Sia $\mathcal{D}$ una suddivisione di $[a, b]$ avente tutti i punti equidistanti, con distanza $x_k - x_{k-1} \leq \delta$. Per il Teorema di Weierstrass, esisteranno dei $\xi_k' \in [x_{k-1}, x_k]$ per cui $f(\xi_k') = \ell_k'$ e dei $\xi_k'' \in [x_{k-1}, x_k]$ per cui $f(\xi_k'') = \ell_k''$. Allora

$$\mathcal{S}''(f, \mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f, \mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k'') - f(\xi_k'))\, \frac{b-a}{n} \leq \left(n\, \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \frac{b-a}{n} = \varepsilon \,,$$

e il criterio di integrabilità permette di concludere. ■

[10] Qui l'indice 0 viene spostato in apice per non avere una notazione con doppio indice.

Il teorema fondamentale

Notiamo che se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, essa è integrabile su ogni intervallo $[a, x] \subset I$. Fissato che sia $a \in I$, si può pertanto definire la funzione

$$x \mapsto \int_a^x f\,,$$

che chiameremo **funzione integrale** o **integrale indefinito** di f, e indicheremo con uno dei simboli seguenti:

$$\int_a^{\cdot} f \quad , \quad \int_a^{\cdot} f(t)\,dt$$

(si noti che qui è conveniente usare una lettera diversa da x per indicare la variabile di f; ad esempio, qui abbiamo scelto la lettera t).

Introduciamo il concetto di funzione primitiva di una data funzione. Indichiamo con I un intervallo di $\mathbb{R}$.

Definizione. *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice* **primitivabile** *su I se esiste una funzione derivabile $F : I \to \mathbb{R}$ tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$. Una tale funzione F si chiama* **primitiva** *di f su I.*

È chiaro che una funzione primitivabile avrà sempre un numero infinito di primitive, in quanto, trovatane una, basterà aggiungere una costante arbitraria per trovarne delle altre. La seguente proposizione ci dice che, oltre a quelle ottenibili in questo modo, non ce ne sono altre.

Proposizione. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione primitivabile, e sia F una sua primitiva. Allora una funzione $G : I \to \mathbb{R}$ è primitiva di f se e solo se $F - G$ è una funzione costante su I.*

Dimostrazione. Se $F - G$ è costante, si ha

$$G'(x) = F'(x) + (G - F)'(x) = F'(x) = f(x)\,,$$

per ogni $x \in I$, e perciò G è una primitiva di f. Viceversa, se G è una primitiva di f su I, si ha

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0\,,$$

per ogni $x \in I$. Ne segue che $F - G$ è costante su I. ■

Il **Teorema fondamentale del calcolo differenziale e integrale** stabilisce che tutte le funzioni continue su un intervallo $[a, b]$ sono primitivabili, e che il loro integrale si può calcolare facilmente, nota che sia una loro primitiva. Ecco l'enunciato.

Teorema Fondamentale. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è primitivabile e, se F è una qualunque sua primitiva, allora*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Faremo vedere che $\int_a^{\cdot} f$, la funzione integrale, è una primitiva di f. Poniamo quindi $G(x) = \int_a^x f$ e, preso un punto x_0 in $[a,b]$, andiamo a dimostrare che $G'(x_0) = f(x_0)$. Consideriamo dapprima il caso in cui $x_0 \in]a,b[$. Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(x_0+h) - G(x_0)}{h} = f(x_0)\,.$$

Si noti che

$$\begin{aligned}\left|\frac{G(x_0+h) - G(x_0)}{h} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f\right) - f(x_0)\right| \\ &= \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0))\,dx\right|\,.\end{aligned}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Essendo f continua in x_0, esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in [a,b]$,

$$|x - x_0| \le \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon\,.$$

Prendendo h tale che $0 < h \le \delta$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0))\,dx\right| &\le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(x) - f(x_0)|\,dx \\ &\le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\,dx = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Se invece $\delta \le h < 0$, allora

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0))\,dx\right| &= \left|\frac{1}{-h}\int_{x_0+h}^{x_0} (f(x) - f(x_0))\,dx\right| \\ &\le \frac{1}{-h}\int_{x_0+h}^{x_0} |f(x) - f(x_0)|\,dx \\ &\le \frac{1}{-h}\int_{x_0+h}^{x_0} \varepsilon\,dx = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < |h| \le \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{G(x_0+h) - G(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \le \varepsilon\,,$$

che è quanto volevasi provare. Nel caso in cui $x_0 = a$ o $x_0 = b$, si procede in modo analogo, considerando la derivata destra o la derivata sinistra, rispettivamente.

Sia ora F una qualunque primitiva di f. Allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ per cui $F(x) = G(x) + c$, e pertanto

$$F(b) - F(a) = (G(b) + c) - (G(a) + c) = \int_a^b f - \int_a^a f = \int_a^b f\,,$$

che è quanto volevasi dimostrare. ■

Alcune osservazioni

Talvolta è comodo indicare la differenza $F(b) - F(a)$ con i simboli

$$[F]_a^b\,, \quad [F(x)]_{x=a}^{x=b}\,,$$

o con varianti di questi, come ad esempio $[F(x)]_a^b$, oppure $F(x)|_a^b$, qualora non ci siano ambiguità. Notiamo ancora che, se F è una qualunque primitiva della funzione f, la differenza $F(b) - F(a)$ non dipende dalla primitiva in questione. Infatti, se G è un'altra primitiva di F, necessariamente esiste una costante per cui $G(x) = F(x) + c$, per ogni x, e pertanto

$$G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a)\,.$$

Esempio. Consideriamo la funzione $f(x) = x^n$. È facile vedere che $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ ne è una primitiva. Il teorema fondamentale ci assicura quindi che

$$\int_a^b x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}\,.$$

Notiamo che la scelta del punto a nella definizione di $\int_a^{\cdot} f$ non è determinante. Si potrebbe prendere un qualsiasi punto $\omega \in I$ e considerare $\int_\omega^{\cdot} f$. Il teorema fondamentale ci assicura che, se F è una primitiva della funzione continua f, allora, per ogni $x \in I$,

$$\int_\omega^x f = F(x) - F(\omega)\,,$$

e pertanto $\int_\omega^{\cdot} f$ è una primitiva di f. Le convenzioni fatte sull'integrale con estremi scambiati ci assicurano inoltre che tale formula continua a valere anche se $x < \omega$, in quanto

$$\int_\omega^x f = -\int_x^\omega f = -(F(\omega) - F(x)) = F(x) - F(\omega)\,.$$

Possiamo scrivere, usando la notazione di Leibniz,

$$\frac{d}{dx}\int_\omega^x f = f(x)\,, \qquad \text{oppure} \qquad \frac{d}{dx}\int_\omega^x f(t)\,dt = f(x)\,.$$

Questa formula si può generalizzare: se $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$ sono due funzioni derivabili, allora

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)\,.$$

Infatti, se F è una primitiva di f, si ottiene la formula cercata derivando l'espressione $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$.

Indicheremo l'insieme di tutte le primitive di f con uno dei seguenti simboli:

$$\int f\,, \qquad \int f(x)\,dx\,.$$

Per quanto riguarda l'uso della x, vale un'osservazione analoga a quella fatta per l'integrale: essa può essere rimpiazzata da una qualunque altra lettera o simbolo, con le dovute precauzioni. Nella pratica, però, se F è una primitiva di f, invece della scrittura corretta

$$\int f = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}\,,$$

si usa spesso scrivere impropriamente espressioni del tipo

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c\,,$$

dove $c \in \mathbb{R}$ indica una costante arbitraria; ci adegueremo anche noi a questa prassi. Elenchiamo ad esempio le primitive di alcune funzioni elementari:

$$\begin{aligned}
\int e^x\,dx &= e^x + c \\
\int \sin x\,dx &= -\cos x + c \\
\int \cos x\,dx &= \sin x + c \\
\int x^\alpha\,dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad (\alpha \neq -1) \\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x| + c \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x + c \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin x + c
\end{aligned}$$

Le formule scritte sopra vanno considerate sugli opportuni intervalli di definizione. Ad esempio, la terz'ultima formula va così interpretata:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln x\,, & \text{se } x \in \,]0, +\infty[\,, \\ \ln(-x)\,, & \text{se } x \in \,]-\infty, 0[\,. \end{cases}$$

Esempio. Usando il teorema fondamentale, troviamo:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2\,.$$

Notiamo che la presenza della costante arbitraria c può talvolta portare a risultati in apparenza diversi. Ad esempio, si verifica facilmente che si ha anche

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos x + c\,.$$

Ciò si spiega con il fatto che $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ per ogni $x \in [-1,1]$, e non bisogna pensare che qui c indichi la stessa costante che appare nell'ultima formula dell'elenco scritto sopra.

La notazione introdotta per le primitive assomiglia a quella dell'integrale, anche se i due concetti sono completamente diversi. Essi sono però legati tra loro dal teorema fondamentale: si ha

$$\int_\omega^{\cdot} f \in \int f\,,$$

con $\omega \in I$ qualsiasi, e

$$\int_a^b f = \left[\int_\omega^{\cdot} f\right]_a^b .$$

Si potrebbe essere tentati di scrivere

$$\int_a^b f = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b ;$$

in realtà il termine di sinistra è un numero reale, mentre quello di destra è qualcosa di non ben definito (potrebbe essere un insieme il cui unico elemento è $\int_a^b f$). Nella pratica si abusa però spesso di queste notazioni.

Vediamo ora un esempio di funzione integrabile ma non primitivabile. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x = \xi\,, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Qui ξ è un punto di $[a,b]$ e α è una costante positiva (se $\alpha < 0$ il ragionamento è analogo). Si vede allora che, presa una suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a,b]$, con

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,,$$

si ha che

$$\ell'_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 0\,,$$

per cui

$$\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^n \ell'_k (x_k - x_{k-1}) = 0\,,$$

e quindi $\sigma'(f) = 0$. D'altra parte, $\ell''_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ è non nulla per uno o al più due valori di k, per cui la somma $\mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^n \ell''_k (x_k - x_{k-1})$ ha solamente uno o due addendi non nulli: possiamo scrivere

$$\mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) = \alpha(x_{\bar k} - x_{\bar k-1})\,, \text{ oppure } \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) = \alpha(x_{\bar k} - x_{\bar k-1}) + \alpha(x_{\bar k+1} - x_{\bar k})\,,$$

per un certo $\bar{k} \in \{1, 2, \dots, n\}$. Siccome le lunghezze $x_{\bar{k}} - x_{\bar{k}-1}$ e $x_{\bar{k}+1} - x_{\bar{k}}$ possono essere prese arbitrariamente piccole, otteniamo che $\sigma''(f) = 0$. In conclusione, abbiamo dimostrato che f è integrabile e

$$\int_a^b f = 0\,.$$

Chiaramente questo ragionamento può essere fatto anche per una funzione che sia diversa da zero solo su un numero finito di punti. L'integrale "non vede" questi punti. Naturalmente, se l'insieme di punti diventa infinito, le cose cambiano.

Vediamo ora come si tratta una funzione definita a tratti. Sia $f : [0, 7] \to \mathbb{R}$ avente i seguenti valori:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq x < 4\,, \\ 5 & \text{se } 4 \leq x \leq 7\,. \end{cases}$$

Useremo la formula $\int_0^7 f = \int_0^4 f + \int_4^7 f$. Notiamo che f è costante su $[4, 7]$, per cui $\int_4^7 f = 5(7-4) = 15$. D'altra parte, sull'intervallo $[0, 4]$ abbiamo che f è "quasi costante", nel senso che differisce dalla costante 2 su un unico punto; in altri termini,

$$f(x) - 2 = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 4[\,, \\ 3 & \text{se } x = 4\,. \end{cases}$$

Allora $\int_0^4 f = \int_0^4 (f-2) + \int_0^4 2 = 0 + 2(4-0) = 8$. Pertanto, $\int_0^7 f = 15 + 8 = 23$.

Si potrà procedere in modo analogo qualora una funzione sia definita a tratti su un intervallo $[a, b]$: se ad esempio $f_1 : [a, c] \to \mathbb{R}$ e $f_2 : [c, b] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue, con $a < c < b$, e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è definita da

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } a \leq x < c\,, \\ f_2(x) & \text{se } c \leq x \leq b\,, \end{cases} \quad \text{oppure } f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } a \leq x \leq c\,, \\ f_2(x) & \text{se } c < x \leq b\,, \end{cases}$$

possiamo scrivere $\int_a^b f = \int_a^c f_1 + \int_c^b f_2$.

Alcune regole di primitivazione

Dalle note proprietà delle derivate si possono facilmente dimostrare le seguenti proposizioni.

Proposizione. *Siano f e g due funzioni primitivabili e siano F e G primitive di f e g, rispettivamente. Allora $f + g$ è primitivabile e $F + G$ ne è una primitiva; scriveremo brevemente:*

$$\int (f + g) = \int f + \int g\,.$$

Proposizione. *Sia f una funzione primitivabile e sia F una sua primitiva. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario. Allora αf è primitivabile e αF ne è una primitiva; scriveremo brevemente:*

$$\int (\alpha f) = \alpha \int f \,.$$

Introduciamo ora due metodi spesso usati per determinare le primitive di alcune funzioni. Il primo è noto come metodo di primitivazione **per parti**. Nel seguito, $I \subset \mathbb{R}$ sarà sempre un intervallo.

Proposizione. *Siano $F, G : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili, e siano f, g le rispettive derivate. Si ha che fG è primitivabile su I se e solo se Fg lo è, nel qual caso una primitiva di fG è ottenuta sottraendo da FG una primitiva di Fg; scriveremo brevemente:*

$$\int fG = FG - \int Fg \,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Essendo F e G derivabili, anche FG lo è, e si ha

$$(FG)' = fG + Fg \,.$$

Essendo $(FG)'$ primitivabile su I con primitiva FG, la tesi segue dalla proposizione precedente. ∎

Esempio. Si voglia trovare una primitiva della funzione $h(x) = xe^x$. Definiamo le seguenti funzioni: $f(x) = e^x$, $G(x) = x$, e conseguentemente $F(x) = e^x$, $g(x) = 1$. Applicando la formula della proposizione, si ha:

$$\int e^x x \, dx = e^x x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + c \,,$$

dove c indica, come sempre, una costante arbitraria.

Come immediata conseguenza della proposizione precedente, nel caso in cui f e g siano continue, il Teorema Fondamentale ci fornisce la regola di **integrazione per parti**:

$$\int_a^b fG = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b Fg \,.$$

Esempi. Applicando la formula direttamente alla funzione $h(x) = xe^x$ dell'esempio precedente, otteniamo

$$\int_0^1 e^x x \, dx = e^1 \cdot 1 - e^0 \cdot 0 - \int_0^1 e^x \, dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e^1 - e^0) = 1 \,.$$

Notiamo che si può giungere allo stesso risultato usando il teorema fondamentale, avendo già trovato che una primitiva di h è data da $H(x) = xe^x - e^x$:

$$\int_0^1 e^x x \, dx = H(1) - H(0) = (e - e) - (0 - 1) = 1 \,.$$

Vediamo ancora un paio di esempi. Sia $h(x) = \sin^2 x$. Con l'ovvia scelta delle funzioni f e G, troviamo

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= -\cos x \sin x + \int \cos^2 x\,dx \\ &= -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx \\ &= x - \cos x \sin x - \int \sin^2 x\,dx\,,\end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x) + c\,.$$

Consideriamo ora il caso della funzione $h(x) = \ln x$, con $x > 0$. Per applicare la formula di primitivazione per parti, scegliamo le funzioni $f(x) = 1$, $G(x) = \ln x$. In questo modo, si trova

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x}\,dx = x \ln x - \int 1\,dx = x \ln x - x + c\,.$$

Il secondo metodo che vogliamo studiare è noto come metodo di primitivazione **per sostituzione**.

Proposizione. *Siano $\varphi : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo contenente $\varphi(I)$, e $f : J \to \mathbb{R}$, una funzione primitivabile, con primitiva F. Allora la funzione $(f \circ \varphi)\varphi'$ è primitivabile su I, e una sua primitiva è data da $F \circ \varphi$. Scriveremo brevemente:*

$$\int (f \circ \varphi)\varphi' = \left(\int f\right) \circ \varphi\,.$$

Dimostrazione. Il teorema di derivazione delle funzioni composte assicura che la funzione $F \circ \varphi$ è derivabile su I e

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi'\,.$$

Ne segue che $(f \circ \varphi)\varphi'$ è primitivabile con primitiva $F \circ \varphi$. ■

Ad esempio, cerchiamo una primitiva della funzione $h(x) = xe^{x^2}$. Definendo $\varphi(x) = x^2$, $f(t) = \frac{1}{2}e^t$ (è consigliabile usare lettere diverse per indicare le variabili di φ e di f), si ha che $h = (f \circ \varphi)\varphi'$. Essendo una primitiva di f data da $F(t) = \frac{1}{2}e^t$, si ha che una primitiva di h è $F \circ \varphi$, ossia

$$\int xe^{x^2}\,dx = F(\varphi(x)) + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c\,.$$

Come conseguenza, se f e φ' sono continue, abbiamo la regola di **integrazione per sostituzione**:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt\,.$$

Infatti, se F è una primitiva di f su $\varphi(I)$, per il Teorema Fondamentale, si ha

$$\int_a^b (f \circ \varphi)\varphi' = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$$

Esempio. Prendendo la funzione $h(x) = xe^{x^2}$ definita sopra, si ha

$$\int_0^2 xe^{x^2}\, dx = \int_0^4 \frac{1}{2}e^t\, dt = \frac{1}{2}[e^t]_0^4 = \frac{e^4 - 1}{2}\,.$$

Chiaramente, lo stesso risultato si ottiene con il teorema fondamentale, una volta noto che una primitiva di h è data da $H(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$. Infatti, si ha

$$\int_0^2 xe^{x^2}\, dx = H(2) - H(0) = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{e^4 - 1}{2}\,.$$

Nota. La formula di primitivazione per sostituzione si trova spesso scritta nella forma

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt\,\Big|_{t=\varphi(x)}\,,$$

dove, se F è una primitiva di f, il termine di destra si legge

$$\int f(t)\, dt\,\Big|_{t=\varphi(x)} = F(\varphi(x)) + c\,,$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitraria. Formalmente, si opera il cambiamento di variabile $t = \varphi(x)$, e il simbolo dt viene a rimpiazzare $\varphi'(x)\, dx$ (la notazione di Leibniz $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$ può essere usata come regola mnemonica).

Esempio. Per trovare una primitiva della funzione $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, possiamo scegliere $\varphi(x) = \ln x$, applicare la formula

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int t\, dt\,\Big|_{t=\ln x}\,,$$

e trovare così $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$ (in questo caso, scrivendo $t = \ln x$, si ha che il simbolo dt rimpiazza $\frac{1}{x}dx$).

Nel caso in cui la funzione $\varphi : I \to \varphi(I)$ sia invertibile, si può anche scrivere

$$\int f(t)\, dt = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx\,\Big|_{x=\varphi^{-1}(t)}\,,$$

con la corrispondente formula per l'integrale:

$$\int_\alpha^\beta f(t)\, dt = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx\,.$$

Esempi. 1. Volendo trovare una primitiva di $f(t) = \sqrt{1-t^2}$, con $t \in\,]-1,1[$, si può considerare la funzione $\varphi(x) = \cos x$, e si ha:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-t^2}\, dt &= \int \sqrt{1-\cos^2 x}\, (-\sin x)\, dx \Big|_{x=\arccos t} \\
&= -\int \sin^2 x\, dx \Big|_{x=\arccos t} \\
&= -\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)\Big|_{x=\arccos t} + c \\
&= -\frac{1}{2}(\arccos t - t\sqrt{1-t^2}) + c
\end{aligned}$$

(ponendo $t = \cos x$, il simbolo dt è rimpiazzato da $-\sin x\, dx$).

2. Se $\varphi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ è una funzione derivabile, strettamente crescente e invertibile, allora, essendo $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$, prendendo $f = \varphi^{-1}$ si ha

$$\int_\alpha^\beta \varphi^{-1}(t)\, dt = \int_a^b x\varphi'(x)\, dx = b\varphi(b) - a\varphi(a) - \int_a^b \varphi(x)\, dx\,.$$

La formula di Taylor

Il seguente teorema ci fornisce la cosiddetta "formula di Taylor con resto di Lagrange".

Teorema. *Siano $x \neq x_0$ due punti di un intervallo I e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile $n+1$ volte su I. Allora esiste un $\xi \in]x_0, x[$ tale che*

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x)\,,$$

dove

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

è il "polinomio di Taylor di grado n associato alla funzione f nel punto x_0" e

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

è il "resto di Lagrange".

Dimostrazione. Osserviamo che il polinomio p_n soddisfa alle seguenti proprietà:

$$\begin{cases}
p_n(x_0) = f(x_0)\,, \\
p_n'(x_0) = f'(x_0)\,, \\
p_n''(x_0) = f''(x_0)\,, \\
\quad\vdots \\
p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)\,.
\end{cases}$$

Applicando il teorema di Cauchy, troviamo un $\xi_1 \in]x_0, x[$ tale che

$$\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{(f(x)-p_n(x))-(f(x_0)-p_n(x_0))}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}} = \frac{f'(\xi_1)-p_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}\,.$$

Applicando di nuovo il teorema di Cauchy, troviamo un $\xi_2 \in]x_0, \xi_1[$ tale che

$$\frac{f'(\xi_1)-p_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} = \frac{(f'(\xi_1)-p_n'(\xi_1))-(f'(x_0)-p_n'(x_0))}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-(n+1)(x_0-x_0)^n} = \frac{f''(\xi_2)-p_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}}\,.$$

Procedendo per induzione, troviamo $n+1$ elementi $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}$ tali che

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{f'(\xi_1)-p_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}\\ &= \frac{f''(\xi_2)-p_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}}\\ &\ \vdots\\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})-p_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!(\xi_{n+1}-x_0)^0}\,.\end{aligned}$$

Se $x > x_0$, si ha

$$x_0 < \xi_{n+1} < \xi_n < \ldots < \xi_2 < \xi_1 < x\,,$$

mentre se $x < x_0$ si ha l'ordine opposto. Essendo la derivata $(n+1)-$esima di un polinomio di grado n sempre nulla, si ha che $p_n^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = 0$ e ponendo $\xi = \xi_{n+1}$ si ottiene la tesi. ■

Osserviamo che, se $n = 0$, si ha l'equivalente del teorema di Lagrange:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0)\,, \qquad \text{per un certo } \xi \in]x_0, x[\,.$$

Si noti che il polinomio di Taylor

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

potrebbe in realtà avere un grado inferiore a n. Per esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0\,,\\ 0 & \text{se } x = 0\,,\end{cases}$$

è derivabile infinite volte, e $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, per cui $p_n(x)$ è identicamente nullo.

Esempi. Determiniamo il polinomio di Taylor di alcune funzioni considerando per semplicità il caso $x_0 = 0$.

1) Sia $f(x) = e^x$. Si ha:

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} .$$

2) Sia $f(x) = \cos x$. Allora, se $n = 2m$ o $n = 2m + 1$,

$$p_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} .$$

3) Sia $f(x) = \sin x$. Allora, se $n = 2m + 1$ o $n = 2m + 2$,

$$p_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} .$$

Teorema. *Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che*

$$e^x = \lim_n \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \right) .$$

<u>Dimostrazione</u>. La formula è chiaramente vera se $x = 0$. Se $x \neq 0$, per la formula di Taylor con resto di Lagrange, esiste un $\xi \in]0, x[$ tale che $f(x) = p_n(x) + r_n(x)$, con

$$r_n(x) = e^{\xi} \, \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} .$$

Vogliamo dimostrare che $\lim_n r_n(x) = 0$. Osserviamo che

$$|r_n(x)| \leq e^{|x|} \, \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} ,$$

e sappiamo che, per ogni $a > 0$, si ha $\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$. Ne segue la tesi. ■

Scriveremo brevemente

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} ,$$

la "serie di Taylor" associata alla funzione esponenziale nel punto $x_0 = 0$.

Con analoga dimostrazione, si ha pure il seguente

Teorema. *Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che*

$$\cos x = \lim_m \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \right) ,$$

$$\sin x = \lim_m \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) .$$

Scriveremo brevemente:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,, \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

Calcoliamo ancora i polinomi di Taylor associati ad alcune funzioni elementari, nel punto $x_0 = 0$. Iniziamo con la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1-x}\,.$$

Si dimostra per induzione che la sua derivata n-esima ha la seguente espressione:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\,.$$

Pertanto, $f^{(n)}(0) = n!$ e il polinomio cercato è

$$p_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n\,.$$

Si procede similmente per la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x}$, per la quale troviamo

$$p_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n\,.$$

Consideriamo ora la funzione $f(x) = \ln(1+x)$. La sua derivata coincide con la funzione precedente, per cui si ricava rapidamente

$$p_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}\,.$$

Un altro esempio per cui è possibile calcolare il polinomio di Taylor è la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, per cui si ha che, se $n = 2m$ o $n = 2m+1$,

$$p_n(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^m x^{2m}\,.$$

A questo punto risulta agevole trattare la funzione $f(x) = \arctan x$, la cui derivata coincide con la funzione precedente, per cui si ha che, se $n = 2m+1$ o $n = 2m+2$,

$$p_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1}\,.$$

Da quanto visto finora, non sarà difficile trovare le espressioni generali dei polinomi di Taylor delle funzioni iperboliche $\cosh x$, $\sinh x$, nonchè di $\tanh^{-1} x$. Riportiamo la seguente tabella riassuntiva.

$f(x)$	$p_n(x)$ *nel punto* $x_0 = 0$
e^x	$1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$
$\ln(1+x)$	$x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$
$\cos x$	$1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^m \dfrac{x^{2m}}{(2m)!}$
$\sin x$	$x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^m \dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$
$\arctan x$	$x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^m \dfrac{x^{2m+1}}{2m+1}$
$\cosh x$	$1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \ldots + \dfrac{x^{2m}}{(2m)!}$
$\sinh x$	$x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \ldots + \dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$
$\tanh^{-1} x$	$x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7} + \ldots + \dfrac{x^{2m+1}}{2m+1}$

Non risulta invece elementare la formula del polinomio di Taylor per le funzioni $\tan x$ e $\tanh x$, di cui riportiamo solo i primi termini.

$\tan x$	$x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + \ldots$
$\tanh x$	$x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} - \dfrac{17x^7}{315} + \ldots$

Tenendo fisso x_0, vogliamo ora vedere cosa succede se $x \to x_0$. Per ogni $x \neq x_0$, per evidenziare il fatto che il nostro $\xi \in]x_0, x[$ dipende da x, scriviamo $\xi = \xi_x$. Allora, se $f^{(n+1)}$ è *limitata in un intorno di* x_0, avremo che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)(x - x_0) = 0 .$$

Talvolta per questa relazione di limite si usa la seguente notazione:

$$r_n(x) = o(|x - x_0|^n) \quad \text{ se } x \to x_0 .$$

Notiamo ancora che, se $f^{(n+1)}$ è *continua in* x_0, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) .$$

Questo ci permette, in alcuni casi, di determinare gli eventuali punti di massimo o di minimo locale di una funzione. Ad esempio, se x_0 è un punto in cui $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)]}{(x - x_0)^2} = f''(x_0) > 0 ,$$

da cui si deduce, usando il teorema sulla permanenza del segno, che esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) > f(x_0)$, per ogni $x \in U \setminus \{x_0\}$. Pertanto,

se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo locale.

Analogamente si vede che

se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo locale.

Qualora $f'(x_0) = 0$ e anche $f''(x_0) = 0$, dovremo guardare alla derivata terza. Se $f'''(x_0) \neq 0$, allora x_0 non è nè di minimo nè di massimo locale. Se anche $f'''(x_0) = 0$, allora si vede che

se $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ e $f''''(x_0) > 0$,
allora x_0 è un punto di minimo locale.

mentre

se $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ e $f''''(x_0) < 0$,
allora x_0 è un punto di massimo locale.

Il procedimento può essere continuato. Tralasciamo i dettagli, per brevità.

Concludiamo con la “formula di Taylor con resto integrale”.

Teorema. *Siano $x \neq x_0$ due punti di un intervallo I e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile $n+1$ volte su I, con derivata $(n+1)$-esima continua. Allora*

$$f(x) = p_n(x) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(u)(x-u)^n \, du \,,$$

dove $p_n(x)$, è il polinomio di Taylor di grado n nel punto x_0.

<u>Dimostrazione</u>. Procediamo per induzione. Se $n = 0$, usando il Teorema Fondamentale,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(u) \, du = p_0(x) + \frac{1}{0!} \int_{x_0}^{x} f^{(0+1)}(u)(x-u)^0 \, du \,,$$

per cui la formula è vera.

Supponiamo ora che sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$\begin{aligned} f(x) - p_{n+1}(x) &= f(x) - \Big(p_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} \Big) \\ &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(u)(x-u)^n \, du - \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} \\ &= \frac{1}{n!} \left(\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(u)(x-u)^n \, du - \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

Integrando per parti,

$$
\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(u)(x-u)^n\,du = \\
&\quad = \left[\Big(-\frac{(x-u)^{n+1}}{n+1}\Big) f^{(n+1)}(u)\right]_{u=x_0}^{u=x} - \int_{x_0}^{x} \Big(-\frac{(x-u)^{n+1}}{n+1}\Big) f^{(n+2)}(u)\,du \\
&\quad = \frac{1}{n+1}\, f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(u)(x-u)^{n+1}\,du\,,
\end{aligned}
$$

e sostituendo,

$$
\begin{aligned}
f(x) - p_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(u)(x-u)^{n+1}\,du\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(u)(x-u)^{n+1}\,du\,.
\end{aligned}
$$

Pertanto, la formula vale anche per $n+1$, e la dimostrazione è completa. ■