

CAPITOLO 6

EQUAZIONI NON LINEARI

In questo capitolo verranno presentati dei metodi per la risoluzione delle equazioni scalari del tipo

$$f(x)=0, \quad (7.1)$$

cioè per la ricerca delle **radici** (o degli **zeri**) della funzione scalare $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con qualche cenno al caso dei sistemi dove $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

A tale scopo supponiamo di conoscere un intervallo $[a,b]$ nel quale la funzione $f(x)$ è continua e soddisfa la condizione $f(a)f(b)<0$. Sotto tali ipotesi, il "teorema di connessione" ci assicura che $f(x)$ ammette almeno uno zero interno ad $[a,b]$.

Il metodo più elementare e più generale per l'approssimazione di una soluzione del problema 7.1 è il **metodo dicotomico** che consiste nella seguente procedura. Si considera il punto centrale $\frac{a+b}{2}$ dell'intervallo ed il valore $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Se quest'ultimo è $\neq 0$, si definisce un nuovo intervallo $I_1 = [a_1, b_1]$ i cui estremi sono dati dal punto centrale $\frac{a+b}{2}$, e da quel punto, scelto tra a e b , nel quale il segno di f è opposto al segno di $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. In tale modo abbiamo costruito un nuovo intervallo I_2 , di ampiezza $\frac{b-a}{2}$, per il quale si ha ancora $f(a_1)f(b_1)<0$. Si procede successivamente in maniera analoga costruendo una successione di sottointervalli $I_n = [a_n, b_n]$, di ampiezza rispettivamente $\frac{b-a}{2^n}$, ciascuno dei quali contiene almeno una radice di $f(x)$.

Il metodo è, in generale, molto lento ma ha i seguenti pregi:

1. converge anche in presenza di più soluzioni,
2. non richiede alcuna proprietà della $f(x)$, oltre la continuità,
3. dispone di una stima "a priori" dell'errore.

Per tali ragioni il metodo dicotomico è spesso usato per l'individuazione di intorno sufficientemente piccoli contenenti la radice cercata, sui quali applicare i metodi più elaborati e veloci, alcuni dei quali descriveremo nel seguito.

Cominciamo con l'osservare che ogni equazione del tipo (7.1) può essere trasformata in un problema *equivalente* di **punto fisso** del tipo:

$$x = \varphi(x).$$

L'equivalenza sta nel fatto che l'insieme di tutti gli zeri di (7.1) coincide con l'insieme di tutti i punti fissi di $\varphi(x)$ (cioè i punti che rimangono *fissi* sotto l'azione della funzione φ).

A titolo di esempio si osservi che (7.1) è equivalente a ciascuno dei seguenti problemi di punto fisso:

$$\begin{aligned} x &= x + cf(x) && \forall c \neq 0, \\ x &= x + g(x)f(x) && \forall g \text{ tale che } g(x) \neq 0 \text{ per ogni } x, \\ x &= x + cf^2(x) && \forall c \neq 0. \end{aligned}$$

Il nostro scopo è ora quello di cercare problemi di punto fisso equivalenti a (7.1) per i quali l'**iterazione di Picard**:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad \text{con } x_0 \text{ assegnato,}$$

converge.

Poichè la funzione φ , che viene detta **funzione di iterazione**, è supposta continua, è evidente che il limite della successione $\{x_k\}$, se esiste, è un punto fisso.

A questo proposito vale il seguente teorema per il quale definiamo l'errore al passo k -esimo

$$e_k := |x_k - x^*|, \quad \text{dove } x^* = \varphi(x^*).$$

Teorema di convergenza (7.1):

Se per ogni punto x di un intorno U_{x^} di x^* vale la relazione*

$$|x^* - \varphi(x)| \leq c|x^* - x| \quad \text{con } 0 < c < 1$$

oppure

$$|x^* - \varphi(x)| \leq d|x^* - x|^p \quad \text{con } d \neq 0, \text{ per } p > 1,$$

allora esiste un intorno $V_{x^} \subset U_{x^*}$ tale che, partendo da un qualunque suo punto x_0 , la successione di Picard è convergente. In tal caso si ha, rispettivamente:*

$$e_{k+1} < ce_k \quad (7.2)$$

oppure

$$e_{k+1} < d(e_k)^p \quad (7.3)$$

e si dirà che la successione è **localmente convergente** ed ha **ordine di convergenza uguale a 1**, oppure uguale a p .

Dim. Nel primo caso, per ogni punto $x_0 \in U_{x^*}$ il suo trasformato $x_1 = \varphi(x_0)$ appartiene ancora a U_{x^*} poichè $c < 1$. Lo stesso accade per il punto $x_2 = \varphi(x_1)$, e così di seguito per tutti i punti della successione $\{x_k\}$. Si ha quindi, per ogni k :

$$|x^* - x_{k+1}| = |x^* - \varphi(x_k)| \leq c|x^* - x_k|, \quad (7-3)\text{bis}$$

e inoltre

$$|x^* - x_{k+1}| \leq c^2|x^* - x_{k-1}| \leq \dots \leq c^{k+1}|x^* - x_0|. \quad (7-3)\text{ter}$$

La relazione (7.2) è quindi verificata per ogni k ed inoltre, poichè $c < 1$, la successione converge.

Nel caso $p > 1$, si ha

$$|x^* - x_1| = |x^* - \varphi(x_0)| \leq d|x^* - x_0|^p = d|x^* - x_0|^{p-1}|x^* - x_0|$$

Di conseguenza, se il punto x_0 appartiene ad un intorno $V_{x^*} (\subset U_{x^*})$ così piccolo da soddisfare la relazione

$$d|x^* - x_0|^{p-1} = a < 1, \quad (7.4)$$

allora si avrà

$$|x^* - x_1| < a |x^* - x_0|$$

e quindi anche x_1 appartiene a V_{x^*} e, a maggior ragione, a U_{x^*} . Analogamente per x_2 si ha:

$$|x^* - x_2| = |x^* - \varphi(x_1)| \leq d|x^* - x_1|^p = d|x^* - x_1|^{p-1}|x^* - x_1| < a |x^* - x_1|$$

e, in generale, per ogni k :

$$|x^* - x_{k+1}| = |x^* - \varphi(x_k)| \leq d|x^* - x_k|^p = d|x^* - x_k|^{p-1}|x^* - x_k| < a |x^* - x_k| < a^{k+1}|x^* - x_0| \quad (7-4)\text{bis}$$

Ciò garantisce la convergenza della successione $\{x_k\}$ e la validità della relazione (7.3). ■

La relazione (7.3), applicata in modo ricorsivo su k , consente una stima più precisa dell'errore:

$$e_{k+1} < d(e_k)^p < d(d(e_{k-1})^p)^p = d^{1+p}(e_{k-1})^{p^2} < d^{1+p}(d(e_{k-2})^p)^{p^2} = d^{1+p+p^2}(e_{k-2})^{p^3} \\ < \dots < d^{1+p+\dots+p^k}(e_0)^{p^{(k+1)}}.$$

Poichè $1+p+p^2+\dots+p^k = \frac{p^{(k+1)}-1}{p-1}$, si ha:

$$d^{1+p+\dots+p^k}(e_0)^{p^{(k+1)}} = d^{\frac{p^{(k+1)}-1}{p-1}}(e_0)^{p^{(k+1)-1}} e_0 = \left(d^{\frac{1}{p-1}} e_0 \right)^{p^{(k+1)-1}} e_0$$

Infine, per l'ipotesi (7.4) fatta su e_0 , si ha $b := d^{\frac{1}{p-1}} e_0 < a^{\frac{1}{p-1}} < 1$, e quindi:

$$e_{k+1} < b^{p^{(k+1)}-1} e_0. \quad (7.5)$$

Per avere una idea più concreta di quella che può essere la velocità di convergenza di un metodo di ordine $p > 1$, si consideri il caso $p=2$ e si supponga di conoscere un punto x_0 per il quale $b < 10^{-1}$. La stima (7.5) ci assicura le seguenti maggiorazioni dell'errore:

$$e_2 < 10^{-3} e_0. \\ e_3 < 10^{-7} e_0. \\ e_4 < 10^{-15} e_0. \\ e_5 < 10^{-31} e_0. \\ e_6 < 10^{-63} e_0. \\ \text{ecc...}$$

Per un metodo di ordine $p=3$ si avrebbe:

$$e_2 < 10^{-8} e_0. \\ e_3 < 10^{-26} e_0. \\ e_4 < 10^{-80} e_0. \\ \text{ecc...}$$

Diamo ora un criterio per la convergenza locale di un metodo iterativo e per la determinazione dell'ordine di convergenza.

Teorema 7.2. Se la funzione di iterazione $\varphi(x)$ è di classe C^p allora si ha:
per $p=1$:

$$|\varphi'(x^*)| < 1 \Rightarrow |x^* - \varphi(x)| \leq c|x^* - x| \quad \text{con } 0 < c < 1$$

per $p > 1$

$$|\varphi^{(i)}(x^*)| = 0 \quad \text{per } i=1,2,\dots,p-1 \Rightarrow |x^* - \varphi(x)| \leq d|x^* - x|^p \quad \text{con } d \neq 0.$$

Dim. La dimostrazione segue immediatamente dallo sviluppo di Taylor della funzione $\varphi(x)$ in un intorno U_{x^*} del punto x^* . Per $p=1$ si ha infatti:

$$\varphi(x) = \varphi(x^*) + (x-x^*) \varphi'(\eta), \quad \text{con } \eta \in U_{x^*}.$$

Poichè $\varphi(x^*)=x^*$, si ottiene:

$$|\varphi(x) - x^*| < c|x - x^*|$$

dove $c = \max_{t \in U_{x^*}} |\varphi'(t)|$. Siccome nel punto fisso x^* si ha $|\varphi'(x^*)| < 1$, allora l'intorno U_{x^*} può essere preso così piccolo da rendere $c < 1$.

Per $p > 1$ si ha, per ogni $x \in U_{x^*}$:

$$\varphi(x) = \varphi(x^*) + (x-x^*)\varphi'(x^*) + \dots + \frac{(x-x^*)^{p-1}}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(x^*) + \frac{(x-x^*)^p}{p!} \varphi^{(p)}(\eta).$$

che, per le ipotesi fatte, si riduce a:

$$\varphi(x) = x^* + \frac{(x-x^*)^p}{p!} \varphi^{(p)}(\eta).$$

Da quest'ultima si ricava la relazione:

$$|x^* - \varphi(x)| \leq d|x^* - x|^p$$

dove $d = \frac{1}{p!} \max_{t \in U_{x^*}} |\varphi^{(p)}(t)|$. ■

Criterio d'arresto

Abbiamo visto che la relazione (7-3)ter e la relazione (7-5) (nel caso di metodi di ordine superiore ad 1) forniscono una stima dell'errore al passo (k+1)-esimo in funzione dell'errore iniziale e_0 . Tali stime consentono di stabilire **a priori** quanti passi bisognerà eseguire per avere un valore approssimato della soluzione al di sotto di una tolleranza assegnata. Essi costituiscono quindi un **criterio di arresto** della iterazione.

Piu' interessante e' il seguente **criterio d'arresto a posteriori** che fornisce una stima dell'errore commesso ad ogni passo in funzione degli ultimi due punti dell'iterazione e risulta quindi piu' efficace.

Consideriamo un metodo iterativo per il quale vale la relazione

$$|x^* - x_{k+1}| \leq M |x^* - x_k|$$

dove $M < 1$ puo' rappresentare sia la costante "c" in (7-3)bis che la costante "a" in (7-4) che sono supposte entrambe note e < 1 .

Poiche'

$$|x^* - x_{k+1}| \leq M |x^* - x_k| = M |x^* - x_{k+1} + x_{k+1} - x_k| \leq M (|x^* - x_{k+1}| + |x_{k+1} - x_k|)$$

si ha

$$|x^* - x_{k+1}| \leq \frac{M}{1-M} |x_{k+1} - x_k|$$

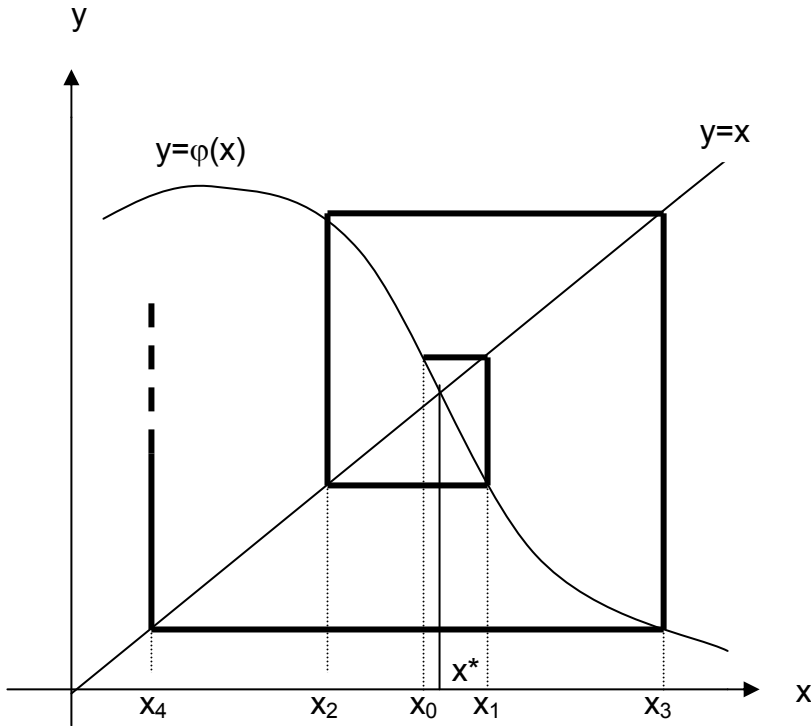
Conoscendo quindi M , possiamo maggiorare l'errore commesso ad ogni passo e arrestare l'iterazione quando il valore $\frac{M}{1-M} |x_{k+1} - x_k|$ e' al di sotto della soglia voluta.

Si osservi che quando M e' prossimo ad 1, il fattore $\frac{M}{1-M}$ puo' essere molto grande e di conseguenza, sebbene la traiettoria si sia spostata di poco, l'errore puo' essere ancora grande. D'altra parte, se $M < 1/2$ il fattore $\frac{M}{1-M}$ risulta < 1 e quindi *le cifre che si ripetono in x_{k+1} ed in x_k sono esatte!*

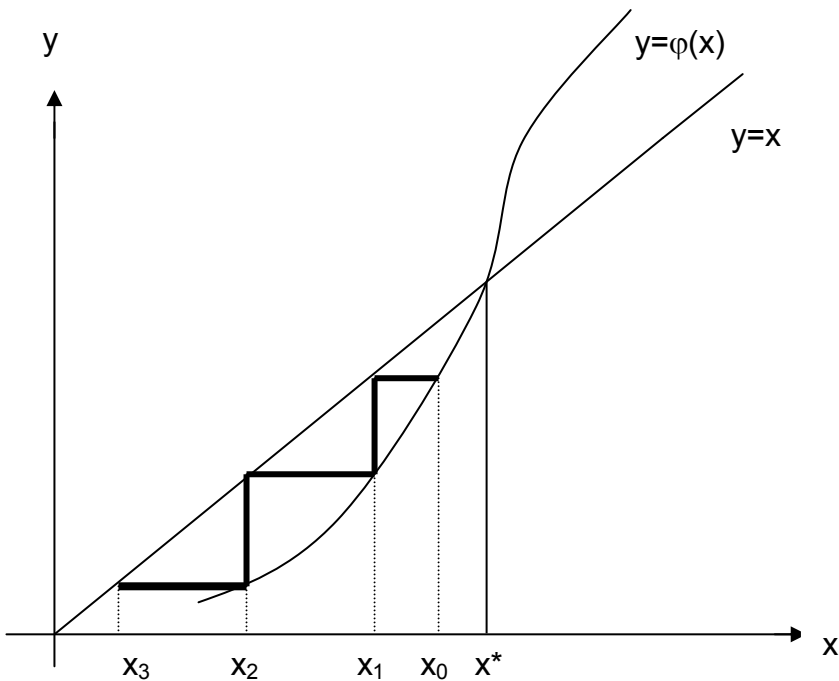
Iterazione di Picard modificata.

Abbiamo visto nel teorema 7-2 che la condizione $|\varphi'(x^*)| < 1$ garantisce la convergenza locale dell'iterazione di Picard $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ in quanto esiste un intorno nel quale $|\varphi'(x)| < 1$. Se viceversa $|\varphi'(x^*)| \geq 1$ e nell'intorno si ha ancora $|\varphi'(x)| \geq 1$, allora in tale intorno si possono avere due diverse situazioni: $\varphi'(x) \geq 1$ oppure $\varphi'(x) \leq -1$. In entrambi i casi la traiettoria uscente da un qualunque punto di quell'intorno verra' *respinta* dal punto fisso. In questo

caso il punto fisso verra' detto **punto fisso repulsivo**, in contrapposizione all'altro caso in cui verra' detto **punto fisso attrattivo**.



Esempio di unto fisso repulsivo con $\varphi'(x^*) \leq -1$.



Esempio di unto fisso repulsivo con $\varphi'(x^*) \geq 1$.

Se la funzione φ è derivabile con continuità allora un punto fisso repulsivo può essere sempre trasformato in punto fisso attrattivo attraverso la seguente iterazione modificata

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k + \frac{\varphi(x_k) - x_k}{m}$$

che, per un opportuno m reale, garantisce la condizione $|\phi'(x)| < 1$ in un intorno di x^* . Infatti, si ricava facilmente che

$$|\phi'(x)| < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{\varphi'(x) - 1}{m} < 2$$

da cui le seguenti condizioni su m :

$$m > \frac{\varphi'(x) - 1}{2} \quad \text{se } \varphi'(x) > 1$$

$$m < \frac{\varphi'(x) - 1}{2} \quad \text{se } \varphi'(x) < -1$$

Si osservi che la nuova funzione di iterazione $\phi(x)$ *appiattisce*, ed eventualmente *ribalta* (se $m < 0$), la funzione φ sulla diagonale rendendo il procedimento convergente..

Il metodo di Newton e le sue varianti.

Uno dei metodi più noti ed efficaci per la soluzione dell'equazione $f(x)=0$ è il **metodo di Newton**. Esso consiste nella seguente formula iterativa:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

che corrisponde all'iterazione di Picard relativa al problema equivalente di punto fisso:

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Come si vede, il metodo si applica a funzioni derivabili per le quali la derivata prima è $\neq 0$ almeno in un intorno del punto fisso x^* , altrimenti l'iterazione potrebbe non essere ben definita. Osserviamo subito che vale la seguente proprietà:

1.a PROPRIETÀ DEL METODO DI NEWTON. Se $f'(x)$ è continua e $f'(x^*) \neq 0$, allora il metodo di Newton è localmente convergente in U_{x^*} con ordine di convergenza $p=2$, e soddisfa la seguente stima dell'errore:

$$e_{n+1} < d(e_n)^2 \quad \text{con } d = \frac{1}{2} \cdot \frac{\max_{t \in U_{x^*}} |f''(t)|}{\min_{t \in U_{x^*}} |f'(t)|}$$

Poichè $f'(x^*) \neq 0$, il metodo è ben definito in tutto un intorno di x^* . Inoltre, dalla derivazione della funzione di iterazione $\varphi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, si ottiene immediatamente $\varphi'(x^*) = 0$ e quindi, in base ai teoremi 7.1 e 7.2, il metodo è localmente convergente con ordine $p=2$. Infine, per il calcolo della costante d , si considera il seguente sviluppo di Taylor della funzione $f(x)$:

$$f(x^*) = f(x_n) + (x^* - x_n)f'(x_n) + \frac{(x^* - x_n)^2}{2} f''(\eta)$$

Dividendo entrambi i membri per $f'(x_n)$, si ottiene:

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (x^* - x_n) + \frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 \frac{f''(\eta)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} - x^* = \frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 \frac{f''(\eta)}{f'(x_n)}$$

$$|x_{n+1} - x^*| < |x^* - x_n|^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{\max_{t \in U_{x^*}} |f''(t)|}{\min_{t \in U_{x^*}} |f'(t)|}$$

Radici multiple.

Nel caso che la radice x^* sia doppia, cioè che sia $f(x^*)=0$, $f'(x^*)=0$ ed inoltre $f''(x^*) \neq 0$, è evidente che il metodo di Newton è ancora ben definito in un intorno sufficientemente piccolo di x^* dove la $f'(x) \neq 0$ per tutti i punti diversi da x^* . In tal caso però il metodo, che rimane localmente convergente, converge con ordine $p=1$. Ciò si verifica direttamente, in base al teorema 7.2, derivando la funzione di iterazione per la quale si ha (con la regola dell'Hôpital):

$$\varphi'(x^*) = 1/2.$$

D'altra parte si verifica facilmente che la seguente variante del metodo di Newton:

$$x_{n+1} = x_n - 2 \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

è ancora convergente con ordine $p=2$. In questo caso la funzione di iterazione è $\varphi(x) := x - 2 \frac{f(x)}{f'(x)}$ per la quale $\varphi'(x^*)=0$. Si osservi però che, dal punto di vista computazionale, la formula è instabile in prossimità della soluzione x^* , dove si avvicina ad una forma indeterminata del tipo $0/0$.

Più in generale, vale la seguente proprietà:

2.a PROPRIETÀ DEL METODO DI NEWTON. *Se la radice x^* ha molteplicità s , cioè se*

$$f(x^*)=f'(x^*)=\dots=f^{(s-1)}(x^*)=0 \quad \text{ed} \quad f^{(s)} \neq 0,$$

allora il metodo iterativo:

$$x_{n+1} = x_n - s \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

è localmente convergente con ordine di convergenza $p=2$.

Considerazioni geometriche sull'iterazione di Newton, rendono intuitiva la seguente proprietà:

3.a PROPRIETÀ DEL METODO DI NEWTON. *Se la funzione $f(x)$ mantiene costante il segno di f' e di f'' in \mathbb{R} , allora il metodo di Newton converge per ogni punto iniziale x_0 e, a parte eventualmente il primo passo, l'iterazione converge in modo monotono.*

Una variante molto utile del metodo di Newton è data dal seguente **metodo delle secanti**:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \quad n \geq 1, \quad \text{con } n_0, n_1 \text{ dati.}$$

Esso si ottiene dal metodo di Newton sostituendo il valore $f'(x_n)$ con il rapporto incrementale $\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ costruito sugli ultimi due passi dell'iterazione.

Il metodo delle secanti non rientra nella classe dei metodi iterativi di Picard perchè si presenta, appunto, come un **metodo iterativo a 2 passi** e per esso non valgono i teoremi

precedenti. Cionondimeno, in ogni intorno nel quale il rapporto incrementale è ben definito, il metodo è localmente convergente con ordine di convergenza $p=1.618\dots$ (soluzione di $p^2-p-1=0$). Vale cioè la relazione:

$$|x_{n+1} - x^*| < d|x^* - x_n|^{1.618\dots} \quad \text{per } n > 1.$$

Per dimostrare le precedenti affermazioni, consideriamo la formula d'interpolazione di Newton sui due punti x_{n-1} ed x_n ,

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f[x_{n-1}, x_n] + (x - x_{n-1})(x - x_n)\frac{f''(\xi)}{2}$$

e calcoliamola in x^* :

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_n) + (x^* - x_n)f[x_{n-1}, x_n] + (x^* - x_{n-1})(x^* - x_n)\frac{f''(\xi_n)}{2} \\ 0 &= f(x_n) + (x^* - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n)f[x_{n-1}, x_n] + (x^* - x_{n-1})(x^* - x_n)\frac{f''(\xi_n)}{2} \\ 0 &= (x^* - x_{n+1})f[x_{n-1}, x_n] + (x^* - x_{n-1})(x^* - x_n)\frac{f''(\xi_n)}{2} \\ (x^* - x_{n+1}) &= - (x^* - x_{n-1})(x^* - x_n)\frac{f''(\xi_n)}{2f'(\eta_n)} \\ e_{n+1} &= e_n e_{n-1} \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\xi_n)}{f'(\eta_n)} \right|. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Si vede quindi che se x_0 e x_1 appartengono ad un intorno U_{x^*} tale che

$$d := \frac{1}{2} \cdot \frac{\max_{t \in U_{x^*}} |f''(t)|}{\min_{t \in U_{x^*}} |f'(t)|} \quad \text{e} \quad \max \{de_0, de_1\} = a < 1$$

si ha:

$$e_2 \leq e_1 e_0 d = a e_1.$$

Di conseguenza anche $x_2 \in U_{x^*}$, ed al passo successivo si avrà ancora

$$e_3 \leq e_2 e_1 \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\xi_2)}{f'(\eta_2)} \right|$$

con ξ_2 e $\eta_2 \in U_{x^*}$. Quindi

$$e_3 \leq e_2 e_1 d \leq a e_2 \quad (\leq a^2 e_1)$$

e, per induzione, si dimostra che

$$e_{n+1} \leq a^n e_1 \quad \forall n$$

da cui discende la convergenza del metodo.

Per quanto riguarda la velocità di convergenza, si osservi che la relazione (7.6) si può scrivere

$$e_{n+1} \leq e_n d_n \quad \text{con} \quad d_n = e_{n-1} \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\xi_n)}{f'(\eta_n)} \right| \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

In questo caso si dice che il metodo converge in modo **superlineare**. Per trovare l'ordine di convergenza facciamo il seguente ragionamento euristico.

Supponiamo di sapere che c'è un numero reale p tale che

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^p} \rightarrow k \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Ciò significa che per n sufficientemente grande il rapporto rimane pressochè costante uguale a k . Indicheremo questo fatto con la notazione:

$$e_{n+1} \approx k e_n^p \quad \forall n \gg 1. \quad (7.7)$$

ed, al passo precedente:

$$e_n \approx k e_{n-1}^p. \quad (7.8)$$

Combinando (7,7) con la valutazione asintotica di (7,6) data da

$$e_{n+1} \approx e_n e_{n-1} d \quad \text{con } d = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right|,$$

si ottiene

$$e_{n-1} \approx \frac{k}{d} e_n^{p-1}.$$

Infine, sostituendo quest'ultima nella (7.8) si ottiene

$$e_n \approx \frac{k^{p+1}}{d^p} e_n^{p^2-p}$$

da cui, uguagliando gli esponenti, si ottiene:

$$p^2-p=1 \quad \text{e} \quad \text{quindi } p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$$

ed eguagliando i coefficienti si ottiene

$$k^p = d \quad \text{e quindi} \quad \Rightarrow k = d^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{\frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}}$$

La costante k è la **costante asintotica** del metodo.

Nel confrontare il metodo di Newton col metodo delle secanti, si osservi che quest'ultimo non richiede la conoscenza della derivata della funzione $f(x)$. Inoltre il costo computazionale si riduce ad una sola valutazione di f per ogni passo (a parte il primo passo che ne richiede 2), contro una valutazione di f e una di f' del metodo di Newton. Possiamo quindi dire che il costo di un passo del metodo di Newton corrisponde al costo di due passi del metodo delle secanti per i quali si ha la seguente stima dell'errore:

$$|x_{n+1} - x^*| < d |x^* - x_n|^{1.618\dots} < d |d |x^* - x_{n-1}|^{1.618\dots}|^{1.618\dots} = d^{2.618\dots} |x^* - x_{n-1}|^{2.618\dots}$$

Possiamo quindi concludere che, in generale, il metodo delle secanti riesce più conveniente del metodo di Newton.

Sistemi lineari (cenni)

Consideriamo ora funzioni di \mathbb{R}^d in \mathbb{R}^d che, per distinguere dal caso scalare, indicheremo con

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_d(x)) \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Qui ci accontenteremo di definire due metodi, quello di Newton-Raphson e quello delle secanti, per il calcolo delle soluzioni del sistema

$$F(x)=0$$

e di enunciare i teoremi di convergenza per le cui dimostrazioni sarebbe necessario disporre dei concetti di differenziale secondo per la funzione F e delle sue proprietà.

Il metodo di **Newton-Raphson** è la generalizzazione del metodo delle tangenti di Newton al caso multidimensionale. Esso consiste nel definire il punto x_{n+1} come il punto di \mathbb{R}^d nel quale si annulla la funzione $F(x_n)+F'(x_n)(x-x_n)$, che è l'approssimante lineare della $F(x)$ nel punto x_n :

$$F(x_n)+F'(x_n)(x_{n+1}-x_n)=0.$$

Si ricordi che l'approssimante lineare $F(x_n)+F'(x_n)(x-x_n)$ nel punto x_n è quella funzione che si comporta come la tangente nel caso scalare, cioè tale che

$$\frac{\|F(x) - (F(x_n) + F'(x_n)(x - x_n))\|}{\|x - x_n\|} \rightarrow 0 \quad \text{per } \|x - x_n\| \rightarrow 0$$

Dal punto di vista pratico si tratta di risolvere, ad ogni passo, il sistema lineare

$$F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -F(x_n) \quad (7.9)$$

nell'incognita $\delta_n = x_{n+1} - x_n$ e quindi calcolare $x_{n+1} = \delta_n + x_n$. Dal punto di vista formale scriveremo l'iterazione:

$$x_{n+1} = x_n - (F'(x_n))^{-1}F(x_n).$$

È chiaro che il metodo è ben definito se la matrice jacobiana $F'(x_n)$ è non singolare in un intorno di x^* . Per quanto riguarda la convergenza vale il seguente teorema:

Teorema di convergenza:

Se la funzione $F(x)$ è tale che $F'(x)$ è continuo e non singolare in x^ (e quindi non singolare in un intorno di x^*), allora il metodo di Newton-Raphson è ben definito e localmente convergente con ordine superlineare. Se inoltre lo jacobiano $F'(x)$ è lipschitziano nell'intorno di x^* ,*

$$\|F'(u)-F'(v)\| < \gamma\|u-v\|, \quad \text{per ogni } u,v$$

allora il metodo converge con ordine 2.

Il metodo di Newton-Raphson è molto attraente per la sua velocità di convergenza, ma molto pesante sul piano computazionale perchè ad ogni passo richiede il calcolo di uno jacobiano e la sua fattorizzazione LU, per la risoluzione di (7.9).

Una prima variante, atta a ridurre i tempi di esecuzione, consiste nel fissare un intero $p>1$, considerare un sottoinsieme di indici $\{p_n\}$, con $n=1,2,\dots$ e ricalcolare lo jacobiano solo alle iterate di indice p_n , mantenendolo congelato nelle iterate intermedie. In questo modo il calcolo dello jacobiano e la sua fattorizzazione LU viene eseguita ogni p passi. Il risparmio è notevole ma, ovviamente, si perde l'ordine 2.

Come nel caso scalare, sono utili metodi che non necessitano della conoscenza esplicita delle derivate, in questo caso "parziali", della $F(x)$. A tale scopo consideriamo le seguenti approssimazioni dello jacobiano $F'(x_n)$:

$$\frac{\partial f_i(x_n)}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(x_n) - f_i(x_n - h_j e_j)}{h_j}$$

per opportune scelte degli incrementi h_j (e_j e' il vettore canonico j -esimo)

Nel **metodo delle secanti**, gli incrementi sono $h_j = e_j^T (x_n - x_{n-1})$.

Nel **metodo di Steffensen** gli incrementi sono dati da $h_j = f_j(x_n)$.

In entrambi i casi, se incidentalmente un incremento h_j risulta nullo può essere sostituito da un numero prossimo all'epsilon di macchina. Si dimostra che, come per il caso scalare, i due metodi convergono localmente ed hanno ordine rispettivamente $p=1.618\dots$, e $p=2$.

Metodo dell'omotopia.

Abbiamo visto che tutti i metodi, salvo casi molto particolari, convergono localmente. Ciò significa che bisogna già conoscere una approssimazione sufficientemente buona della soluzione dove valgono le condizioni di convergenza locale. Spesso ciò non è facile specialmente in R^d dove manca un analogo del metodo dicotomico che serve, appunto, ad avvicinarsi alla soluzione fino a soddisfare le condizioni di convergenza del metodo che si vorrebbe usare.

In generale, dato il problema $F(x)=0$, conviene considerare la seguente famiglia di problemi che dipendono con continuità da un parametro $t \in [0,1]$:

$$H(t, x)=(1-t)(x-\xi) + t F(x) = 0 \quad (7.10)$$

dove ξ è un punto arbitrario di \mathbb{R}^d che converrà comunque prendere più vicino possibile a x^* , ma non necessariamente nell'insieme di convergenza locale del metodo iterativo.

Si osservi che per $t=0$, l'equazione (7.10) da risolvere rispetto ad x è

$$H(0, x) = x - \xi = 0$$

la cui soluzione è banalmente $x=\xi$, mentre, per $t=1$, l'equazione è

$$H(1, x) = F(x) = 0.$$

Data una discretizzazione $0=t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N=1$ dell'intervallo unitario, si considerino i corrispondenti problemi:

$$H(t_i, x)=0 \quad i=0,1,\dots,N.$$

le cui soluzioni x^*_i passano da ξ (per $i=0$) a x^* (per $i=N$). Se la discretizzazione è abbastanza fine, è ragionevole pensare che il punto x^*_i sia un buon punto di partenza del metodo iterativo che intendiamo usare per il calcolo della soluzione successiva x^*_{i+1} .

In tal modo a partire dal problema $H(t_1, x)=0$ con punto di partenza dell'iterazione in ξ , si arriva al problema $H(t_N, x)=0$ con punto di partenza dell'iterazione in x^*_{N-1} , la cui soluzione è x^* .