CAPITOLO 4

FORMULE DI QUADRATURA

In questo capitolo verranno presentate delle formule, dette **formule di quadratura**, per l'approssimazione numerica degli integrali definiti. Esse sono del tipo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

dove le costanti A_i sono chiamate **pesi**, ed i punti x_i sono detti **nodi** della formula. Formule di questo tipo possono sempre essere ottenute attraverso l'integrazione di una formula di interpolazione polinomiale di Lagrange per la funzione f(x).

Si ha infatti, per ogni punto x di [a,b]:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} \ell_i(x)f(x_i)+err(x)$$

ed integrando:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} \ell_i(x)f(x_i) + \int_a^b err(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} \int_a^b \ell_i(x)f(x_i)dx + \int_a^b err(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b \ell_i(x)dx \right) f(x_i) + \int_a^b err(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + E\end{aligned}$$

dove $A_i = \int_a^b \ell_i(x)dx$ ed $E = \int_a^b err(x)dx$.

Le formule così ottenute sono chiamate **formule di quadratura lagrangiane**. In esse i pesi sono automaticamente determinati dalla scelta dei nodi, e l'errore, determinato dall'integrale dell'errore di interpolazione, dipende dalla regolarità della funzione integranda e dalla posizione dei nodi stessi.

Se i nodi sono equidistanti, le formule prendono il nome di **formule di Newton-Côtes** ed i pesi assumono una forma particolarmente semplice. Infatti fissato un intero n, i nodi si possono esprimere con:

$$x_i=x_0+ih \quad i=0,1,...,n \qquad \text{dove} \quad x_0=a,\ \ x_n=b \ \ \text{ed} \ \ h=\frac{b-a}{n}$$

mentre il generico punto x dell'intervallo [a,b] si può esprimere attraverso il seguente cambio di variabile:

$$x=x_0+mh \qquad \text{dove} \ \ m\in[0,n].$$

Di conseguenza si ha:

$$x-x_i=(m-i)h \qquad \forall m\in[0,n] \text{ e per ogni indice i.}$$

ed i coefficienti di Lagrange nella variabile m assumono la forma :

$$\ell_i(m)=\frac{(m-0)(m-1)...(m-(i-1))(m-(i+1)...(m-n)}{(i-0)(i-1)...2\cdot1\cdot(-1)(-2)...(i-n)} \qquad i=0,...,n$$

Si osservi che essi non dipendono né dalla posizione dei nodi né dalla loro reciproca distanza h, ma unicamente dal loro numero.

Con il precedente cambio di variabile i pesi diventano:

$$A_i = \int_a^b \ell_i(x)dx = \int_0^n \ell_i(m)hdm = h\,W_i \qquad i=0,...,n$$

dove i numeri $W_i=\int_0^n \ell_i(m)dm$ sono detti **numeri di Côtes** e dipendono anch'essi soltanto dal numero di nodi.

La formula di quadratura assume quindi la forma:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^n W_i f(x_i).$$

o, equivalentemente:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^n W_i f(x_i).$$

Per i primi valori di n, si trovano i seguenti numeri di Côtes:

n	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
0	1				
1	1/2	1/2			
2	1/3	4/3	1/3		
3	3/8	9/8	9/8	3/8	
4	14/45	64/45	24/45	64/45	14/45

<u>Errore delle formule di quadratura:</u>

Cominciamo con l'osservare che, qualunque sia l'insieme di nodi, la formula lagrangiana $\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ è *esatta* quando viene applicata ad un polinomio di grado n. Ciò è ovvio perche l'errore d'interpolazione su n+1 nodi è nullo per tutti i polinomi di grado non superiore ad n.

Osserviamo però che per n ($\neq 0$) pari, le formule di Newton-Côtes sono esatte anche per i polinomi di grado n+1. A tale scopo osserviamo che la formula è esatta, oltre che per i polinomi di grado fino ad n, anche per il polinomio $p(x)=(x-x_{n/2})^{n+1}$.

Infatti tale polinomio è dispari rispetto al punto centrale $x_{n/2}$ e quindi il suo integrale è nullo. D'altra parte anche la formula di quadratura è nulla per la simmetria dei numeri di Côtes ($W_i=W_{n-i}$) e dei nodi rispetto al nodo centrale $x_{n/2}$. In conclusione si ha:

$$\int_a^b (x-x_{n/2})^{n+1}dx = h\sum_{i=0}^{n} W_i (x_i - x_{n/2})^{n+1} = 0$$

Poichè ogni polinomio $q(x)=a_n x^n+\ldots$ di grado n+1 si può esprimere come $q(x)=a_n(x-x_{n/2})^{n+1}+r_n(x)$, per un opportuno polinomio $r_n(x)$ di grado n, la formula di quadratura risulta esatta anche per q(x). L'ultima affermazione è una ovvia conseguenza della linearità dell'integrale e della formula di quadratura rispetto alla funzione integranda, cioè:

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$

e

$$\sum_{i=0}^{n} A_i\left(\alpha f(x_i)+\beta g(x_i)\right)=\alpha\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)+\beta\sum_{i=0}^{n} A_i g(x_i)$$

Esprimeremo queste proprietà delle formule di quadratura dicendo che una formula ha **ordine polinomiale s** se s è il massimo grado dei polinomi per i quali la formula è esatta. Abbiamo visto che s e' uguale ad n oppure ad n+1 a seconda che n sia dispari o pari rispettivamente.

Per quanto riguarda l'errore, vale il seguente teorema:

Teorema 6.1. *Per ogni intero n, esiste una costante c tale che l'errore della formula di Newton-Côtes* $h\sum_{i=0}^{n} W_i f(x_i)$ *di ordine polinomiale s è dato da*

$$\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n} W_i f(x_i) = c(b-a)^{s+2}f^{(s+1)}(\xi)$$

per ogni funzione f(x) *sufficientemente regolare e per ogni intervallo* [a,b].

Poichè la costante c non dipende nè da f nè dall'intervallo [a,b], essa può essere facilmente determinata applicando la formula al polinomio x^{s+1} su un intervallo qualunque che, per semplicità di calcolo, fisseremo in [0,n]. In tale modo i nodi sono dati dagli interi 0,1,..,n ed il passo è h=1.

L'identità

$$\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n} W_i f(x_i)=c(b-a)^{s+2}f^{(s+1)}(\xi) \qquad (4.1)$$

fornirà direttamente il valore di c poiche' la derivata (s+1)-esima di x^{s+1} e' (s+1)!.

A titolo di esempio consideriamo il caso n=1 per il quale la formula è:

$$\frac{h}{2}[f(a)+f(b)]$$

In questo caso i 2 nodi sono a=0 e b=1. La formula di quadratura è di ordine s=n=1 e, applicata alla funzione x^2 fornisce il valore 1/2. D'altra parte il valore dell'integrale è 1/3 e quindi la relazione (4.1) diventa:

$$1/3 - 1/2 = 2c$$

che fornisce il valore c=-1/12.

Ricapitolando, per i primi valori di n si ottiene la seguente tabella:

n	formula	s	errore
0	$hf(x_0)$	0	$\frac{1}{2} f^{(1)}(\xi)(b-a)^2$
1	$h/2[f(x_0)+f(x_1)]$	1	$-\frac{1}{12} f^{(2)}(\xi)(b-a)^3$
2	$h/3[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]$	3	$-\frac{1}{2880} f^{(4)}(\xi)(b-a)^5$
3	$h/8[3f(x_0)+9f(x_1)+9f(x_2)+3f(x_3)]$	3	$-\frac{1}{6480} f^{(4)}(\xi)(b-a)^5$
4	$h/45[14f(x_0)+64f(x_1)+24f(x_2)+64f(x_3)+14f(x_4)]$	5	$-\frac{1}{1935360} f^{(6)}(\xi)(b-a)^7$

Analogamente a quanto abbiamo visto per l'interpolazione sui nodi equidistanti, anche nelle formule di quadratura di Newton-Côtes la convergenza può venir a mancare al crescere di n.

Si consideri per esempio l'integrale

$$\int_{-5}^{5} \frac{1}{1+x^2} dx = 2\arctan g(5) = 2.7468\ldots.$$

per il quale si trovano le seguenti approssimazioni divergenti

n	formula di N-C
1	0.3856
2	6.7949
3	2.0814
4	2.3740
5	2.3077
6	3.8704

Formule composte:

Dall'espressione dell'errore delle precedenti formule di Newton-Côtes, si vede che, fissato n, l'errore è infinitesimo quando l'ampiezza b-a dell'intervallo d'integrazione tende a zero. Più precisamente l'errore è un infinitesimo di ordine n+2 oppure n+3 a seconda che n sia dispari o pari. In altre parole l'errore tende a zero molto più rapidamente di quanto tenda a zero l'ampiezza dell'intervallo di integrazione. Ciò suggerisce l'idea di scomporre l'intervallo di integrazione in tanti sottointervalli e su ciascuno di essi applicare una formula di Newton-Côtes con n costante.

Sia dunque n+1 il numero di nodi della formula di Newton-Côtes che voglio usare e sia m un intero arbitrario. Consideriamo il passo $h=\frac{b-a}{n\cdot m}$ e l'insieme di nodi equidistanti $x_i=a+ih$ $i=0,...,nm$ per i quali risulta $x_0=a$ ed $x_{nm}=b$. In corrispondenza a questa distribuzione di nodi, consideriamo la seguente scomposizione dell'integrale in m integrali su sottointervalli di ampiezza $nh=\frac{b-a}{m}$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx + \int_{x_n}^{x_{2n}} f(x)dx + ... + \int_{x_{(m-1)n}}^{x_{nm}} f(x)dx \,.$$

Ciascun integrale della decomposizione è esteso ad un intervallo $I_k = \left[x_{(k-1)n}, x_{kn}\right]$ che contiene n+1 nodi equidistanti ed è quindi approssimabile con una formula di Newton-Côtes di ordine n:

$$\int_{x_{(k-1)n}}^{x_{kn}} f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n} W_i f(x_{(k-1)n+i}) = h\left(W_0 f(x_{(k-1)n}) + W_1 f(x_{(k-1)n+1}) + ... + W_n f(x_{kn})\right)$$

con un errore, che indicheremo con E_k, dato da $c\left(\frac{b-a}{m}\right)^{s+2} f^{(s+1)}(\xi_k)$, dove s e' sempre l'ordine polinomiale della formula (n oppure n+1).

L'espressione che si ottiene sommando i termini di tutte le formule è detta **formula di quadratura composta** e l'errore risultante è dato dalla somma degli errori su tutti gli m integrali della decomposizione.

Analizziamo in particolare il caso n=1 ed n=2.

Formula dei trapezi.

Sia n=1. In questo caso il passo è $h=\frac{b-a}{m}$, e la formula di Newton-Côtes per il k-esimo integrale della decomposizione è

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right) \qquad k=1,...,m$$

Sommando tali formule per k=1,...,m si ottiene la seguente formula composta detta **formula dei trapezi**.

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{m-1}) + \frac{f(x_m)}{2}\right)$$

L'errore globale è a sua volta dato dalla somma degli errori parziali $\sum_{k=1}^{m} E_k$. Esso dipende dal numero m di suddivisioni di (a,b) e, tenuto conto che l'ampiezza di ciascun intervallo di integrazione è $\frac{b-a}{m}$, si ha:

$$E(m)=\sum_{k=1}^{m} E_k = \sum_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{12} f''(\xi_k)\left(\frac{b-a}{m}\right)^3\right) = -\frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{m}\right)^3 \sum_{k=1}^{m} f''(\xi_k)$$

Poichè $\sum_{k=1}^{m} f''(\xi_k)=mf''(\eta)$ per un opportuno punto $\eta \in (a,b)$, l'errore globale è:

$$E(m)=-\frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{m^2} f''(\eta).$$

Si osservi che l'errore è un infinitesimo di ordine 2 rispetto ad m e quindi la formula è convergente al crescere del numero di nodi. Raddoppiando il numero di suddivisioni, l'errore è ridotto per un fattore R(m) che asistoticamente converge a 4:

$$R(m)=\frac{E(m)}{E(2m)} \to 4$$

<u>Formula di Cavalieri-Simpson.</u>

Nel caso n=2 il passo è $h=\frac{b-a}{2 \cdot m}$, e la formula di Newton-Côtes per il k-esimo integrale della decomposizione è

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right) \qquad k=1,...,m$$

Sommando tali formule per k=1,...,m si ottiene la seguente formula composta detta **formula di Cavalieri-Simpson**.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+.....+4f(x_{2m-1})+f(x_{2m})\right)$$

Tenuto conto che l'ampiezza di ciascun intervallo di integrazione è sempre $\frac{b-a}{m}$, si ha:

$$E(m)=\sum_{k=1}^{m} E_k = \sum_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2880} f^{iv}(\xi_k)\left(\frac{b-a}{m}\right)^5\right) = -\frac{1}{2880}\left(\frac{b-a}{m}\right)^5 \sum_{k=1}^{m} f^{iv}(\xi_k)$$

Analogamente al caso precedente si ha $\sum_{k=1}^{m} f^{iv}(\xi_k)=mf^{iv}(\eta)$ per un opportuno punto $\eta\in$ (a,b). In questo caso l'errore globale è:

$$E(m)=-\frac{1}{2880}\frac{(b-a)^5}{m^4}f^{iv}(\eta)=-180(b-a)h^4 f^{iv}(\eta).$$

Questa volta l'errore è un infinitesimo di ordine 4 rispetto ad m e quindi la formula è convergente con velocità di convergenza superiore a quella dei trapezi. Raddoppiando il numero m di suddivisioni, l'errore si riduce asintoticamente di un fattore 16:

$$R(m)=\frac{E(m)}{E(2m)}\to 16$$

<u>*Un esempio numerico:*</u>

Un confronto corretto tra le due formule deve essere fatto a parità di numero di nodi, cioè di valutazioni della funzione integranda f(x). Per la formula dei trapezi, il numero di nodi è m+1, mentre per la formula di Cavalieri-Simpson è 2m+1.

Nella tabella successiva sono riportati i valori relativi all'esempio già trattato:

$$\int_{-5}^{5}\frac{1}{1+x^2}dx = 2\text{arctang}(5)=2.7468....$$

Come si vede dai risultati numerici, questo integrale è particolarmente ostico da calcolare. Infatti entrambe le formule forniscono dei buoni valori approssimati soltanto per un numero di nodi abbastanza elevato.

	Formula Trapezi				Cavalieri Simpson			
# nodi	m	valore	errore	fattore	m	valore	errore	fattore
3	2	5.1823	2.44	4.53	1	6.7949	4.04	-41.9
5	4	3.2858	0.53	14.3	2	2.6503	-0.09	.745
9	8	2.7845	3.7(-2)	-54.6	4	2.6174	-0.13	9.59
17	16	2.7461	-6.8(-4)	2.86	8	2.7333	-0.01	148.4
33	32	2.7466	-2.41(-4)	3.9977	16	2.7467	-9.08(-5)	1996
65	64	2.7467	-6.02(-5)	3.99948	32	2.7468	-4.55(-8)	17.45
129	128	2.7468	-1.50(-5)	3.99987	64	2.7468	-2.61(-9)	15.991
257	256	2.7468	-3.76(-6)	3.999967	128	2.7468	-1.63(-10)	15.9955
513	512	2.7468	-9.40(-7)		256	2.7468	-1.02(-11)	

<u>Principio di estrapolazione di Richardson.</u>

Sia $I(f)$ un **funzionale lineare**, cioè un operatore lineare che trasforma la funzione f in un numero reale. Esempi di funzionali lineari sono:

1. $I(f)=\int_a^b f(x)dx$
2. $I(f)=\int_a^b w(x)f(x)dx$
3. $I(f)=f(a)$
4. $I(f)=f'(a)$

5. $I(f)=\int_a^b w(x)f(x)dx + f(c).$

Supponiamo che il funzionale lineare sia approssimato da una formula F(h) dipendente da un parametro h. Per esempio

1. $\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n} W_i f(a+ih)$ (formula di Newton-Côtes)

2 $\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + ... + f(a+(n-1)h) + \frac{f(b)}{2}\right)$

(formula dei trapezi)

3. $f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (differenza divisa prima).

Supponiamo inoltre che l'errore, di ordine p, si possa sviluppare nel seguente modo:

$$I(f) - F(h) = 0(h^p) = ch^p + 0(h^s) \qquad s>p \qquad (4.2)$$

con c *indipendente* da h.

Non tutte le formule dispongono di un errore che soddista tale condizione. Infatti considerando ancora due degli esempi precedenti, si ha:

1. $\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n} W_i f(a+ih) = c(b-a)^{s+2} f^{(s+1)}(\xi) = c(nh)^{s+2} f^{(s+1)}(\xi) =$

$= c(nh)^{s+2}\left(f^{(s+1)}(a) + (\xi-a)f^{(s+2)}(\eta)\right) = dh^{(s+2)} + 0(h^{(s+3)})$

3. $f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\frac{h}{2}f''(a) - \frac{h^2}{6}f'''(a+\theta h) = dh + 0(h^2)$

Nella 3 la costante d non dipende da h, mentre nella 1 la costante d e' data da $cn^{s+2} f^{(s+1)}(a)$ che dipende da h poiche' $n=(b-a)/h$.

Disponendo di una stima dell' errore nella forma (4.2), si può applicare la formula F(h) per due valori diversi del parametro, diciamo h ed $\frac{h}{2}$, ed ottenere:

$$I(f) - F(h) = ch^p + 0(h^s)$$
$$I(f) - F\left(\frac{h}{2}\right) = c\left(\frac{h}{2}\right)^p + 0(h^s). \qquad (4.3)$$

Sottraendo le due espressioni si ottiene la seguente stima dell'errore per la formula $F\left(\frac{h}{2}\right)$

$$c\left(\frac{h}{2}\right)^p = \frac{F\left(\frac{h}{2}\right) - F(h)}{2^p - 1} + 0(h^s) \qquad (4.4)$$

che, sostituita in (4.3), da luogo alla relazione:

$$\mathrm{I}(f) = F\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{F\left(\frac{h}{2}\right) - F(h)}{2^p - 1} + 0(h^s).$$

La nuova formula così ottenuta:

$$F_1(h) := F\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{F\left(\frac{h}{2}\right) - F(h)}{2^p - 1}$$

approssima il funzionale $\mathrm{I}(f)$ con ordine s. Si noti che $F_1(h)$ è ottenuta da F(h) ed $F\left(\frac{h}{2}\right)$ senza ulteriori valutazioni della funzione f(x).

Il procedimento appena descritto prende il nome di **processo di estrapolazione di Richardson**. Esso si applica ad ogni coppia di valori di h e quindi da una successione di valori $F\left(\frac{h}{2^m}\right)$, m=0,1,... ottenuti dimezzando ricorsivamente il passo h, si può ottene una nuova successione

$$F_1\left(\frac{h}{2^m}\right) = F\left(\frac{h}{2^{m+1}}\right) + \frac{F\left(\frac{h}{2^{m+1}}\right) - F\left(\frac{h}{2^m}\right)}{2^p - 1}, \qquad m=0,1,...$$

che converge al funzionale $\mathrm{I}(f)$ con ordine s.

L'incremento dell'ordine che si ottiene con il procedimento di estrapolazione di Richardson è dato dalla differenza tra l'ordine s del **termine secondario d'errore** $0(h^s)$ e l'ordine p del **termine principale d'errore** ch^p .

Converrà quindi utilizzare formule per le quali la differenza s-p è alta. A tale proposito osserviamo che nei due esempi considerati (1 e 3) l'incremento è 1. D'altra parte per il funzionale 3 possiamo ottenere facilmente altre formule approssimanti, per esempio la seguente *differenza centrale*:

4. $$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!} f^{(3)}(a) - \frac{h^4}{5!} f^{(5)}(a) - \frac{h^6}{7!} f^{(7)}(a) - ...$$

che, oltre ad essere di ordine 2, ha l'errore secondario di ordine 4 a sua vosta sviluppabile in termini successivi di errore i cui ordini crescono di due in due.
Anche per la regola dei trapezi si ha un risultato analogo dovuto ad **Eulero e Mac Laurin**:

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+(n-1)h) + \frac{f(b)}{2}\right) +$$
$$+c_2h^2 + c_4h^4 + \ldots + c_{2r}h^{2r} + \ldots..$$

dove le costanti c_i non dipendono da h.

E' facile intuire e non difficile, sebbene noioso, da verificare che se l'errore ammette uno sviluppo in serie del tipo:

$$I(f) - F(h) = c_0h^{p_0} + c_1h^{p_1} + \ldots + c_kh^{p_k} + \ldots$$

con c_k indipendenti da h e $p_0<p_1<\ldots<p_k<\ldots$, allora la formula di estrapolazione $F_1(h)$ ammette il seguente ancora uno sviluppo dell'errore del tipo :

$$I(f) - F_1(h) = d_1h^{p_1} + d_2h^{p_2} + \ldots + d_kh^{p_k} + \ldots$$

con d_k indipendente da h per ogni k.
Allora per ogni coppia di valori estrapolati $F_1(h)$ ed $F_1\left(\frac{h}{2}\right)$ si può ottenere una seconda estrapolazione:

$$F_2(h) := F_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{F_1\left(\frac{h}{2}\right) - F_1(h)}{2^{p_1} - 1}$$

il cui errore è:

$$I(f) - F_2(h) = e_2h^{p_2} + e_3h^{p_3} + \ldots + e_kh^{p_k} + \ldots$$

con e_k indipendente da h per ogni k.

In generale le estrapolazioni successive sono ottenute dalla seguente formula ricorsiva:

$$F_{k+1}(h) := F_k\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{F_k\left(\frac{h}{2}\right) - F_k(h)}{2^{p_k} - 1}$$

il cui errore è ancora del tipo:

$$I(f) - F_{k+1}(h) = e_{k+1}h^{p_{k+1}} + e_{k+2}h^{p_{k+2}} + ... + e_{k+i}h^{p_{k+i}} + ...$$

Assegnato un valore iniziale h_0 del parametro, si può costruire la seguente tabella per le formule F_0 (=F), F_1,..., F_k ...

Tabella di estrapolazione di Richardson				
$h=\frac{h_0}{m}$	$F_0(\frac{h_0}{m})$	$F_1(\frac{h_0}{m})$	$F_2(\frac{h_0}{m})$	......
m=1	$F_0(h)$			
m=2	$F_0(\frac{h_0}{2})$	$F_1(h)$		
m=4	$F_0(\frac{h_0}{4})$	$F_1(\frac{h_0}{2})$	$F_2(h)$	
m=8	$F_0(\frac{h_0}{8})$	$F_1(\frac{h_0}{4})$	$F_2(\frac{h_0}{2})$	.....
....	.....	......	......	....

Si osservi che le formule $F_0(\frac{h_0}{2^i})$ i=0,1,... della prima colonna formano una successione convergente ad $I(f)$ con errore infinitesimo di ordine p_0, mentre le formule $F_1(\frac{h_0}{2^i})$ i=1, 2,... della seconda colonna hanno un errore infinitesimo di ordine p_1, e così di seguito per le colonne successive. Ciò significa che per m sufficientemente grande, e quindi per un passo h sufficientemente piccolo, la formula estrapolata sarà migliore, ma ciò può non essere vero per piccoli valori di m.

Supponiamo infatti che l'errore di una formula sia dato da ch^p e l'errore della sua estrapolazione sia dato da dh^s con s>p e le costanti c e d indipendenti da h. Se d>>c non è detto che sia $ch^p > dh^s$ per ogni h. Viceversa, per h sufficientemente piccolo la disuguaglianza $ch^p > dh^s$ è certamente verificata perchè dh^s è un infinitesimo più "veloce" di ch^p.

Se la formula F(h) è data dalla regola dei trapezi, il procedimento di estrapolazione successiva appena descritto prende il nome di **quadratura di Romberg**.

Nella seguente tabella sono riportati i valori della quadratura di Romberg per il calcolo dell'integrale:

$$I(f) = \int_1^3 \frac{1}{x} dx \qquad (=1.098612289....)$$

$h=\frac{2}{m}$	$F_0(h)$, rapp(h)		$F_1(h)$, rapp(h)		$F_2(h)$, rapp(h)		$F_3(h)$
m=1	1.333333						
m=2	1.166667	3.3	1.111112				
m=4	1.116667	3.71	1.100000	11.4	1.099259		
m=8	1.103211	3.90	1.098726	12.0	1.098639	45	1.098629
m=16	1.099768	3.975	1.098620	15.1	1.098613	....	1.098612
m=32	1.098902	3.991	1.098613	....	1.098612		1.098612
m=64	1.098685	....	1.098612		1.098612		1.098612
m=128	1.098630		1.098612		1.098612		1.098612

In questo caso le estrapolazioni successive, a passo fissato, forniscono risultati migliori. In particolare si osservi che attraverso l'estrapolazione $F_3(h)$ si possono ottenere 6 cifre decimali esatte con m=16 (cioè con 17 valutazioni della funzione integranda), contro la formula $F_0(h)$ per la quale m=128 fornisce appena 4 cifre esatte.

Si costruisca e si commenti la tabella relativa all'integrale

$$\int_{-5}^{5} \frac{1}{1+x^2} dx = 2\text{arctang}(5) = 2.7468...$$

Alla luce delle osservazioni e dei risultati precedenti, ci si chiede per quali valori del passo h si può avere la certezza che la k-esima estrapolazione fornisce un risultato effettivamente migliore della (k-1)-esima. Ciò accade evidentemente quando il termine secondario di errore è trascurabile rispetto al termine principale d'errore. Ma come possiamo saperlo?

Per semplicità di esposizione consideriamo il caso della quadratura di Romberg per la quale valgono le stime:

$$I(f) - F_0(h) = ch^2 + dh^4 + \ldots$$

$$I(f) - F_0\left(\frac{h}{2}\right) = c\left(\frac{h}{2}\right)^2 + d\left(\frac{h}{2}\right)^4 \ldots$$

$$I(f) - F_0\left(\frac{h}{4}\right) = c\left(\frac{h}{4}\right)^2 + d\left(\frac{h}{4}\right)^4 \ldots$$

e quindi:

$$- F_0(h) + F_0\left(\frac{h}{2}\right) = ch^2(3/4) + dh^4(15/16) + \ldots$$

$$- F_0\left(\frac{h}{2}\right) + F_0\left(\frac{h}{4}\right)) = c\left(\frac{h}{2}\right)^2(3/4) + d\left(\frac{h}{2}\right)^4(15/16) + \ldots$$

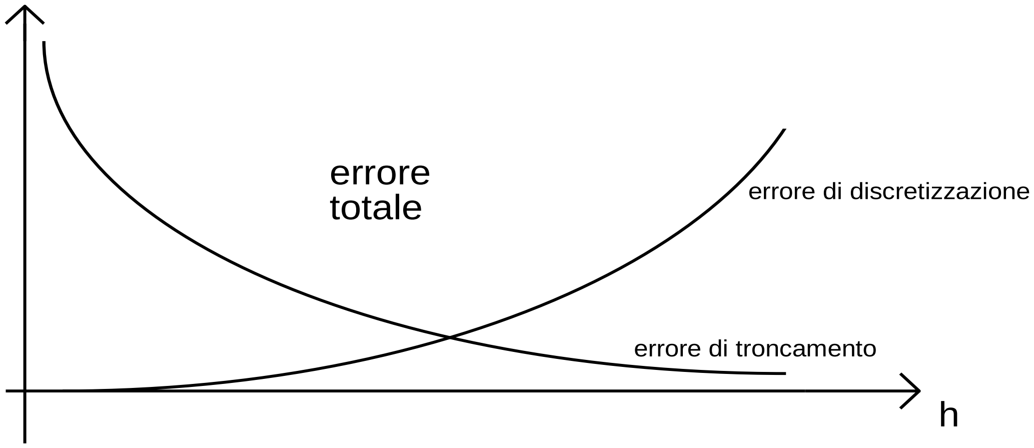
Se, nella prima delle precedenti due relazioni, dh^4 è trascurabile rispetto a ch^2, anche $dh^4(15/16)$ è trascurabile rispetto a $ch^2(3/4)$ ed anche $d\left(\frac{h}{2}\right)^4(15/16)$ rispetto a $c\left(\frac{h}{2}\right)^2(3/4)$.

Si ottiene quindi la seguente approssimazione:

$$\text{rapp}(h) = \frac{F_0(h) - F_0\left(\frac{h}{2}\right)}{F_0\left(\frac{h}{2}\right) - F_0\left(\frac{h}{4}\right)} \approx \frac{c\left(\frac{h}{2}\right)^2}{c\left(\frac{h}{4}\right)^2} = 4$$

Viceversa è facile vedere che se $\text{rapp}(h) \approx 4$ allora dh^4 è trascurabile rispetto a ch^2 e quindi l'estrapolazione garantisce un risultato migliore.

L'estrapolazione di Richardson non è soltanto uno strumento molto potente per ridurre il numero di chiamate della funzione in oggetto ma, in generale, per ridurre il numero totale di operazioni e quindi per ridurre la propagazione dell'errore di arrotondamento. In taluni casi l'errore di arrotondamento influenza il risultato prima che l'errore di discretizzazione della formula sia sceso al disotto della tolleranza voluta. Le due componenti d'errore per l'approssimazione del funzionale hanno, infatti, il seguente comportamento qualitativo:



da cui si vede che l'errore non può essere inferiore ad una certa soglia rappresentata dal minimo della curva ottenuta sommando i due errori.

<u>Formule di quadratura "adattativa".</u>

Abbiamo visto in precedenza che l'impiego di due formule F(h) ed F(h/2) può consentire una stima dell'errore. Nel procedimento di estrapolazione di Richardson abbiamo fatto un uso *passivo* di questa proprietà. In questo paragrafo verrà presentato un procedimento di integrazione che fa un uso *attivo* della stima dell'errore consentendo il calcolo approssimato dell'integrale a meno di un errore prefissato.
Ripartito l'intervallo d'integrazione (a,b) in tanti sottointervalli I_i è noto che

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_i \int_{I_i} f(x)dx$$

Se ogni integrale $\int_{I_i} f(x)dx$ è calcolato con un errore $\leq$TOL mis(I_i), dove TOL è una assegnata *tolleranza per unità di passo*, allora l'errore totale è maggiorato da TOL$\sum_i$mis(I_i)=TOL(b-a).
Adottata quindi una formula di quadratura, per esempio la formula dei trapezi

$$\int_{I_k} f(x)dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right),$$

si tratta di individuare un intervallo I_k, sufficientemente piccolo, sul quale l'errore calcolato con la formula (4.4) soddisfa il test di tolleranza: errore $\leq$TOL mis(I_k). Ciò si può fare, in modo sistematico, a partire dall'integrale esteso a tutto l'intervallo (a,b) dimezzando successivamente l'intervallo di integrazione.