

# METODI DI COLLOCAZIONE POLINOMIALE

## (Metodi di Runge-Kutta continui)

November 30, 2004

Nell'approssimare numericamente un problema di Cauchy, puo' capitare di essere interessati a valori della soluzione in punti diversi dai nodi di integrazione . Cio' puo' essere causato, per esempio, da una richiesta di "output denso" per una tabulazione fine della soluzione. E' chiaro che, in generale, non basta una semplice interpolazione lineare tra i nodi d'integrazione perche' l'interpolante lineare introduce un errore di ordine 2. Se il metodo d'integrazione ha ordine  $p \geq 3$  , sui punti di tabulazione aggiunti l'approssimazione avrebbe un ordine di precisione inferiore.

Una situazione analoga si ha nell'integrazione numerica di una equazione del tipo

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), & t \geq t_0, \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_0, \end{cases} \quad (0.1)$$

detta **equazione con ritardo** per la presenza del ritardo  $\tau$  nell'argomento di  $y$ . Supponendo di aver calcolato una soluzione approssimata  $\tilde{y}(t)$  fino al punto  $t_n$  , al passo successivo si approssima la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), \tilde{y}(t - \tau)), & t_n \leq t \leq t_{n+1}, \\ y(t_n) = y_n, \end{cases} \quad (0.2)$$

avendo adottato un passo  $h_{n+1} = t_{n+1} - t_n$  sufficientemente piccolo da garantire che l'argomento deviato  $t - \tau$  sia  $\leq t_n$ , cioe' appartenga ad un intervallo dove la soluzione e' gia' stata calcolata. Cio' non garantisce tuttavia che la funzione  $\tilde{y}(t - \tau)$  sia nota nei punti per i quali e' richiesto il suo valore. Si pensi ad esempio al metodo di Eulero Esplicito che assume la forma

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1} f(t_n, y_n, \tilde{y}(t_n - \tau)) \quad (0.3)$$

Se il punto  $t_n - \tau$  non coincide con qualche nodo precedente d'integrazione, diciamo  $t_{n-k}$  , il valore  $\tilde{y}(t_n - \tau)$  non e' noto. Anche in questo caso, si rende necessario utilizzare un metodo di integrazione numerica che fornisca, ad ogni passo, una approssimazione continua della soluzione e non solo una approssimazione discreta sui nodi. Inoltre, come per l'output denso, tale approssimazione continua deve essere di ordine uniforme adeguato in relazione al metodo discreto impiegato.

In generale, per ottenere un metodo di ordine locale uniforme  $\nu$  approssimiamo la soluzione  $y(t)$  in  $[t_n, t_{n+1}]$  con un polinomio  $p_\nu$  di grado  $\nu$  che si raccordi con continuita' in  $t_n$  alla soluzione numerica calcolata nell'intervallo precedente, che assuma cioe' il valore  $p_\nu(t_n) = y_n$ . Un tale polinomio puo' essere espresso nella forma:

$$p_\nu(t) = y_n + a_1(t - t_n) + a_2(t - t_n)^2 + \dots + a_\nu(t - t_n)^\nu. \quad (0.4)$$

Ora il problema e' quello di determinare i coefficienti  $a_i$  in modo da avere un errore locale  $O(h^{\nu+1})$  uniforme sull'intervallo corrente  $[t_n, t_{n+1}]$  e non solo sul punto finale  $y_{n+1} := p_\nu(t_{n+1})$ .

Il metodo che qui descriviamo e' noto come **metodo di collocazione** e si basa sulle proprieta' dell'*interpolazione di Lagrange*. Esso consiste semplicemente nel sostituire la funzione incognita  $y(t)$  con il polinomio  $p_\nu(t)$  ed imporre che il **residuo**

$$p'_\nu(t) - f(t, p_\nu(t)), \quad (0.5)$$

detto anche **scarto** o **difetto**, si annulli su  $\nu$  punti dell'intervallo corrente  $[t_n, t_{n+1}]$ ,

$$\bar{t}_1 < \bar{t}_2 < \dots < \bar{t}_\nu,$$

detti **punti di collocazione**. Si ottiene cosi' il sistema

$$p'_\nu(\bar{t}_j) - f(\bar{t}_j, p_\nu(\bar{t}_j)) = 0, \quad j = 1, \dots, \nu \quad (0.6)$$

in  $R^\nu$  (piu' precisamente in  $R^{\nu \times d}$  se stiamo trattando un sistema di dimensione  $d$ ) che, per un passo  $h_{n+1}$  sufficientemente piccolo, ammette una ed una sola soluzione per ogni scelta dei punti di collocazione  $\{\bar{t}_j\}$ .

Osserviamo che il metodo di collocazione puo' essere visto come un metodo di Runge-Kutta implicito. A tal fine scriviamo il polinomio derivato  $p'_\nu(t)$  nella forma di Lagrange sui nodi  $\bar{t}_i$ :

$$p'_\nu(t) = \sum_{i=1}^{\nu} \ell_i^{(\bar{t})}(t) p'_\nu(\bar{t}_i) = \sum_{i=1}^{\nu} \ell_i^{(\bar{t})}(t) f(\bar{t}_i, p_\nu(\bar{t}_i)) \quad (0.7)$$

dove  $\ell_i^{(\bar{t})}(t)$  sono i coefficienti di Lagrange (di grado  $\nu - 1$ )

$$\ell_i^{(\bar{t})}(t) = \prod_{j \neq i}^{\nu} \frac{t - \bar{t}_j}{\bar{t}_i - \bar{t}_j}. \quad (0.8)$$

Per svincolarci dal particolare intervallo  $[t_n, t_{n+1}]$  e dal corrispondente passo  $h_{n+1}$ , eseguiamo il cambio di variabile

$$t = t_n + ch_{n+1}, \quad c \in [0, 1]$$

con il quale si ha

$$\bar{t}_j = t_n + c_j h_{n+1}, \quad j = 1, \dots, \nu$$

e, per ogni  $t = t_n + ch_{n+1}$ ,

$$\ell_i^{(\bar{t})}(t) = \ell_i^{(c)}(c) = \prod_{j \neq i}^{\nu} \frac{c - c_j}{c_i - c_j}.$$

Essendo

$$p_\nu(t) = p_\nu(t_n) + \int_{t_n}^t p'(s) ds = y_n + \int_{t_n}^t \sum_{i=1}^{\nu} \ell_i^{(\bar{t})}(s) p'_\nu(\bar{t}_i) ds = y_n + \sum_{i=1}^{\nu} \left( \int_{t_n}^t \ell_i^{(\bar{t})}(s) ds \right) p'_\nu(\bar{t}_i), \quad (0.9)$$

il cambio di variabile considerato fornisce, per ogni punto  $t_n + ch_{n+1}$  dell'intervallo  $[t_n, t_{n+1}]$ , il valore approssimato

$$p_\nu(t_n + ch_{n+1}) = y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^{\nu} \left( \int_0^c \ell_i^{(c)}(s) ds \right) p'_\nu(\bar{t}_i). \quad (0.10)$$

In particolare, per  $c = 1$ , si ottiene l'approssimazione in  $t_{n+1}$

$$y_{n+1} = p_\nu(t_n + h_{n+1}) = y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^{\nu} \left( \int_0^1 \ell_i^{(c)}(s) ds \right) p'_\nu(\bar{t}_i),$$

mentre per ogni punto  $t_n + c_i h_{n+1}$  si ottiene l'approssimazione

$$p_\nu(t_n + c_i h_{n+1}) = y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^{\nu} \left( \int_0^{c_i} \ell_j^{(c)}(s) ds \right) p'_\nu(\bar{t}_j).$$

Da queste si ricava immediatamente che il metodo altro non e' che un metodo di Runge-Kutta implicito

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^{\nu} w_i K_i$$

non appena si ponga, per  $i = 1, \dots, \nu$ ,

$$\int_0^1 \ell_i^{(c)}(s) ds = w_i$$

e

$$p'_\nu(\bar{t}_i) = K_i$$

che, in virtu' della relazione (??) soddisfa l'equazione

$$K_i = f(\bar{t}_i, y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij} K_j)$$

con

$$a_{ij} = \int_0^{c_i} \ell_j^{(c)}(s) ds.$$

I punti  $c_i$  sono quindi le ascisse del metodo di Runge-Kutta,  $w_i$  sono i pesi e  $a_{ij}$  sono i coefficienti con i quali si calcolano i livelli  $K_i$  espressi in forma implicita. Il metodo di

collocazione e' quindi un particolare metodo di Runge-Kutta implicito con un numero di livelli pari al numero di punti di collocazione, con le ascisse  $c_i$  e con i pesi  $w_i$  ed i coefficienti  $a_{ij}$  determinati dagli estremi di integrazione dei coefficienti di Lagrange come indicato nelle formule precedenti.

Si osservi infine che la relazione (??) fornisce, in ogni punto dell'intervallo  $[t_n, t_{n+1}]$  determinato dal valore di  $c$ , una approssimazione della soluzione:

$$p_\nu(t_n + ch_{n+1}) = y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^{\nu} w_j(c) K_j$$

dove

$$w_j(c) = \int_0^c \ell_j^{(c)}(s) ds.$$

Il metodo di collocazione polinomiale e' quindi un metodo di Runge-Kutta che esprime il suo carattere *continuo* attraverso la presenza di funzioni peso  $w_i(c)$  che sono, appunto, polinomi di grado  $\nu$ . Come abbiamo gia' osservato, per  $c = 1$  otteniamo l'approssimazione sul nodo  $t_{n+1}$  mentre per  $c = 0$  si rimane sul punto  $t_n$  col valore  $y_n$ .

Si verifichi che il metodo di Eulero Implicito e' un metodo di collocazione con un polinomio di grado 1 e unico punto di collocazione il punto  $t_{n+1}$  che corrisponde all'ascissa  $c = 1$ , e che il corrispondente peso e' il polinomio di primo grado  $w(c) = c$ .

Riguardo all'ordine di approssimazione, si dimostra che l'errore discreto (sui nodi) e' di ordine locale almeno  $\nu + 1$  e quindi di ordine globale  $p \geq \nu$ , per ogni scelta dei nodi. Per quanto riguarda invece l'ordine uniforme, e' evidente che l'errore non puo' superare l'ordine  $\nu + 1$  essendo  $\nu$  il grado del polinomio approssimante. A tale proposito vale il seguente teorema.

**Theorem 0.1** *Per ogni scelta delle ascisse  $c_i, i = 1, \dots, \nu$  il metodo di collocazione ha un errore locale di troncamento  $\geq \nu + 1$  e quindi un errore globale  $p \geq \nu$ .*

$$\max_n \|y_n - y(t_n)\| = O(h^p) \quad p \geq \nu.$$

*D'altra parte, l'errore locale uniforme e' anch'esso di ordine  $\geq \nu + 1$  mentre l'errore globale uniforme e di ordine  $q = \min\{p, \nu + 1\}$ .*

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_f} \|p_\nu(t) - y(t)\| = O(h^q).$$

Particolari scelte delle ascisse  $c_i$  possono portare a risultati di **superconvergenza**, cioe' di convergenza con ordine discreto piu' alto di  $\nu$ , che e' l'ordine garantito per ogni scelta dei  $c_i$ .

In particolare, si possono scegliere come ascisse gli zeri del polinomio di Legendre di grado  $\nu$ , una particolare classe  $\{P_\nu\}$  di polinomi che, per ogni  $\nu$ , ammette  $\nu$  radici reali e distinte interne all'intervallo  $[0, 1]$ . Tali metodi sono chiamati **Metodi di collocazione Gaussiana**. Visti come metodi discreti, essi forniscono formule *ottimali* con errore di troncamento di ordine  $2\nu + 1$ , e quindi con errore globale di ordine  $p = 2\nu$ ,

$$\max_n \|y_n - y(t_n)\| = O(h^{2\nu}).$$

Come metodi continui, sono ancora *ottimali* poiche' l'ordine uniforme e' il massimo che si puo' ottenere con un polinomio di grado  $\nu$ , cioe'  $\nu + 1$ . In altre parole, l'errore uniforme, che e' localmente di ordine  $\nu + 1$  per ogni scelta dei nodi, non si propaga e rimane di ordine  $q = \nu + 1$  su tutto l'intervallo d'integrazione.

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_f} \|p_\nu(t) - y(t)\| = O(h^{\nu+1}).$$

I metodi di collocazione Gaussiana sono piu' interessanti come metodi discreti che come metodi continui perche' l'ordine di convergenza discreta  $p$  e' superiore all'ordine uniforme  $q$  (a parte il caso  $\nu = 1$  dove  $2\nu = \nu + 1$  e quindi  $p = q$ ). Essi godono anche della proprieta' di essere *assolutamente stabili* con regione di assoluta stabilita' coincidente con  $C^-$ , il semipiano complesso negativo.

**Metodo del punto medio** (metodo Gaussiano,  $\nu = 1$ , ordine discreto  $p = 2\nu = 2$ , ordine uniforme  $q = \min\{p, \nu + 1\} = 2$ )

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array} \quad w_1(c) = c;$$

**Metodo di Hammer–Hollingsworth** (metodo Gaussiano,  $\nu = 2$ , ordine discreto  $p = 2\nu = 4$ , ordine uniforme  $q = \min\{p, \nu + 1\} = 3$ )

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} w_1(c) = -\frac{\sqrt{3}}{2}c(c - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}), \\ w_2(c) = \frac{\sqrt{3}}{2}c(c - 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}). \end{array}$$

Ci sono altre scelte dei  $\nu$  punti di collocazione che portano a metodi superconvergenti (non ottimali). In particolare i seguenti due metodi, hanno ordine globale discreto  $p = \nu + 1$  e quindi ordine uniforme  $q = \min\{p, \nu + 1\} = p$ .

**Primo metodo di Ehle:** ( $\nu = 2$ ,  $p = q = 3$ );

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \quad \begin{array}{l} w_1(c) = -\frac{3}{4}c(c - 2), \\ w_2(c) = \frac{3}{4}c(c - \frac{2}{3}). \end{array}$$

**Secondo metodo di Ehle:** ( $\nu = 3$ ,  $p = q = 4$ )

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{24} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \quad \begin{array}{l} w_1(c) = 2c(\frac{1}{3}c^2 - \frac{3}{4}c + \frac{1}{2}), \\ w_2(c) = -4c^2(\frac{1}{3}c - \frac{1}{2}), \\ w_3(c) = 2c^2(\frac{1}{3}c - \frac{1}{4}). \end{array}$$