Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Laurea in ingegneria dell'Informazione e Industriale.
Anno Accademico 2013/2014
Programma finale del corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria (6cfu)
alla data del giorno: 17 dicembre 2013

Lezioni ed Esercitazioni: Prof. Gino Tironi

1 Funzioni di variabile complessa

Richiami sui numeri complessi. La sfera complessa. Intorni di $z_0 \in \mathbb{C}$ e intorni di ∞. Limite e continuità per funzioni complesse. Teorema di Jordan (enunciato). Nozione di derivata parziale e di differenziabilità per funzioni di piú variabili. Derivabilità e condizioni di monogeneità di Cauchy-Riemann: necessità (dim). Sufficienza: se una funzione ha parte reale e parte immaginaria differenziabili in (x_0, y_0) e valgono le condizioni di monogeneità allora $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$ è derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0$(dim) . Funzioni a variazione limitata; loro principali proprietà (sd). Somme alla Riemann-Stieltjes. Integrale di Riemann-Stieltjes. Sua esistenza (sd) e principali proprietà: linearità, additività sul dominio, maggiorazione del modulo (sd). Integrali di linea in $\mathbb{C}$, in particolare per archi di curva generalmente regolari. Teorema fondamentale di Cauchy sulle funzioni olomorfe (dim solo per i triangoli). Conseguenze ed estensioni. Teorema della media (dim). Formula integrale per la funzione e per le sue derivate successive (dim per $f(z)$ e per $f'(z)$). Teorema di Morera (dim). Proprietà di massimo (dim) (Facoltativa la dimostrazione che se $f(z)$ ha modulo massimo in un punto interno allora è costante). Sviluppo in serie di Taylor di funzioni analitiche (dim). Serie di Laurent (dim). Poli e singolarità essenziali. Teorema di Picard (sd). Teorema di Weierstrass (principio d'identità per le serie di potenze, prima forma) (dim). Corollario: Principio d'identità delle funzioni olomorfe (seconda forma) (dim); prolungamento analitico. Funzioni intere. Teorema di Liouville (dim). Applicazione al teorema fondamentale dell'algebra (dimostrazione). Teorema dei residui (dim). Calcolo dei residui; applicazioni al calcolo d'integrali. Integrali su intervalli illimitati. Lemma di Jordan (dim). Il residuo all'infinito. Valore principale dell'integrale secondo Cauchy. Il caso di $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$, con $z \in \Gamma(I)$. Il logaritmo nel piano complesso. Teorema dell'indicatore logaritmico (dim) e generalizzazioni. Teorema fondamentale dell'algebra (altra dimostrazione). Principio dell'argomento (sd). Teorema di Rouché (sd). Prolungamento analitico di un elemento di funzione lungo un cammino. Esempi di elementi non prolungabili: le somme delle serie di Weierstrass e di Fredholm. Serie lacunari. Esempio della polidromia nel caso di $\sqrt{1 + z}$. Punti di diramazione e superficie di Riemann per $\sqrt{z}$, $\sqrt[n]{z}, \log z$. Le funzioni olomorfe come rappresentazioni conformi (dim). Un teorema di Riemann sulla rappresentazione conforme (sd). Trasformazioni bilineari di Möbius. La funzione gamma; rappresentazione integrale e cenno alla formula $\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}G(z)$ con $G(z)$ funzione intera. Cenno alla formula di Stirling.

2 Serie di Fourier

Serie di Fourier in generale. Determinazione dei coefficienti. Disuguaglianza di Bessel (dim). Equazione di Parseval. Lemma di Riemann-Lebesgue in generale (sd). Serie trigonometriche. Il sistema di funzioni $\{1\} \cup \{\cos kx, \sin kx : k \in \mathbb{N}^+\}$ è ortogonale. Determinazione dei coefficienti. Il sistema di funzioni ortogonali e^{ikx}, $k \in \mathbb{Z}$. Relazione fra i coefficienti nei due sistemi. Il nucleo di Dirichlet. Convergenza puntuale: criterio di Dini (dim). Convergenza uniforme (Dimostrazione facoltativa). Cambiamento di scala. Somme alla Cesàro. Il nucleo di Féjer. Teorema di Féjer (Dimostrazione facoltativa). Funzioni continue e convergenza di polinomi trigonometrici. Le funzioni continue sono individuate dalla loro serie di Fourier (cenno). Teoremi di Kolmogoroff, di Katznelson e Kahane (cenni, sd). Nucleo di Féjer e nucleo di Dirichlet: confronto e principali proprietà. Fenomeno di Gibbs (sd).

3 Un accenno all'integrale di Lebesgue e agli spazi L^p

Integrale di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$: insiemi di misura nulla secondo Lebesgue, funzioni a scala. Funzioni integrabili secondo Lebesgue. Indipendenza dell'integrale dalla successione di funzioni a scala. Funzioni misurabili. Teoremi fondamentali: di Beppo Levi o della convergenza monotona; di Lebesgue o della convergenza dominata; teorema di Fubini; teorema di Tonelli. Alcuni esempi. Insiemi misurabili e alcune loro proprietà. Integrali di Riemann e di Lebesgue. Spazi vettoriali normati completi. Spazi di Banach e spazi di Hilbert. Il sup essenziale. Gli spazi $L^p(A)$ con $p = 1, 2, \infty$. Loro completezza (sd). Il supporto di una funzione. Spazi $L^p(A)$, con $p \geq 1$. Sono spazi vettoriali su $\mathbb{C}$. Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski (sd). Lo spazio vettoriale $\mathcal{D}(A)$ delle funzioni a supporto compatto di classe $\mathcal{C}^\infty$ su un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$.

4 Un accenno alle distribuzioni

Le distribuzioni o funzioni generalizzate: cenni storici. Le funzioni localmente integrabili. Spazio delle funzioni test o di prova. Convergenza nel senso di $\mathcal{D}(A)$. Funzioni localmente integrabili e funzionali lineari continui. Convergenza nel senso delle distribuzioni. Completezza di $\mathcal{D}'(A)$ (sd). Distribuzioni di Heaviside e di Dirac. Distribuzione Valore Principale di $\frac{1}{x}$. Derivazione di distribuzioni (giustificazione della formula $\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, v \rangle = -\langle u, \frac{\partial v}{\partial x_i} \rangle$). Derivazione della distribuzione di Heaviside (dim). Convoluzione di funzioni $L^1(\mathbb{R}^n)$. Continuità e derivabilità di una convoluzione. Convoluzione di distribuzioni. In particolare $u * \delta = u$.

5 Trasformate di Fourier

Trasformata di Fourier in $\mathbb{R}^n$: sue principali proprietà. La trasformata $\hat{f}(\xi)$ è continua (dim), limitata (dim), ha limite 0 per $|\xi| \to \infty$: dimostrazione del lemma di Riemann-Lebesgue nel caso unidimensionale (dim). Cioè: $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ è un'applicazione lineare e continua. Altre proprietà fondamentali: traslazione, similitudine, coniugazione, moltiplicazione per x_k, moltiplicazione per $e^{i\langle a,x\rangle}$, trasformata di $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ (tutte con dim). Convoluzione e approssimazione. Trasformata della convoluzione (dim). Formula di inversione (sd). Spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La trasformata di Fourier è una biiezione tra lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$ e lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi)$ (dim).La trasformata di Fourier di $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ha limite 0 per $|\xi| \to \infty$: dimostrazione del lemma di Riemann-Lebesgue nel caso generale (dim).Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Teorema di Plancherel. Lemma preliminare: cioè $(2\pi)^n\langle f, g\rangle_{L^2} = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{L^2}$ per funzioni in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (dim facoltativa). Caso particolare di $f \in L^2(\mathbb{R})$: $\hat{f}(\xi) = \lim_{k\to+\infty} \int_{-k}^{k} e^{-ix\xi} f(x)\, dx$. Convergenza nel senso di $\mathcal{S}$. Cenno alle distribuzioni temperate: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Funzioni a crescenza lenta e distribuzioni temperate. Trasformata di Fourier di una distribuzione temperata.

6 Trasformate di Laplace

Trasformata di Laplace unilatera. Esempi di funzioni trasformabili e non. Funzioni di ordine esponenziale. Se esiste $\mathcal{L}(f)(s_0)$, allora esiste $\mathcal{L}(f)(s)$, per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\Re(s) > \Re(s_0)$. Ascissa di convergenza semplice e assoluta, semipiano di convergenza. Convergenza uniforme di integrali in un semipiano, sottopiano proprio del semipiano di convergenza, per funzioni di ordine esponenziale (sd). Proprietà della trasformata: è olomorfa nel semipiano di convergenza (dimostrazione per funzioni di ordine esponenziale). Calcolo delle derivate della trasformata. La trasformata di Laplace è infinitesima per $\Re(s) \to +\infty$ (dimostrazione nel caso di funzione integrabile secondo Lebesgue). Altre proprietà fondamentali: traslazione, cambiamento di scala, moltiplicazione per $e^{\gamma t}$ (tutte con dim). Un lemma sul limite di $e^{\sigma T} \int_0^T f(t)dt$ con $\mathrm{Re}(\sigma) \geq \max(\lambda_0, 0)$, per una funzione trasformabile (sd). Trasformata della derivata di una funzione (dim). Trasformata di una funzione periodica per $t \geq 0$ (dim). Trasformata di una convoluzione (dim). Antitrasformata: cenno alla formula di Riemann-Fourier (Integrale di Bromwich - Mellin). Antitrasformata di funzioni razionali. Applicazione alle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Trasformata della $\delta(t)$ e delle sue derivate (sd). Teoremi dei valori iniziali e finali (sd).

7 Esercitazioni

Esempi di funzioni derivabili e non in senso complesso: $f(z) = \overline{z}$ e $f(z) = |z|$, non sono olomorfe. Esempio di funzione che soddisfa le condizioni di monogeneità ma non è neppure continua. Calcolo di integrali di linea in $\mathbb{C}$ e olomorfismo delle funzioni: esempi di integrali estesi a circuiti, nulli e non nulli per funzioni non olomorfe. I polinomi, e^z, $\operatorname{sen} z, \cos z$ sono funzioni intere. Calcolo d'integrali con il metodo dei residui. Calcolo di integrali su domini illimitati. Riduzione a fratti semplici di funzioni razionali, usando i residui. Localizzazione degli zeri di una funzione complessa. Calcolo di integrali di funzioni polidrome. Funzioni armoniche in $\mathbb{R}^2$: la parte reale e la parte immaginaria di una funzione olomorfa sono armoniche. $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$. Calcolo delle serie di Fourier di alcune funzioni: $\mathrm{sgn}(x), x, |x|, x^2, \ldots$. Esempi di somme di alcune serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ e simili. Integrabilità secondo Lebesgue di $e^{-|x|}$ su $\mathbb{R}$. Funzioni assolutamente continue e primitive. La "scalinata del diavolo" (funzione di Cantor - Vitali). Esempio di una funzione in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. $||u||_p$ non è una norma se $0 < p < 1$: non vale la disuguaglianza triangolare. Esempi di funzioni in $\mathcal{C}^\infty$ o in L^1_{loc} che convergono alla distribuzione δ di Dirac. $\Delta\left(-\frac{1}{4\pi||x||}\right) = \delta(x)$ in $\mathbb{R}^3$. Esempi di trasformate di Fourier. In particolare $\mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{2}})(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Esempi di successioni di funzioni convergenti in $\mathcal{S}$ ma non in $\mathcal{D}$. La distribuzione e^x non è una distribuzione temperata.Trasformata di Fourier di $\delta(x)$ e di 1: $\hat{\delta} = 1$ e $\hat{1} = (2\pi)^n\delta(x)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. $\mathcal{F}(P\frac{1}{x})(\xi) = \frac{\pi}{i}\mathrm{sign}(\xi)$ (cenno, senza dimostrazione). Applicazione della trasformata di Fourier all'equazione del calore. $\mathcal{L}(u(t)), \mathcal{L}(t^k u(t))$, dove $u(t)$ è la funzione di Heaviside. Cenno alla trasformata bilatera e al suo dominio di convergenza. Risoluzione di equazioni e sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti con la trasformata di Laplace. Esempi di applicazione della trasformata di Laplace alle equazioni a derivate parziali. Utilizzo del lemma di Plancherel per il calcolo di integrali.